Bölüm 1

Lineer Diferansiyel Denklemler ve Çözümleri Üzerine

Mehmet Akif Çetin[1]

Özet

Spektral teori modern matematiğin tarihi içerisinde fiziksel ve matematiksel yapılar hakkında en bilgi verici araç olmuştur. Son altmış yıldaki matematiksel yayınlarla bu konu oldukça hızlı bir gelişim göstermiştir. Katı hal fiziğinde ve kristallerin kuantum mekaniği ile ilgili metallerin teorisinde ortaya çıkan periyodik katsayılı diferansiyel denklemlerin spektral analizi fizikçilerin ve matematikçilerin ortak ilgi alanlarından biri olmuştur. Buradaki spektral analiz kavramı aslında denklemin bazı şartlarla oluşturduğu özdeğerlerini ve bu özdeğerlerin denklemde yerleştirilmesiyle elde edilen ve adına özfonksiyon denilen çözüm fonksiyonlarının bulunması işlemidir. İki ucu bağlanmış bir telin titreşimi, yüzey üzerindeki elektrostatik potansiyel, iletken bir çubuk üzerindeki ısı iletimi gibi kuantum fiziğinden, dalga teorisine kadar birçok problem lineer diferansiyel denklemlerin değişik formları ile ifade edilmektedir. Bu çalışmada, lineer bir diferansiyel denklemin sonsuz boyutlu bir vektör uzayında diferansiyel bir operatör için özdeğer problemi olarak nasıl ortaya çıktığı ele alınmıştır. Ayrıca kendine eşlik kavramı, sonlu boyutlu uzayda lineer dönüşümlerle benzerlikten yararlanarak tanımlanmış ve kendine eş bir matrisin özdeğerlerinin reel ve özvektörlerinin ortogonal olması özelliklerinin Teorem 3 e nasıl çevrildiği gösterilmiştir.

Giriş

Bu bölümde, matematikte spektral teorinin temelinde yatan lineer diferansiyel denklemler ve onların çözümleri üzerinde durulmuştur [1]. $\mathcal{L}^2$ uzayındaki ortogonal fonksiyon kümeleri, uygun sınır koşulları altında bazı ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemlerin çözümleri şeklinde doğal olarak ortaya çıkar. Bahsedilen türden denklemler genellikle, bu problemleri ve çözümlerinin özelliklerini inceleyen İsviçreli matematikçi Jacques Sturm

1 Alanya Alaaddin Keykubat Üniversitesi, ORCID: 0000-0002-4991-5098, akif.cetin@alanya.edu.tr

https://doi.org/10.58830/ozgur.pub81.c194

(1803-1855) ve Fransız matematikçi Joseph Liouville'den (1809-1882) sonra Sturm-Liouville sınır değer problemleri olarak anılır. Ancak bu bölüm içerisinde Sturm-Liouville problemlerine değinilmeyecektir. Burada ele alınan diferansiyel denklemler doğrudan Newton'un hareket yasalarının matematiksel modellemesi olarak, fakat daha çok Laplace denklemi, ısı denklemi ve dalga denklemi gibi fiziğin klasik kısmi diferansiyel denklemlerini çözmek için değişkenlerine ayırma metodunu kullanmanın bir sonucu olarak ortaya çıkar.

1.1 Lineer İkinci Mertebeden Denklemler

$I \subset R$ olmak üzere I aralığında verilmiş

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \tag{1.1}$$

ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemini düşünelim. Burada a_0, $_1$, a_2 ve f; I aralığı üzerinde verilmiş kompleks fonksiyonlardır. I aralığında $f = 0$ olduğu zaman denklem homojen olarak adlandırılır. Aksi takdirde denkleme homojen değildir denir. Eğer herhangi bir $\varphi \in C^2(I)$ fonksiyonu (1.1) denkleminin bir çözümü ise denklemi sağlar ve her $x \in I$ için

$$a_0(x)\varphi''(x) + a_1(x)\varphi'(x) + a_2(x)\varphi(x) = f(x)$$

yazılır. Eğer

$$a_0(x)\frac{d^2}{dx^2} + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_2(x)$$

ikinci mertebeden diferansiyel operatörünü L ile gösterirsek bu takdirde (1.1) denklemi $Ly = f$ formunda yazılabilir. Burada L operatörü lineerdir. Yani herhangi $\varphi,\ \psi \in C^2(I)$ fonksiyonları ve herhangi $c_1,\ c_2 \in C$ sabitleri için

$$L(c_1\varphi + c_2\psi) = c_1L\varphi + c_2L\psi$$

eşitliği yazılabilir. Bu yüzden (1.1) denklemi lineer diferansiyel denklem olarak adlandırılır. Aksini belirtmediğimiz sürece bu bölümdeki tüm diferansiyel denklem ve operatörler lineer olacaktır. Lineer homojen denklemlerle ilgili bir temel özellik şudur: Çözümlerin herhangi bir lineer kombinasyonu da yine bir çözümdür. Şöyle ki, eğer φ ve ψ sırasıyla

$$L\varphi = 0, \qquad L\psi = 0$$

denklemlerini sağlıyorsa bu takdirde herhangi c_1 ve $_2$ sabitleri için

$$L(c_1\varphi + c_2\psi) = c_1L\varphi + c_2L\psi = 0$$

olduğu açıktır. Bu eşitlik, süperpozisyon ilkesi olarak bilinir.

Eğer a_0 fonksiyonu I aralığında köke sahip değilse, bu durumda (1.1) denklemi a_0 a bölünerek

$$y'' + q(x)y' + r(x)y = g(x) \tag{1.2}$$

elde edilir. Burada $q = \dfrac{a_1}{a_0}$, $r = \dfrac{a_2}{a_0}$ ve $g = \dfrac{f}{a_0}$ dır. (1.1) ve (1.2) denklemlerinin denk oldukları açıktır, bu yüzden aynı çözüm kümesine sahiptirler. Bu durumda (1.1) denklemine *I* da regüler denir. Aksi takdirde eğer bir $c \in I$ için $a_0(c) = 0$ oluyorsa denkleme singüler denir ve *c* noktasına da denklemin tekil noktası adı verilir.

Lineer denklemler için varlık teklik teoremi gereğince eğer *q, r* ve *g* fonksiyonları *I* da sürekli ve x_0, *I* da bir nokta ise bu takdirde herhangi iki ξ ve η sayısı için (1.2) nin *I* da

$$\varphi(x_0) = \xi, \qquad \varphi'(x_0) = \eta \tag{1.3}$$

şartını sağlayan tek bir φ çözümü vardır. (1.3) deki denklemler başlangıç koşulları olarak adlandırılır. (1.2) ve (1.3) denklem sistemine de başlangıç değer problemi adı verilir.

$I = [a,b]$ alırsak (1.1) denkleminin çözümleri *a* ve *b* de sınır koşullarına bağlı olabilir. Bu koşullar aşağıdaki formlardan biri şeklinde olabilir.

$$\begin{array}{lll} (i) & y(c) = \xi, \quad y'(c) = \eta, & c \in \{a,b\} \\ (ii) & y(a) = \xi, \quad y(b) = \eta & \\ (iii) & y'(a) = \xi, \quad y'(b) = \eta. & \end{array}$$

Sınır koşulları (i) de olduğu gibi aynı *c* noktasında verildiğinde genellikle başlangıç koşulu olarak adlandırılır. Amacımız denkleminin tek çözümünü elde etmek olduğunda genellikle *c* noktasının *I* aralığının uç noktalarından biri olması gerekmez, *c* noktası iç noktalardan herhangi biri de olabilir. Ancak burada, çoğu fiziksel uygulamada olduğu gibi, sınır veya başlangıç koşullarını *I* aralığının uç noktalarında almayı tercih edeceğiz. $(i)-(iii)$ formundaki sınır koşulları

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) + \alpha_3 y(b) + \alpha_4 y'(b) = \xi \tag{1.4}$$

$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) + \beta_3 y(a) + \beta_4 y'(a) = \eta \tag{1.5}$$

olarak genelleştirilebilir. Burada α_i ve β_i, $\sum_{i=1}^{4} |\alpha_i| > 0$ ve $\sum_{i=1}^{4} |\beta_i| > 0$ şartlarını sağlayan sabitlerdir. Yani burada α_i ve β_i ler hepsi birden aynı anda sıfır olmayacak şekilde seçilmişlerdir. (1.1), (1.4) ve (1.5) denklem sistemine sınır değer problemi denir.

(1.4) ve (1.5) sınır koşulları $\xi = \eta = 0$ olduğunda homojen, $\alpha_3 = \alpha_4 = \beta_3 = \beta_4 = 0$ olduğunda ise ayrık olarak adlandırılır.

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \xi, \quad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \eta \tag{1.6}$$

formundaki ayrık sınır koşulları bizim için ayrı bir öneme sahiptir. (1.4) ve (1.5) deki katsayıların özel bir seçimiyle elde edilen

$$y(a) = y(b), \qquad y'(a) = y'(b) \tag{1.7}$$

biçimindeki homojen şart da bizim için önemlidir. (1.7) ifadesine periyodik sınır koşulları adı verilir. Burada periyodik sınır koşullarının ayrık olmadığını belirtelim.

1.2. Çözümlerin Kökleri

$$y'' + q(x) y' + r(x) y = 0, \qquad x \in I \tag{1.8}$$

şeklindeki bir diferansiyel denklemi, çözümlerinin özelliklerini inceleyebilmek için açık bir şekilde çözmek gerekli değildir ve zaten bu her zaman mümkün de değildir. Belirli koşullar altında, bu özellikleri tamamen denklemin parametreleri ve sınır koşulları belirler. Özellikle, bir çözümün köklerinin sayısı ve dağılımı, tekil noktaları, asimptotik davranışı ve ortogonallik özellikleri gibi niteleyici özelliklerinin tümü q ve r katsayıları ile verilen sınır koşulları tarafından belirlenir. Bu nedenle, bu katsayıların çözümün davranışı üzerindeki etkisini analiz ederek bu özelliklerden bazılarını çıkarmaya çalışabiliriz. Bu başlık altında, q ve r nin çözümlerin köklerinin dağılımına olan etkisini inceleyeceğiz. Ortogonallik de sonraki başlık altında ele alınacaktır.

Burada aşağıdaki Lemma'yı vermeden önce bir tanımdan bahsedelim: $f : I \to C$ fonksiyonu bir $x_0 \in I$ noktası için eğer $f(x_0) = 0$ ve x_0 ın bir U komşuluğundaki tüm $x \in I \cap U \setminus \{x_0\}$ için $f(x) \neq 0$ şartlarını sağlıyorsa x_0 a bu fonksiyonun izole kökü denir.

Lemma 1. Eğer y, (1.8) homojen denkleminin aşikar olmayan bir çözümü ise bu takdirde y nin kökleri I da izoledir.

İspat: y, (1.8) in bir çözümü olmak üzere $y(x_0) = 0$ olduğunu kabul edelim. Eğer $y'(x_0) = 0$ ise bu takdirde teklik teoremine göre y özdeş olarak sıfırdır. Eğer $y'(x_0) \neq 0$ ise bu takdirde, y', I da sürekli olduğundan, x_0 ın bir U komşuluğu vardır ki burada $U \cap I$ üzerinde $y' \neq 0$ dır. Sonuç olarak $U \cap I$ üzerinde y, ya kesin olarak artan ya da kesin olarak azalandır.

Teorem 1. (Sturm Ayırma Teoremi) Eğer y_1 ve y_2

$$y''+q(x)y'+r(x)y=0, \qquad x\in I$$

denkleminin lineer bağımsız çözümleri ise bu takdirde y_1 in kökleri y_2 nin köklerinden farklıdır. Ayrıca y_1 ve y_2 nin köklerinin oluşturduğu diziler birbirini takip eder yani y_1, y_2 nin ardışık herhangi iki kökü arasında tam olarak bir köke sahiptir ve aynı şekilde bunun tam tersi de doğrudur.

İspat: y_1 ve y_2 lineer bağımsız olduğundan

$$W(y_1,y_2)(x)=y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x)$$

Wronskian determinantı sıfır olmaz ve bu yüzden I da bir işarete sahiptir. Öncelikle y_1 ve y_2 nin ortak bir kökünün olamayacağını belirtelim, aksi takdirde W, o noktada sıfır olurdu. Kabul edelim ki x_1 ve x_2, y_2 nin ardışık iki kökü olsun. Bu takdirde

$$W(x_1)=y_1(x_1)y_2'(x_1)\neq 0$$
$$W(x_2)=y_1(x_2)y_2'(x_2)\neq 0$$

olur ve $y_1(x_1)$, $y_1(x_2)$, $y_2'(x_1)$ ve $y_2'(x_2)$ sayılarının tamamı sıfırdan farklıdır. y_2', I da sürekli olduğundan, x_1 bir U_1 komşuluğuna sahiptir ve bu komşulukta y_2' işaret değiştirmez. Benzer olarak x_2 nin bir U_2 komşuluğu vardır ve bu komşulukta da y_2' işaret değiştirmez. Fakat y_2' in $U_1\cap I$ ve $U_2\cap I$ daki işaretleri aynı kalmaz, çünkü eğer y_2 bunlardan birinde artansa bu takdirde diğerinde azalan olmak zorundadır. $W(x)$ in I da sabit bir işarete sahip olması için, $y_1(x_1)$ ve $y_2(x_2)$ nin zıt işaretlere sahip olması gerekir. Bu yüzden y_1, sürekli olmasından dolayı, x_1 ve x_2 arasında en az bir köke sahiptir. Fakat böyle bir kök birden fazla olamaz. Çünkü eğer x_3 ve x_4, y_1 in x_1 ve x_2 arasında kalan iki kökü olursa bu takdirde benzer mantıkla y_2 nin x_3 ve x_4 arasında kökünün olduğu sonucuna varırız. Ancak bu durum x_1 ve x_2 nin y_2 nin ardışık kökleri olmasıyla çelişir.

Sonuç 1. Eğer $y''+q(x)y'+r(x)y=0$ denkleminin iki çözümünün I da ortak bir kökü varsa bu takdirde bu çözümler lineer bağımlıdır.

(1.8) denkleminin köklerinin dağılımını incelemek için ortadaki terim olan qy' ifadesinden kurtulup denklemi

$$u''+\rho(x)u=0 \tag{1.9}$$

şekline dönüştürürsek bizim için çok daha uygun olacaktır. Bunun için

$$y(x)=u(x)v(x)$$

dersek

$$y'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$
$$y''(x)=u''(x)v(x)+2u'(x)v'(x)+u(x)v''(x)$$

olur. Bu türevleri denkleminde yerine yazarsak

$$vu''+(2v'+qv)u'+(v''+qv'+rv)u=0$$

şeklini alır. O halde $2v'+qv=0$ seçerek (1.9) u elde ederiz. Burada

$$v(x)=\exp\left(-\frac{1}{2}\int q(t)\,dt\right) \tag{1.10}$$

ve

$$\rho(x)=r(x)-\frac{1}{4}q^2(x)-\frac{1}{2}q'(x)$$

olur. v üstel fonksiyonu R de asla köke sahip değildir. Bu yüzden u nun kökleri y nin köklerine karşılık gelmiş olur. Böylece (1.8) denkleminin köklerinin dağılımını incelemek amacıyla dikkatimizi (1.9) denklemine çevirebiliriz.

Teorem 2. (Sturm Karşılaştırma Teoremi) φ ve ψ sırasıyla

$$y''+r_1(x)y=0$$
$$u''+r_2(x)u=0, \qquad x\in I$$

denklemlerinin aşikar olmayan çözümleri olsun ve ayrıca her $x\in I$ için $r_1(x)\geq r_2(x)$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde $r_1(x)\equiv r_2(x)$ ve φ, ψ ın bir sabit katı olmadığı sürece, φ, ψ ın ardışık her iki kökünün arasında en az bir köke sahiptir.

İspat: x_1 ve x_2, I da ψ ın ardışık iki kökü olsun ve φ nin (x_1,x_2) açık aralığında kökünün olmadığını kabul edelim. φ ve ψ ın her ikisinin de (x_1,x_2) üzerinde pozitif olduğunu kabul edelim. Aksi takdirde negatif fonksiyonun işaretini değiştiririz. φ' ve ψ' sürekli olduğundan $\varphi'(x_1)\geq 0$ ve $\psi'(x_2)\leq 0$ dır ve bu yüzden φ ve ψ ın Wronskian determinantları

$$W(x_1)=\varphi(x_1)\psi'(x_1)\geq 0, \qquad W(x_2)=\varphi(x_2)\psi'(x_2)\leq 0 \tag{1.11}$$

şartını sağlar. Fakat her $x\in(x_1,x_2)$ için

$$W'(x)=\varphi(x)\psi''(x)-\varphi''(x)\psi(x)$$
$$=\left[r_1(x)-r_2(x)\right]\varphi(x)\psi(x)\geq 0$$

olduğundan W, (x_1, x_2) de artan bir fonksiyondur. Fakat bu, (1.11) denklemiyle çelişir. Bu çelişkinin olmaması için $r_1(x) - r_2(x) \equiv 0$ ve $W(x) \equiv 0$ olmalıdır ki bu durumda da φ ve ψ lineer bağımlı olacaklardır.

Sonuç 2. φ, I da $y'' + r(x)y = 0$ denkleminin aşikar olmayan bir çözümü olsun. Eğer $r(x) \leq 0$ ise bu takdirde φ, I da en fazla bir köke sahiptir.

İspat: Eğer φ, I da x_1 ve ${}_2$ gibi iki köke sahipse bu takdirde Teorem 2 den $u'' = 0$ ın $\psi(x) = 1$ çözümünün (x_1, x_2) de köke sahip olması gerekir ki bu imkansızdır.

Eğer

$$y'' + r(x)y = 0, \qquad x \in I \tag{1.12}$$

denkleminin bir aşikar olmayan çözümü sonsuz sayıda köke sahipse bu durumda denkleme salınımlı denir. Teorem 2 ye göre bu denklemin salınımlı çözümlere sahip olup olmadığı r fonksiyonuna bağlıdır. Eğer $r(x) \leq 0$ ise Sonuç 2 den dolayı çözümler salınım yapmaz. Fakat, eğer bazı pozitif k sabitleri için

$$r(x) > k^2 > 0, \qquad x \in I$$

ise bu takdirde (1.12) nin I daki herhangi bir çözümü, $y'' + k^2 y = 0$ ın herhangi bir çözümünün, örneğin $a \sin k(x - b)$ gibi, köklerinin arasına dağılan sonsuz sayıda köke sahiptir ki bu kökler

$$x_n = b + \frac{n\pi}{k}$$

olarak verilir. Bu yüzden I nın, uzunluğu $\frac{\pi}{k}$ olan tüm alt aralıkları denkleminin en az bir köküne sahiptir ve k arttıkça köklerin sayısının da artmasını bekleriz. Elbette bu, r nin sabit olduğu durumdur.

Sturm Ayırma Teoremi'nden çıkarabileceğimiz diğer bir sonuç da şudur: Eğer I aralığı sonsuz ve

$$y'' + q(x)y' + r(x)y = 0$$

denkleminin bir çözümü salınımlıysa bu takdirde tüm çözümleri salınımlıdır.

1.3. Kendine Eş Diferansiyel Operatör

Genel formda yazılmış lineer ikinci mertebeden (1.1) diferansiyel denklemine biraz değiştirilmiş bir gösterimle geri dönüp

$$p(x)y''+q(x)y'+r(x)y=0 \tag{1.13}$$

denklemini göz önüne alalım. Şimdi, bu denklemin çözümlerinin ortogonallik özelliklerini araştırmak istiyoruz. Bu, doğal olarak, $\mathcal{L}^2$ de bulunan (1.13) ün C^2 deki çözümlerini aramamız gerektiği anlamına gelir. (1.13) denklemini

$$L=p(x)\frac{d^2}{dx^2}+q(x)\frac{d}{dx}+r(x) \tag{1.14}$$

ikinci mertebeden bir lineer diferansiyel operatör olmak üzere

$$Ly=0$$

biçiminde yazabiliriz. Burada y, $\mathcal{L}^2(I)\cap C^2(I)$ lineer vektör uzayındandır.

Kendine eş matrislerin bilinen özelliklerini $\mathcal{L}^2$ uzayına genişletmek için yapacağımız ilk iş, (1.14) operatörüyle tanımlanmış olan

$$L:\mathcal{L}^2(I)\cap C^2(I)\to\mathcal{L}^2(I)$$

operatörünün eşleniğinin formunu elde etmektir. Burada bu işe başlarken *p, q* ve *r* nin *I* da C^2 den olduklarını kabul ediyoruz. *I* kapalı ve sınırlı bir aralık olduğunda $C^2(I)\cap\mathcal{L}^2(I)=C^2(I)$ olduğunu belirtelim. L nin eşleniğini L' ile gösterirsek, L' nün bilinen tanımından, her $f,\ g\in C^2(I)\cap\mathcal{L}^2(I)$ için

$$\langle Lf,g\rangle=\langle f,L'g\rangle \tag{1.15}$$

elde ederiz. $I=(a,b)$ diyelim, burada *I* aralığı sonlu ya da sonsuz olabilir ve (1.15) in sol yanındaki diferansiyel operatörü *f* den *g* ye kaydırabilmek için kısmi integrasyon yöntemini kullanalım. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\langle Lf,g\rangle&=\int_a^b\left(pf''+qf'+rf\right)\overline{g}dx\\
&=p\overline{g}f'\Big|_a^b-\int_a^b f'\left(p\overline{g}\right)'dx+q\overline{g}f\Big|_a^b-\int_a^b f\left(q\overline{g}\right)'dx+\int_a^b fr\overline{g}dx\\
&=\left[p\overline{g}f'-f\left(p\overline{g}\right)'\right]\Big|_a^b+\int_a^b f\left(p\overline{g}\right)''dx+q\overline{g}f\Big|_a^b-\int_a^b f\left(q\overline{g}\right)'dx+\int_a^b fr\overline{g}dx\\
&=\left\langle f,\left(\overline{p}g\right)''-\left(\overline{q}g\right)'+\overline{r}g\right\rangle+\left[p\left(\overline{g}f'-\overline{g}'f\right)+\left(q-p'\right)\overline{g}f\right]\Big|_a^b\end{aligned}$$

yazılır. Eğer (a,b) aralığı sonsuzsa veya integrallerden herhangi biri *a* ya da *b* de sınırsızsa bu takdirde buradaki integraller genelleştirilmiş integraller olarak düşünülür. Eğer $p \in C^2(a,b),\ q \in C^1(a,b)$ ve $r \in C(a,b)$ ise bu takdirde yukarıdaki denklemin sağ yanının iyi tanımlı olduğunu belirtelim. Ayrıca yukardaki denklemin sağ yanındaki son terim *a* ve *b* sınırları arasındaki fark olarak yorumlanmalıdır. Bu yüzden her $f,\ g \in \mathcal{L}^2(I) \cap C^2(I)$ için

$$\langle Lf, g\rangle = \langle f, L^* g\rangle + \left[p\left(\overline{g}f' - \overline{g}'f\right) + \left(q - p'\right)\overline{g}f\right]\Big|_a^b \tag{1.16}$$

ifadesini elde ederiz. Burada

$$\begin{aligned} L^* g &= \left(\overline{p}g\right)'' - \left(\overline{q}g\right)' + \overline{r}g \\ &= \overline{p}g'' + \left(2\overline{p}' - \overline{q}\right)g' + \left(\overline{p}'' - \overline{q}' + \overline{r}\right)g \end{aligned}$$

şeklindedir.

$$L^* = \overline{p}\frac{d^2}{dx^2} + \left(2\overline{p}' - \overline{q}\right)\frac{d}{dx} + \left(\overline{p}'' - \overline{q}' + \overline{r}\right)$$

operatörüne *L* nin biçimsel eşleniği denir. Eğer $L^* = L$ oluyorsa, yani

$$\overline{p} = p, \quad 2\overline{p}' - \overline{q} = q, \quad \overline{p}'' - \overline{q}' + \overline{r} = r$$

oluyorsa, *L* ye biçimsel kendine eş denir. Bu son üç denklemin sağlanabilmesi için gerek ve yeter koşul *p, q* ve *r* fonksiyonlarının reel ve $q = p'$ olması gerekir. Bu durumda

$$\begin{aligned} Lf &= pf'' + p'f' + rf \\ &= \left(pf'\right)' + rf \end{aligned}$$

olur. Bu yüzden *L* biçimsel kendine eş olduğunda

$$L = \frac{d}{dx}\left(p\frac{d}{dx}\right) + r$$

formundadır ve denklemi

$$\langle Lf, g\rangle = \langle f, Lg\rangle + p\left(\overline{g}f' - \overline{g}'f\right)\Big|_a^b \tag{1.17}$$

biçimine indirgenir. (1.15) ve (1.17) denklemlerini kıyaslarsak, her $f,\ g \in C^2(I) \cap \mathcal{L}^2(I)$ için

$$p\left(\overline{g}f' - \overline{g}'f\right)\Big|_a^b = 0 \tag{1.18}$$

ise biçimsel kendine eş olan L operatörünün kendine eş olduğunu görürüz. Bu noktada $q = p'$ olduğunda L^* ifadesindeki $\overline{p}'' - \overline{q}'$ teriminin ortadan kalktığına, dolayısıyla p'' ve q' nin sürekliliğinin artık gerekli olmadığına dikkat etmek önemlidir.

Şimdi $-L$ operatörü için özdeğer problemiyle yani

$$Lu + \quad u = 0 \tag{1.19}$$

denkleminin çözümleriyle ilgileneceğiz. $u = 0$ olduğunda bu denklem elbette λ nın tüm değerleri için sağlanacaktır. $u \neq 0$ olduğunda ise λ nın belli değerleri için sağlanabilir. Bu λ değerleri de $-L$ nin özdeğerleridir. $C^2 \cap \mathcal{L}^2$ de bazı λ kompleks sayıları için (1.19) denklemini sağlayan herhangi bir $u \neq 0$ fonksiyonuna $-L$ nin λ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonu denir. Burada $-L$ nin özdeğerleri ve özfonksiyonları derken aynı zamanda (1.19) denkleminin özdeğer ve özfonksiyonlarından bahsetmiş oluyoruz. Bu denklem homojen olduğu için $-L$ nin özfonksiyonları bir çarpımsal sabite kadar belirlenir. (1.19) denklemine uygun sınır koşulları eklendiğinde elde edilen sisteme Sturm-Liouville özdeğer problemi adı verilir. Açıkça, $-L$ nin (biçimsel) kendine eş olması için gerek ve yeter şart L nin (biçimsel) kendine eş olmasıdır diyebiliriz. Anlaşıldığı üzere L yerine $-L$ nin özdeğerlerini aramamızın nedeni, p pozitif olduğunda L nin negatif özdeğerlere sahip olmasıdır. Aşağıdaki teorem şimdiye kadar elde ettiğimiz sonuçları özetlemektedir. Yukarıda bahsedilenler, (i) ve (ii) özelliklerinin sonlu boyutlu uzaydan sonsuz boyutlu $\mathcal{L}^2 \cap C^2$ uzayına genelleştirilmesidir.

Teorem 3. $L : \mathcal{L}^2(a,b) \cap C^2(a,b) \to \mathcal{L}^2(a,b)$,

$$Lu = p(x)u'' + q(x)u' + r(x)u, \quad x \in (a,b)$$

biçiminde tanımlanan ikinci mertebeden bir lineer diferansiyel operatör olsun. Burada $p \in C^2(a,b)$, $q \in C^1(a,b)$ ve $r \in (a,b)$ dir. Bu takdirde

(i) Eğer p, q ve r katsayıları reel ve $q \equiv p'$ ise L biçimsel kendine eştir yani $L^* = L$ dir.

(ii) Eğer L biçimsel kendine eş ve denklemi sağlanıyorsa L kendine eştir yani $L' = L$ dir.

(iii) Eğer L kendine eş ise bu takdirde

$$Lu + \lambda u = 0$$

denkleminin özdeğerlerinin tamamı reeldir ve farklı özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyon çifti $\mathcal{L}^2(a,b)$ de ortogonaldir.

İspat: (*i*) ve (*ii*) ifadelerini daha önceden ispatlamıştık. (*iii*) ifadesini ispatlayabilmek için $\lambda \in C$ nin $-L$ nin bir özdeğeri olduğunu kabul edelim. Bu takdirde öyle bir $f \in \mathcal{L}^2(a,b) \cap C^2(a,b)$, $f \neq 0$ fonksiyonu vardır ki

$$Lf + \lambda f = 0$$
$$\Rightarrow \lambda \|f\|^2 = \langle \lambda f, f \rangle = -\langle Lf, f \rangle$$

olur. L kendine eş olduğundan

$$-\langle Lf, f \rangle = -\langle f, Lf \rangle = \langle f, \lambda f \rangle = \bar{\lambda} \|f\|^2$$

yazılır. Bu yüzden $\bar{\lambda}\|f\|^2 = \lambda \|f\|^2$ dir. $\|f\| \neq 0$ olduğundan $\bar{\lambda} = \lambda$ dır.

Eğer μ, $-L$ nin $g \in \mathcal{L}^2(a,b) \cap C^2(a,b)$ özfonksiyonuyla ilişkili başka bir özdeğeri ise bu takdirde

$$\lambda \langle f, g \rangle = -\langle Lf, g \rangle = -\langle f, Lg \rangle = \mu \langle f, g \rangle$$
$$(\lambda - \mu)\langle f, g \rangle = 0$$
$$\lambda \neq \mu \Rightarrow \langle f, g \rangle = 0$$

olduğu görülür.

Hatırlatma 1. Daha önce belirtildiği gibi, L için verilen ifade de $q = p'$ olduğunda, bu teoremin sonuçları p' ifadesinin sürekli olması şeklindeki daha zayıf gereksinim altında geçerlidir.

Şimdi Teorem 3 ün (*iii*) kısmını biçimsel kendine eş olmayan diferansiyel operatörlere genelleştireceğiz. Eğer $Lu = pu'' + qu' + ru$ ise, burada $p > 0$ ve $q \neq p'$ dir,

$$Lu + \lambda u = 0$$

özdeğer denklemi, *c* bir sabit olmak üzere

$$\rho(x) = \frac{c}{p(x)} \exp\left(\int_a^x \frac{q(t)}{p(t)} dt \right) \tag{1.20}$$

biçiminde tanımlanan pozitif ρ fonksiyonuyla çarpılabilir. Böylece

$$\rho L u + \lambda \rho u = 0 \tag{1.21}$$

denklemini elde ederiz. Şimdi burada ρL biçimsel kendine eştir. $\rho > 0$ olmak üzere (1.18) denklemi

$$\rho p\left(\overline{g}f' - \overline{g}'f\right)\Big|_a^b = 0$$

denklemine denktir. Bu, ρL operatörünü kendine eş yapar. Eğer $u \in \mathcal{L}^2$, L nin λ özdeğerine karşılık gelen bir özfonksiyonu ise

$$\begin{aligned}\lambda\|u\|_\rho^2 &= \langle \lambda\rho u, u\rangle \\ &= \langle -\rho L u, u\rangle \\ &= \langle u, -\rho L u\rangle \\ &= \langle u, \lambda\rho u\rangle \\ &= \overline{\lambda}\|u\|_\rho^2\end{aligned}$$

yazılır ki bu da λ nın bir reel sayı olduğu anlamına gelir. Üstelik $v \in \mathcal{L}_\rho^2$, L nin μ özdeğerine karşılık gelen başka bir öz fonksiyonu ise bu takdirde ρL kendine eş olduğundan

$$\begin{aligned}(\lambda - \mu)\langle u, v\rangle_\rho &= \lambda\langle \rho u, v\rangle - \mu\langle \rho u, v\rangle \\ &= \langle \lambda\rho u, v\rangle - \langle u, \mu\rho v\rangle \\ &= \langle -\rho L u, v\rangle - \langle u, -\rho L v\rangle = 0\end{aligned}$$

yazılır. Bu yüzden eğer $\lambda \neq \mu$ ise $\mathcal{L}_\rho^2$ uzayında u, v ye ortogonaldir.

Böylece Teorem 3 ün (*iii*) kısmının aşağıdaki genişletmesini ispatlamış olduk.

Sonuç 3. Eğer $L : \mathcal{L}^2(a,b) \cap C^2(a,b) \to \mathcal{L}^2(a,b)$, kendine eş bir lineer operatör ve ρ, $[a,b]$ üzerinde pozitif ve sürekli bir fonksiyon ise bu takdirde

$$Lu + \lambda\rho u = 0$$

denkleminin özdeğerlerinin tamamı reeldir ve farklı özdeğerlere karşılık gelen herhangi bir özfonksiyon çifti $\mathcal{L}_\rho^2(a,b)$ de ortogonaldir.

Hatırlatma 2.

1. Sonuç 3 de bahsedilen $Lu+\lambda\rho u=0$ denkleminin özdeğerleri ve özfonksiyonları aslında $-g^{-1}L$ operatörünün özdeğerleri ve özfonksiyonlarıdır.

2. (a,b) aralığının sonlu olduğunu kabul edelim. ρ ağırlık fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sürekli ve pozitif olduğundan, ρ nun minimum değeri α ve maksimum değeri β olmak üzere

$$0<\alpha\leq\rho(x)\leq\beta<\infty$$

olur. Bu da

$$\sqrt{\alpha}\,\|u\|\leq\|u\|_{\rho}\leq\sqrt{\beta}\,\|u\|$$

anlamına gelir ve bu yüzden $\|u\|_{\rho}<\infty$ olması için gerek ve yeter şart $\|u\|<\infty$ olmasıdır. Bu iki norma denktir denir ve $\mathcal{L}_{\rho}^{2}(a,b)$ ve $\mathcal{L}^{2}(a,b)$ uzayları farklı iç çarpımlara sahip olmalarına rağmen açıkça aynı fonksiyonları içerirler.

3. Bu sonucun ispatındaki hiçbir şey L nin ikinci mertebeden diferansiyel operatör olmasını gerektirmez. Aslında sonuç, bir iç çarpım uzayında kendine eş herhangi bir lineer operatör için doğrudur.

KAYNAKLAR

Al-Gwaiz, M. A. (2008). *Sturm-Liouville Theory and its Applications.* Springer – Verlag London Limited.