Bölüm 9

# Mühendislik Fakültesi Öğrencilerinin Limit Konusundaki Temel Bilgi Düzeyleri

**Aya Alebo**[1]

**Çiğdem İnci Kuzu**[2]

**Özet**

Mühendislik, matematiğin uygulama alanlarından biri olup; matematiği, teknik bilimleri ve sosyal bilimleri kullanarak yeni ürünler oluşturmaya yönelik bir uygulama süreci olarak değerlendirilmektedir. Bu çalışmanın amacı, mühendislik fakültesi öğrencilerinin soyut buldukları ve anlamakta güçlük çektikleri analizin temel konularından biri olan limit konusundaki kavram yanılgıları limit hakkındaki bilgi düzeylerini derinlemesine inmeden genel olarak incelemektir. Çalışmanın katılımcılarını, Batı Karadeniz'de bir Üniversitenin Mühendislik Fakültesi'nin bilgisayar, makine ve elektronik mühendisliği bölümlerinde öğrenim görmekte olan 50 ikinci sınıf öğrencisi oluşturmaktadır. Çalışmadaki veriler, mühendislik fakültesi öğrencilerine sorulan 3 sorudan elde edilmiştir. Veri toplama aracı, mühendislik fakültesinde okutulan genel matematik ders içeriğinde yer alan temel analiz konularında edindikleri temel bilgilerden yola çıkılarak hazırlanmıştır. Çalışma nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışmasıdır. Çalışma bulgularına göre, mühendislik fakültesi öğrencilerinin limit kavramını yalnızca üstünkörü bir şekilde kavradıklarını ve tanımların içeriğini tam anlamıyla bütünleştiremediklerini göstermiştir. Bu nedenle türev, limit ve süreklilik kavramları arasındaki ilişkileri yorumlamaya çalışırken zorlandıkları ve bu ilişkilerin doğası hakkında çok fazla bilgiye sahip olmadıkları belirlenmiştir.

## 1. Giriş

Matematik eğitiminin amaçlarından biri, öğrencilerin matematiksel kavramları öğrenmeyi en üst düzeyde gerçekleştirmeleridir. Fakat bunu gerçekleştirebilen öğrenci sayısının az olmasıyla birlikte öğrencilerin büyük

1 Karabük Üniversitesi, kaanyusuf629@gmail.com, 0009-0008-9242-5650

2 Karabük Üniversitesi, cigdemkuzu@karabuk.edu.tr, 0000-0003-0143-2473

https://doi.org/10.58830/ozgur.pub568.c2388

bir çoğunluğunun matematiği zor olarak algılaması, yaşamın bir gerçeği olarak görülmektedir (Tall & Razali, 1993). Matematiksel kavramların soyut yapısı düşünüldüğünde, kavramların tam anlamıyla öğrenilemediği görülmektedir. Matematiksel kavramların öğrenimi sırasında yaşanan güçlükler, matematik öğrenimi ve öğretiminin zor olarak algılanmasına sebep olmaktadır. Bu yönüyle öğrencilerin matematik alanındaki öğrenme güçlüklerinin tespit edilip giderilmesi gerekmektedir (Suraweera, 2002). Matematik alanında, kavramayı geliştirmenin önemli fakat güç bir hedef olduğunu ifade ederek; öğrencilerin matematikteki öğrenme güçlüklerini ve bu güçlüklerin kaynağını bilmenin, onları gidermek için öğretim yöntemi tasarlamanın, bu hedefe ulaşmada önemli bir adım olduğunu belirtmek gerekir (Pape, Bell, & Yetkin, 2003). Herhangi bir konuda öğrenme güçlüğü yaşayan bir öğrencinin, gelecek konularda başarıya ulaşması zordur (Dikici & İşleyen, 2004). Matematik konuları, diğer derslere göre daha güçlü ve sıralı bir yapıya sahip olduğu için herhangi bir kavram, matematiğin ön şartı durumundaki diğer kavramlar kavranmadan tam olarak kavranamaz (Altun, 2003).

Analiz, matematiksel olarak anlaşılması ve anlamlandırılması zor olan konulardan oluşan ve öğrenciler için yüksek düşünme becerileri gerektiren alanların başında gelmektedir. Analiz alan olarak, birçok ülkede olduğu gibi Türkiye'de de ilk olarak lise öğrencilerinin karşısına çıkmaktadır (Bingolbali & Monaghan, 2008). Konu olarak matematiğin değişen hızlarla ilgili bölümünü ele alan, genel matematik dersleri içerisinde bulunan analiz; mühendislik, tıp, ekonomi, iktisat, fen bilimleri ve matematik bölümlerinde okutulan derslerden biridir (Işık & Bekdemir, 1998). Türkiye'de ve birçok ülkede ortaöğretim öğrencilerine yönelik matematik programlarında matematiksel olarak anlaşılması ve işlenmesi güç olarak algılanan, öğrencilerde büyük düşünme becerisi gerektiren kavramlardan oluşan analiz dersi işlenmektedir (Yapıcıoğlu Ulaş, 2019). Matematik, fen ve mühendislikte büyük önem taşıyan analiz konusu; ileri matematikte ilk adım olarak karşımıza çıkmaktadır. Matematik, mühendisliğin dili olarak tanımlanır ve mühendislik fakültelerindeki bölümlerinin ilk yıllarında genel matematik, diferansiyel denklemler, lineer cebir gibi dersler programlarda yer almaktadırlar. Mühendisler, matematiği, teknolojiyi ve bilimi iyi bilen; bu bilgileri, hayatta önlerine çıkan problemlere çözüm üretmek amacıyla kullanabilen kişiler olarak tanımlanabilmektedirler. Mühendislik eğitiminde matematiğin önemli bir yeri olduğu kabul görürken, nasıl ve ne kadar öğretilmesi gerektiği ile ilgili tartışmalar yıllardır devam ederken belli bir kesim tarafından, mühendislik fakültesi öğrencilerinin matematik bilgilerinin yeterli olmadığını düşünmektedir (Güner & Çomak, 2011). Limit kavramı türev, integral, süreklilik gibi pek çok önemli kavramla ilişkisi nedeniyle analizin en temel kavramları arasında yer almaktadır (Cornu, 1991). Genel matematik ders içeriğinde limit konusundan sonra süreklilik, türev ve integral kavramları mevcuttur. Limit kavramı; Matematiğin birçok kavramı gibi hayatla içinden ve diğer alanlarla sıkı ilişki içerisindedir. Bu bağlamda limitin öğrenciler tarafından kavranması önem taşımaktadır (Alkan ve Güven, 2018).

## 2. Limit Kavramı

Limit, değişik nicelikler arasındaki fonksiyonel bağıntının belli olduğu durumlarda, birbirine bağlı büyüklüklerden birinin belli bir değere yaklaşması halinde, diğerinin hangi değere yaklaşacağının incelenmesi durumudur. Kısacası limit, "bir fonksiyondaki değişkenin yaklaştığı bir değere karşılık, fonksiyonun yaklaşabildiği değer olarak" tanımlanmaktadır. Limit kavramı informal ve formal (ε-δ) olmak üzere iki farklı şekilde tanımlanabilir;

*"Limitin informal tanımı: $f$ fonksiyonu x'in a komşuluğunda tanımlı bir fonksiyonu olmak üzere, x sağdan ve soldan a'ya yaklaşırken $f(x)$ de b gibi bir sayıya yaklaşıyorsa "x, a'ya yaklaşıyorken $f(x)$'in limiti b'dir denir ve $\lim_{x \to a} f(x) = b$ şeklinde gösterilir."*

*"Limitin formal tanımı: Verilen her $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için öyle bir δ>0 sayısı bulunabilirse ki $0 < |x-a| < \delta$ olduğunda $|f(x)-b| < \varepsilon$ oluyorsa, f fonksiyonunun a noktasındaki limiti b'dir denir."* (Karadüz, 2009).

Literatüre bakıldığında limit kavramıyla ilgili birçok araştırma yapıldığı görülmektedir. Ünver, Çelik ve Güzel (2020), çalışmalarında; limitte sınır gerektiren durumlarla baş etme mekanizmalarını değerlendirmeyi ve yanlış anlamaları belirlemeyi amaçlamışlardır. Öğrencilerin limit kavramını yanlış anlamalar veya alan bilgisi eksiklikleri nedeniyle, hata yaptıklarını belirlemişlerdir. Yitmez, Yılmaz ve Dinçer (2022), çalışmalarında; öğretmen adaylarının, çok değişkenli fonksiyonların limit ve sürekliliğine ilişkin kavram yanılgılarını incelemişlerdir. Araştırmanın bulgularına dayanarak "Tek değişkenli fonksiyonlarda limit ve süreklilik ile, çok değişkenli fonksiyonlarda limit ve süreklilik konularını birleştirerek kavramlar arasında bağlantı kurmak ve ders aşamasında çeşitli konu temsillerine yer vermek konunun, farklı öğrenme becerilerine sahip öğrenciler tarafından daha net anlaşılmasını sağlayacaktır." önerilerinde bulunmuşlardır. Turan (2016); çalışmasında, 2014-2015 yılı matematik öğretmeni adaylarının limit, süreklilik ve türev ile ilgili kavramsal yapı anlayışlarını incelemiştir. Çalışmadaki genel bulgular dikkate alındığında; limit, süreklilik ve türev konularının her birinin öncelikle kendi içindeki kavramlarla ilişkilendirildiği, daha sonrasında birbirleriyle ilişkilendirildiği görülmüştür.

Araştırmanın problem cümlesi; "Mühendislik fakültesi öğrencilerine Genel Matematik I dersi içeriğinde verilen limit kavramının en genel haliyle mühendis adayları tarafından anlaşılma düzeyleri nedir?" olarak belirlenmiştir. Bu amaç doğrultusunda mühendis adaylarına limit konusuna ilişkin genel 3 soru sorulmuştur.

## 3. Yöntem

Mühendislik fakültesi öğrencilerinin analizin temel konularından biri olan limit hakkındaki kavram yanılgılarını ortaya koymayı amaçlayan bu çalışma, bir durum çalışmasıdır. Cohen, Manion ve Morrison (2007) durum çalışmasını; gerçek durumlarda izlenimleri görmede ve neden-sonuç adı altındaki izlenimleri kararlaştırmada etkili bir sistem olarak belirtmektedirler. Çalışmanın katılımcılarını Batı Karadeniz'de bir Üniversitenin Mühendislik Fakültesi'nin bilgisayar, makine ve elektronik bölümlerinde öğrenim görmekte olan (50) 2. Sınıf öğrencisi oluşturmaktadır. Araştırmada katılımcıların limit konusundaki bilgi birikim süreçlerinin değerlendirilmesi amaçlanmıştır. Çalışmaya gönüllü olarak katılan öğrencilerin isimleri gizli tutulup, Ö1, Ö2…. Ö50 şeklindeki kodlarla belirtilmiştir. Çalışma içerisinde, mühendislik adı altında farklı bölümlerden öğrencilerin tercih edilmesiyle, çalışma örneklerine çeşitlilik katılması planlanmıştır. Araştırmaya katılan öğrencilerin 20'si makine mühendisliği, 15'i bilgisayar mühendisliği ve 15'i elektronik mühendisliği bölümü öğrencisidir.

Çalışmada veriler; mühendislik fakültesi öğrencilerine uygulanan 3 soruluk yazılı sınavdan elde edilmiştir. Uygulanan yazılı sınav soruları, iki matematik eğitimi uzmanı ve alanında uzman iki öğretim üyesi tarafından incelenmiş ve onaylanmıştır. Sınav, mühendislik fakültelerinin 2. sınıf matematik ders içeriklerinde yer alan limit konusundaki en temel bilgilerden yola çıkılarak hazırlanmıştır. Çalışmaya, öğrencilerin kısa süre içerisinde hızlı bir şekilde yanıtlayamayacakları, yorumlama ve düşünme yeteneği gerektiren sorular dâhil edilmiştir.

***Tablo 1. Veri toplama aracındaki soruların amaçları***

| Soru | Amaç |
|---|---|
| 1.soru | Öğrencilerin limit ile süreklilik arasındaki geçişe dikkat edip etmediklerini ölçmek. "Sürekli her fonksiyon o noktada limite sahip iken tersinin geçerli olmadığı" bilgisini ölçmek. |
| 2.soru | Burada paydası 0 olan limitlerde sonucun reel sayı olabilmesi için 0/0 belirsizliği gereği payında 0 alınması gerektiğinin bilincinde olup olmadığını ölçmek. |
| 3.soru | Öğrencinin limitteki ince detaylar hakkındaki bilgisini ölçmek. |

Yazılı sınavlardan elde edilen veriler; cevabı doğru olanlar, cevabı kısmen doğru olanlar, cevabı yanlış olanlar ve cevabı boş bırakanlar şeklinde dört temel kategoride sınıflandırılmıştır.

***Tablo 2. Yazılı sınav değerlendirme kategorileri***

| | |
|---|---|
| **Cevabı doğru olanlar** | Geçerli cevabın tüm elementlerini içeren cevaplar verenler. |
| **Cevabı kısmen doğru olanlar** | Geçerli cevabın elementlerinden en az birini içeren fakat hepsini içermeyen cevaplar verenler. |
| **Cevabı yanlış olanlar** | Geçerli cevapla alakasız bilgiler içeren, yanlış ya da mantıksız cevap verenler. |
| **Cevabı boş bırakanlar** | Cevabı boş bırakanlar. |

## 4. Bulgular

Araştırmanın Birinci sorusu olan "Limit ile süreklilik arasında bağlantı var mı? yorumlayınız." sorusuna ait bulgular aşağıda sunulmuştur.

Mühendislik fakültesi öğrencilerinin araştırmanın 1. sorusuna verdikleri doğru cevapların öğrencilere göre dağılımları Tabloda verilmiştir.

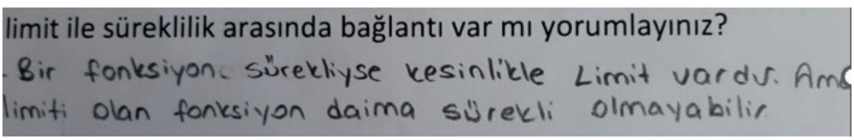
Tablo incelendiğinde 17 mühendislik fakültesi öğrencisinin limit ile süreklilik arasında bağlantı olduğunu "Sürekliyse mutlaka limit vardır." şeklinde bir açıklama yaptığı, 7 öğrencinin "Limit olmadan süreklilik aranmaz." Şeklinde bir açıklama yaptığı, 5 öğrenicinde "Her limit sürekli olmak zorunda değil." Şeklinde bir açıklama yaptığı, 3 öğrenicinde "$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$" Şeklinde bir açıklama yaptığı, 2 öğrenicinin "Süreklilik limite yaklaşımı ifade eder." şeklinde bir açıklama yaptığı ve 2 öğrencinin de "Limit varsa sürekli olmak zorunda değil." Şeklinde bir açıklama yaptığı görülmektedir. Süreklilik ile limit arasındaki ilişki(bağlantı) aşağıdaki gibidir.

*"Her fonksiyonun, sürekli olduğu noktada limiti vardır fakat limitin olduğu noktada süreklilik olmayabilir."* (1)

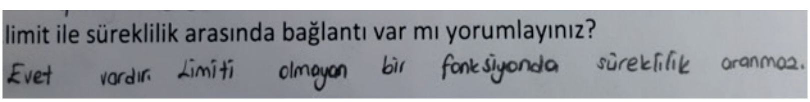
"Limit ile süreklilik arasında bağlantı var mıdır yorumlayınız?" sorusuna doğru cevap veren öğrencilerden birkaçının örnek cevabı aşağıda sunulmuştur. Öğrencilerin verdiği cevaplar, (1) bağlantısındaki açıklamaya denktir.

***Tablo 3. Mühendislik fakültesi öğrencilerinin araştırmanın 1. sorusuna verdikleri doğru cevapların frekans ve yüzdeleri***

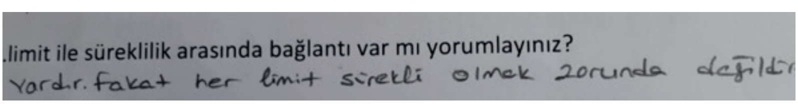
| Doğru Cevap Kodu | Doğru Cevap Veren Öğrenciler | f | % |
|---|---|---|---|
| Sürekliyse mutlaka limit vardır. | Ö21, Ö9, Ö12, Ö15, Ö16, Ö3, Ö24, Ö2, Ö19, Ö20, Ö27, Ö28, Ö35, Ö37, Ö38, Ö39, Ö41 | 17 | 34 |
| Limit olmadan süreklilik aranmaz. | Ö31, Ö22, Ö23, Ö26, Ö40, Ö44, Ö45 | 7 | 14 |
| Her limit sürekli Olmak zorunda değil. | Ö5, Ö43, Ö46, Ö47, Ö50 | 5 | 10 |
| $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ | Ö4, Ö29, Ö1 | 3 | 6 |
| Süreklilik limite Yaklaşımı ifade eder. | Ö7, Ö30 | 2 | 4 |
| Limit varsa sürekli olmak Zorunda değil. | Ö13, Ö36 | 2 | 4 |


limit ile süreklilik arasında bağlantı var mı yorumlayınız?
-Bir fonksiyonc sürekliyse kesinlikle Limit vardır. Am
limiti olan fonksiyon daima sürekli olmayabilir

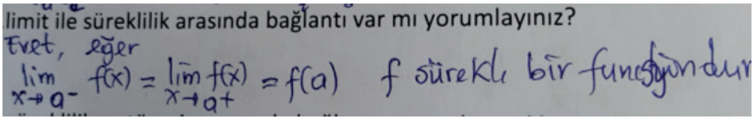
***Şekil 1. Ö21 kodlu öğrencinin cevabı***


limit ile süreklilik arasında bağlantı var mı yorumlayınız?
Evet vardır. Limiti olmayan bir fonksiyonda süreklilik aranmaz.

***Şekil 2. Ö31 kodlu öğrencinin cevabı***

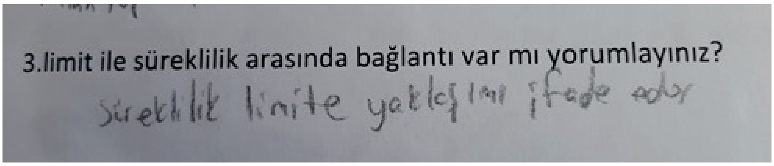

.limit ile süreklilik arasında bağlantı var mı yorumlayınız?
Vardır. Fakat her limit sürekli olmak zorunda değildi

***Şekil 3. Ö5 kodlu öğrencinin cevabı***

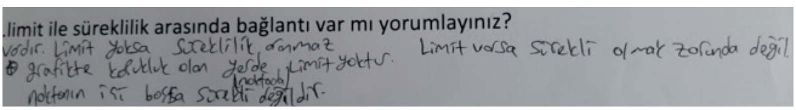



***Şekil 4. Ö4 kodlu öğrencinin cevabı***

Şekildeki Ö4 kodlu mühendislik fakültesi öğrencisi, $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ şeklinde bir ifade kullanmıştır.




***Şekil 5. Ö7 kodlu öğrencinin cevabı***




***Şekil 6. Ö13 kodlu öğrencinin cevabı***

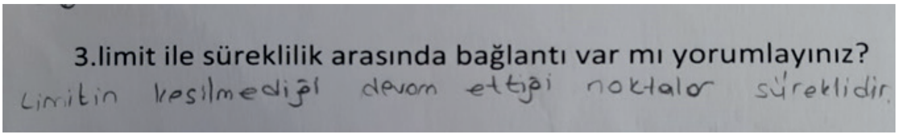
Mühendislik fakültesi öğrencilerinin, araştırmanın 1. sorusuna verdikleri kısmen doğru cevapların öğrencilere göre dağılımları Tabloda verilmiştir.

***Tablo 4. Mühendislik fakültesi öğrencilerinin 1.soruya verdikleri kısmen doğru cevapların dağılımı.***

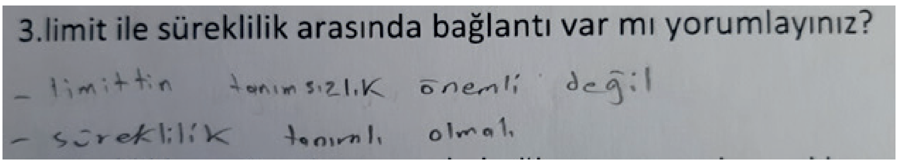
| Kısmen Doğru Cevap Kodları | Kısmen Doğru Cevap Veren Öğrenciler | f | % |
|---|---|---|---|
| Limit devam ettiği noktalar süreklidir. | Ö42 | 1 | 2 |
| Limitte tanımsızlık önemli değil, süreklilik tanımlı olmalı. | Ö48 | 1 | 2 |
| Var (açıklama yapılmamış) | Ö3 | 1 | 2 |

Tablo incelendiğinde, 1 mühendislik fakültesi öğrencisinin limit ile süreklilik arasındaki bağlantıyı "Limit devam ettiği noktalar süreklidir." şeklinde ifade ettiği, 1 öğrencinin, sorunun cevabını sadece "var" şeklinde ifade edip herhangi bir açıklama yapmadığı ve 1 öğrencinin de "Limittin tanımsızlık önemli değil süreklilik tanımlı olmalı." şeklinde bir açıklama yaptığı görülmektedir.

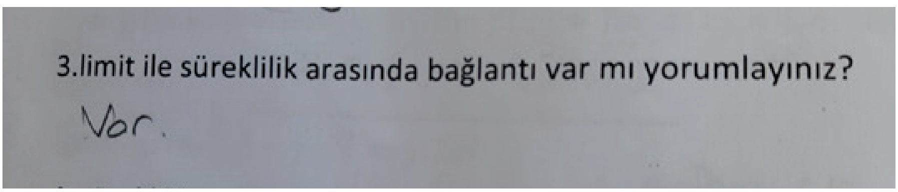
"Limit ile süreklilik arasında bağlantı var mı yorumlayınız?" sorusuna kısmen doğru cevap veren öğrencilerden birkaçının örnek cevabı aşağıda sunulmuştur.


3.limit ile süreklilik arasında bağlantı var mı yorumlayınız?
Limitin kesilmediği devam ettiği noktalar süreklidir.

*Şekil 7. Ö42 kodlu öğrencinin cevabı*


3.limit ile süreklilik arasında bağlantı var mı yorumlayınız?
- limittin tanımsızlık önemli değil
- süreklilik tanımlı olmalı

*Şekil 8. Ö48 kodlu öğrencinin cevabı*


3.limit ile süreklilik arasında bağlantı var mı yorumlayınız?
Var.

*Şekil 9. Ö3 kodlu öğrencinin cevabı*

Şekildeki Ö3 kodlu mühendislik fakültesi öğrencisi, "var" şeklinde bir ifade kullanmıştır. Öğrenci bir bağlantı olduğunu duymuş ama ne olduğunu hatırlayamamıştır. Dolayısıyla herhangi bir açıklama yapmamıştır.

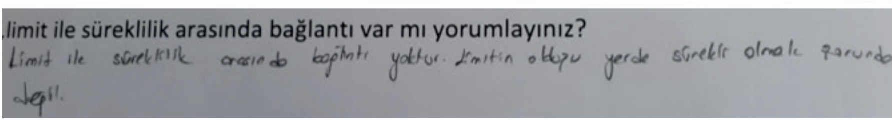
Mühendislik fakültesi öğrencilerinin, araştırmanın 3. sorusuna verdikleri yanlış cevapların öğrencilere göre dağılımları Tabloda verilmiştir.

***Tablo 5. Mühendislik fakültesi öğrencilerinin 1.soruya verdikleri yanlış cevapların dağılımı***

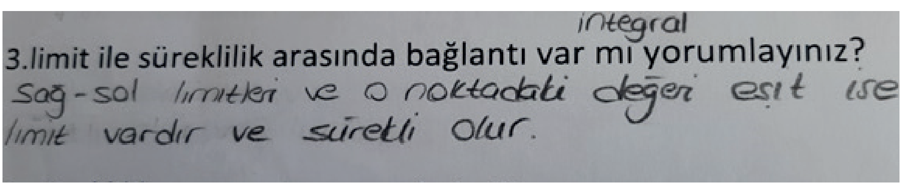
| Yanlış Cevap Kodları | Yanlış Cevap Veren Öğrenciler | f | % |
|---|---|---|---|
| Bağlantı yoktur. | Ö14, Ö10, Ö17, Ö32, Ö49 | 5 | 10 |
| Limit varsa süreklidir. | Ö6, Ö11, Ö18, Ö33 | 4 | 8 |
| Süreklilik yoksa limit yoktur. | Ö34 | 1 | 2 |
| Limit ve süreklilik eğim bulmak için kullanılıyor. | Ö8 | 1 | 2 |

Tablo incelendiğinde; 5 mühendislik fakültesi öğrencisi limit ile süreklilik arasında bir bağlantı olmadığını "Bağlantı yoktur." Şeklinde ifade ettiği, 4 öğrencinin "Limit varsa süreklidir." Şeklinde bir açıklama yaptığı, 1 öğrencinin "Süreklilik yoksa limit yoktur." şeklinde bir açıklama yaptığı ve 1 öğrencinin de "Limit ve süreklilik eğim bulmak için kullanılıyor." Şeklinde bir açıklama yaptığı görülmektedir.

"Limit ile süreklilik arasında bağlantı var mı yorumlayınız?" sorusuna yanlış cevap veren öğrencilerden birkaçının örnek cevabı aşağıda sunulmuştur.

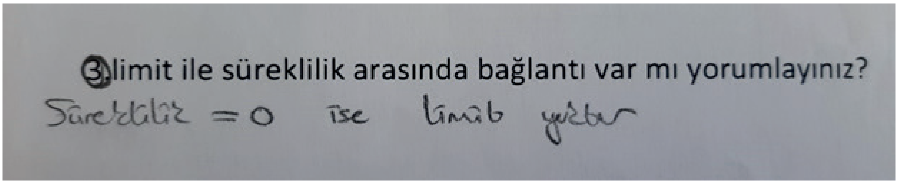

.limit ile süreklilik arasında bağlantı var mı yorumlayınız?
Limit ile süreklilik arasında bağlantı yoktur. Limitin olduğu yerde sürekli olmak zorunda değil.

*Şekil 10.* ***Ö14 kodlu öğrencinin cevabı***

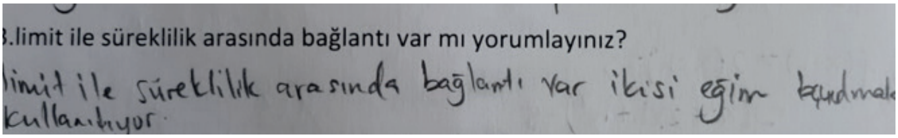

integral
3.limit ile süreklilik arasında bağlantı var mı yorumlayınız?
Sağ-sol limitleri ve o noktadaki değeri esit ise limit vardır ve süretli olur.

*Şekil 11.* ***Ö6 kodlu öğrencinin cevabı***

Şekildeki Ö6 kodlu mühendislik fakültesi öğrencisi, "sağ ve sol limitleri ve o noktadaki değeri eşit ise limit vardır ve sürekli olur." şeklinde bir ifade kullanmıştır.




*Şekil 12.* ***Ö34 kodlu öğrencinin cevabı***




*Şekil 13.* ***Ö8 kodlu öğrencinin cevabı***

Şekildeki Ö8 kodlu mühendislik fakültesi öğrencisi, “Limit ve süreklilik eğim bulmak için kullanılıyor.” şeklinde bir ifade kullanmıştır.

Araştırmanın ikinci sorusu olan “$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+ax+5}{x-3}=b,\ b\in R$ ise a değeri ne olmalıdır? sebebini açıklayınız.” sorusuna ait bulgular aşağıda sunulmuştur.

Mühendislik fakültesi öğrencilerinin, araştırmanın 2. sorusuna verdikleri doğru cevapların öğrencilere göre dağılımları Tabloda verilmiştir.

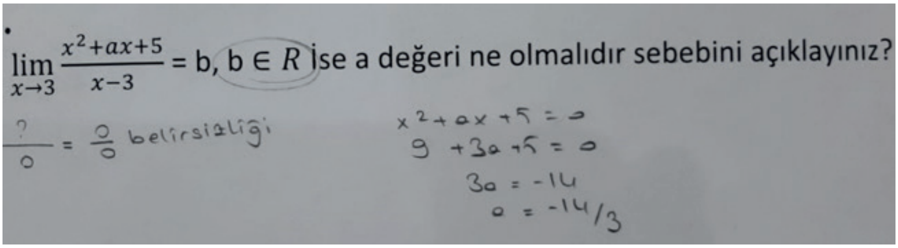
***Tablo 6. Mühendislik fakültesi öğrencilerinin, araştırmanın 2. sorusuna verdikleri doğru cevapların frekans ve yüzdeleri***

| Doğru Cevap Kodları | Doğru Cevap Veren Öğrenciler | f | % |
|---|---|---|---|
| İstenilen sebebi açıklamamış ama a değerini doğru bulmuştur. | Ö37, Ö6, Ö15, Ö16, Ö29, Ö21,<br>Ö35, Ö50, Ö7, Ö10, Ö13, Ö14,<br>Ö26, Ö28,<br>Ö36, Ö38, Ö41, Ö45 | 18 | 36 |
| Çarpanlara ayırma metodu ile çözüme ulaşmış. | Ö39, Ö9, Ö31,<br>Ö32, Ö2, Ö4, Ö46 | 7 | 14 |

Tablo incelendiğinde, araştırmanın 2. Sorusuna öğrencilerin %50’sinin (f=25) doğru cevap verdiği görülmektedir. Bunlardan 18’i a değerini bulmuş fakat sebebini açıklayamamıştır. 14’ü ise çarpanlara ayırma metodu ile doğru çözüme ulaşmıştır.

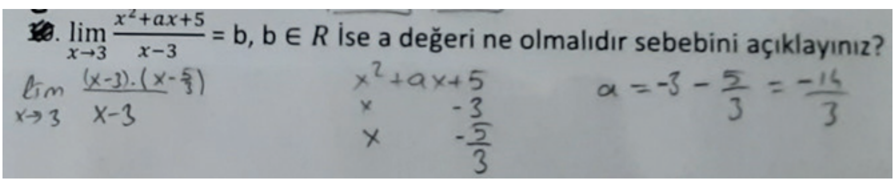
"$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 + ax + 5}{x - 3} = \mathrm{b}, \mathrm{b} \in R$ İse a değeri ne olmalıdır sebebini açıklayınız?"

sorusuna doğru cevap veren Ö37 kodlu öğrencinin örnek cevabı aşağıda sunulmuştur.




*Şekil 14.* ***Ö37 kodlu öğrencinin cevabı***

Yukardaki şekilde Ö37 kodlu mühendislik fakültesi öğrencisi, "a" değerini direkt olarak bulmuştur. Öğrenci $\frac{0}{0}$ belirsizliği durumunda reel sayı sonucuna ulaşılacağı bilgisine sahiptir ve payı 0 eşitleyerek a değerini bulmuştur.




*Şekil 15.* ***Ö39 kodlu öğrencinin cevabı***

Yukardaki şekilde Ö39 kodlu mühendislik fakültesi öğrencisi, çarpanları ayırma metodu ile çözüme ulaşmıştır.

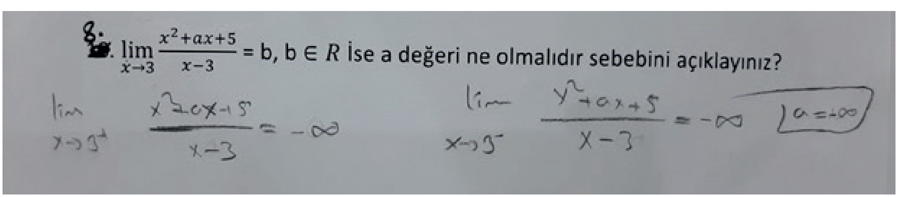
Mühendislik fakültesi öğrencilerinin, araştırmanın 2. sorusuna verdikleri yanlış cevapların öğrencilere göre dağılımları tabloda verilmiştir.

***Tablo 7. Mühendislik fakültesi öğrencilerinin 2. soruya verdikleri yanlış cevapların dağılımı***

| Yanlış Cevaplar Kodları | Yanlış Cevap Veren Öğrenciler | f | % |
|---|---|---|---|
| $-\infty$ | Ö34, Ö20, Ö44 | 3 | 6 |
| Türevi almış. | Ö23, Ö40, Ö24, Ö48, Ö43, Ö11, Ö49, Ö42, Ö5, Ö17, Ö18, Ö19, Ö27, Ö30, Ö33 | 15 | 30 |
| Çarpanlara ayırma metodunu kullanmış fakat çözüm yanlış. | Ö47, Ö1, Ö22, Ö12 | 4 | 8 |
| A için bir aralık tahmini yapmış. | Ö25 | 1 | 2 |
| İkinci dereceden ayrıma yapmış | Ö8 | 1 | 2 |

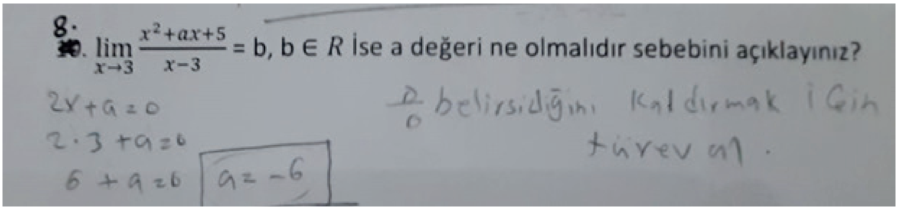
Tablo incelendiğinde, 3 mühendislik fakültesi öğrencisinin $\lim_{x\to 3}\frac{x^2+ax+5}{x-3}$ = b, b $\in R$ ise a değeri ne olmalıdır sebebini açıklayınız? Sorusuna "$-\infty$." şeklinde bir tanımlama yaptığı, 15 öğrencinin türevi aldığı, 4 öğrencinin çarpanlara ayırma metodunu kullandığı fakat yanlış çözüme ulaştığı, 1 öğrencinin "a" için bir aralık tahmini yapmış olduğu ve 1 öğrencinin de ikinci dereceden bir ayırma yaptığı görülmektedir.

"$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+ax+5}{x-3}$ = b, b $\in R$ ise a değeri ne olmalıdır? Sebebini açıklayınız." sorusuna yanlış cevap veren öğrencilerden birkaçının örnek cevabı aşağıda sunulmuştur.



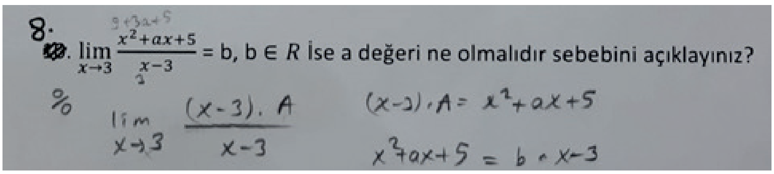

***Şekil 16. Ö34 kodlu öğrencinin cevabı***

Yukardaki şekilde Ö34 kodlu mühendislik fakültesi öğrencisi, $-\infty$ şeklinde bir ifade kullanmıştır. Öğrenci soruyu tamamen yanlış anlamış ve yanlış çözümlemiştir.



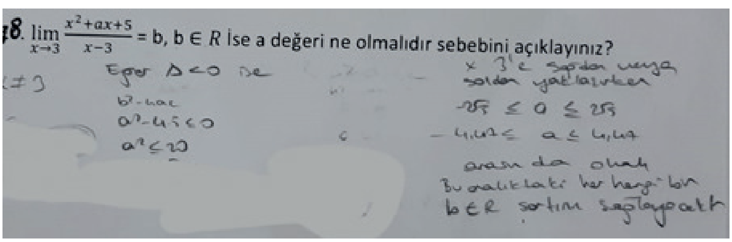

***Şekil 17. Ö23 kodlu öğrencinin cevabı***

Yukardaki şekilde Ö23 kodlu mühendislik fakültesi öğrencisi, türevi alarak sıfıra eşitlemiştir. Bu cevabın sorunun çözümü ile hiçbir ilgisi yoktur.



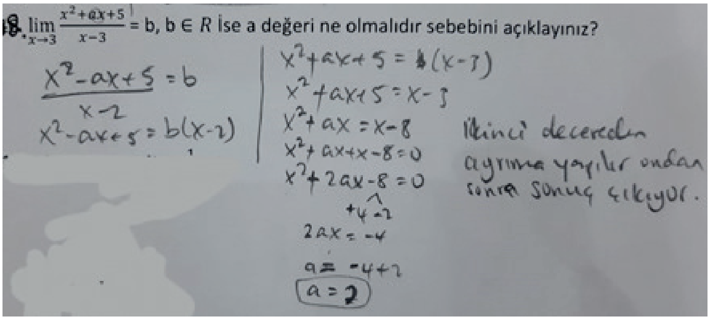

***Şekil 18. Ö47 kodlu öğrencinin cevabı***

Yukardaki şekilde Ö47 kodlu mühendislik fakültesi öğrencisi, çarpanları ayırma metodunu kullanmayı denemiş fakat herhangi ilerleme göstermemiştir.




***Şekil 19. Ö25 kodlu öğrencinin cevabı***

Yukardaki şekilde Ö25 kodlu mühendislik fakültesi öğrencisi, ikinci derece denklemin deltası yardımıyla a için bir aralık tahmini yapmıştır. Bunun çözüm ile hiçbir alakası yoktur.




***Şekil 20. Ö8 kodlu öğrencinin cevabı***

Yukardaki şekilde Ö8 kodlu mühendislik fakültesi öğrencisi, ikinci dereceden denklemi çarpanlarına ayırmaya çalışmış fakat yanlış sonuca ulaşmıştır.

Mühendislik fakültesi öğrencilerinden, araştırmanın 2. sorusunu boş bırakan 1 öğrenci belirlenmiştir.

***Tablo 8. Mühendislik fakültesi öğrencilerinin araştırmanın 3. sorusunun I kısmına verdikleri doğru ve yanlış cevapların frekans ve yüzdeleri***

| 3.soru I. Kısım | Verilen Cevap Kodu | Doğru ve Yanlış Cevap Veren Öğrenciler | f | % |
|---|---|---|---|---|
| Limit değerinin her zaman fonksiyon değerine eşit olmadığını biliyor (doğru) | √ İşareti Koyan Önermeyi Doğru Kabul Edenler (Cevabı Doğru Olanlar) | Ö31, Ö2, Ö20, Ö29, Ö44, Ö5, Ö8, Ö18, Ö46, Ö48, Ö27, Ö43, Ö21, Ö16, Ö45, Ö3, Ö28, Ö9, Ö25, Ö4, Ö19, | 21 | 42 |
| Limit değeri ile fonksiyon değerinin her zaman aynı olması gerektiğini sanıyor (yanlış) | × İşareti Koyan Önermeyi Doğru Kabul Edenler (Cevabı Yanlış Olanlar) | Ö1, Ö15, Ö49, Ö11, Ö32, Ö24, Ö13, Ö33, Ö39, Ö40, Ö35, Ö50, Ö6, Ö37, Ö47, Ö26, Ö22, Ö38, Ö10, Ö7, Ö17, Ö36, Ö14, Ö41, 23, 34, 42, 30, 12, | 29 | 48 |

Araştırmanın üçüncü sorusu olan "L bir gerçel sayı olmak üzere, gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı f ve g fonksiyonları için $\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2} g(x)=L$ eşitliği sağlanıyor. Buna göre, $\mathrm{I} - f(2) = g(2)$

$$\mathrm{II} - \lim_{x \to 2}\left(f(x) - g(x)\right) = 0$$

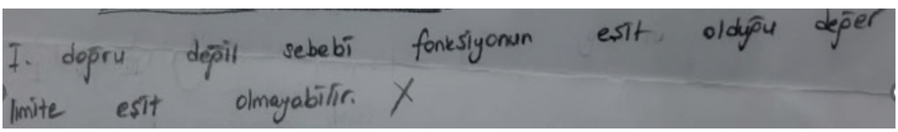
$$\mathrm{III} - \lim_{x \to 2}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Seçeneklerden hangisi her zaman doğrudur? Açıklayınız." sorusuna ait bulgular aşağıda sunulmuştur.

Mühendislik fakültesi öğrencilerinin, araştırmanın 3. sorusunun É kısmına verdikleri doğru ve yanlış cevapların öğrencilere göre dağılımları Tablo 8'de verilmiştir.

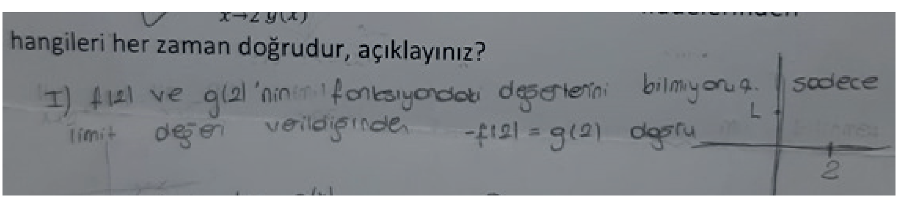
Tablo incelendiğinde öğrencilerin yarısından fazlasının 3. sorunun I. kısmını yanlış cevapladıkları görülmektedir. Öğrencilerin %42'si limit değerinin her zaman fonksiyon değerine eşit olmadığını bildiği, %48'inin limit değeri ile fonksiyon değerinin her zaman aynı olması gerektiğini sandığı belirlenmiştir.

Soruyla ilgili bazı öğrenci cevapları aşağıda sunulmuştur.


I. doğru değil sebebi fonksiyonun eşit olduğu değer limite eşit olmayabilir. X

*Şekil 21. **Ö31 kodlu öğrencinin cevabı***

Yukardaki şekilde Ö31 kodlu mühendislik fakültesi öğrencisi soruya doğru cevap vermiştir. Verilen hipotezde limitlerin eşitliği verilmiştir. Limit değeri fonksiyon değerinden bağımsızdır ve eşit olmak zorunda değildir. Hatta fonksiyon o noktada tanımlı olmadığı halde bile limit mevcut olabilir. Bundan dolayı, hipotezdeki limitlerin eşitliği, fonksiyon değerlerinin 2 noktasında eşit olmasını gerektirmez. Öğrencinin cevabı doğrudur.


hangileri her zaman doğrudur, açıklayınız?

I) f(2) ve g(2)'nin fonksiyondaki değerlerini bilmiyoruz. sadece limit değeri verildiğinde -f(2) = g(2) doğru

***Şekil 22. Ö1 kodlu öğrencinin cevabı***

Yukardaki şekilde Ö1 kodlu mühendislik fakültesi öğrencisi soruya yanlış cevap vermiştir. Bir önceki öğrencinin verdiği cevabın içlemesinde olduğu gibi limitlerin eşitliği, fonksiyon değerlerinin eşit olmasını gerektirmez. Bundan dolayı öğrencinin cevabı yanlıştır.

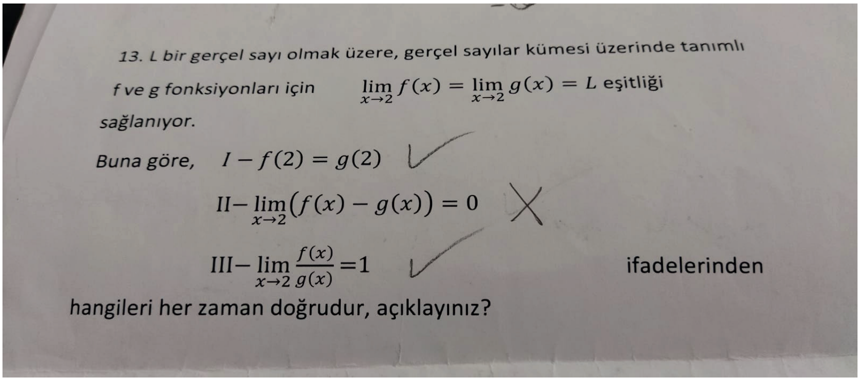
Mühendislik fakültesi öğrencilerinin, araştırmanın 3. Sorusunun II. kısmına verdikleri doğru ve yanlış cevapların öğrencilere göre dağılımları Tablo 9'da verilmiştir.

***Tablo 9. Mühendislik fakültesi öğrencilerinin araştırmanın 3. sorusunun II. kısmına verdikleri doğru ve yanlış cevapların frekans ve yüzdeleri***

| **3.soru II. Kısım** | **Verilen Cevap Kodu** | **Doğru ve Yanlış Cevap Veren Öğrenciler** | **f** | **%** |
|---|---|---|---|---|
| $\lim_{x\to 2}\left(f\left(x\right)-g\left(x\right)\right)=0$, her L ∈ R için doğru | × İşareti Koyan Önermeyi Doğru Kabul Edenler (Cevabı Yanlış Olanlar) | Ö16, Ö25, Ö8, Ö13, Ö39, Ö28, Ö35, Ö50, Ö26, Ö38, Ö7, Ö14, Ö41, Ö49, Ö34, Ö19, Ö32, Ö24, Ö33, Ö5, Ö18, Ö30 | 22 | 44 |
| | √ İşareti Koyan Önermeyi (Doğru Kabul Edenler) (Cevabı Doğru Olanlar) | Ö31, Ö12, Ö40, Ö23, Ö37, Ö1, Ö2, Ö46, Ö15, Ö4, Ö48, Ö27, Ö43, Ö45, Ö3, Ö9, Ö6, Ö47, Ö22, Ö10, Ö17, Ö36, Ö42, Ö29, Ö11, Ö44, Ö21, Ö20 | 28 | 56 |

Tablo incelendiğinde öğrencilerin yarısından fazlasının 3. sorunun II. kısmını doğru cevapladıkları görülmektedir.

Soruyla ilgili bazı öğrenci cevapları aşağıda sunulmuştur.



13. $L$ bir gerçel sayı olmak üzere, gerçel sayılar kümesi üzerinde tanımlı $f$ ve $g$ fonksiyonları için $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} g(x) = L$ eşitliği sağlanıyor.

Buna göre, $I - f(2) = g(2)$

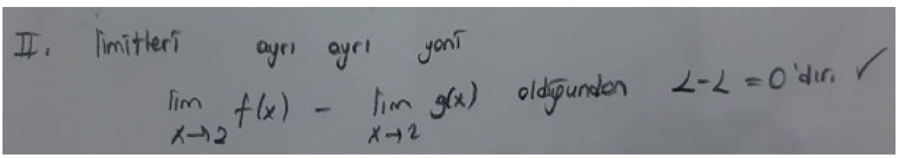
$II - \lim_{x\to 2}\big(f(x) - g(x)\big) = 0$

$III - \lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ ifadelerinden

hangileri her zaman doğrudur, açıklayınız?

*Şekil 23. Ö7 kodlu öğrencinin cevabı*

Yukardaki şekilde Ö7 kodlu mühendislik fakültesi öğrencisi, soruya yanlış cevap vermiştir.



II. limitleri ayrı ayrı yani $\lim_{x\to 2} f(x) - \lim_{x\to 2} g(x)$ oldğundan $L - L = 0$'dır.

*Şekil 24. Ö31 kodlu öğrencinin cevabı*

Yukardaki şekilde Ö31 kodlu mühendislik fakültesi öğrencisi, soruya doğru cevap vermiştir. Hipotezde limitin var olduğu belirtildiğinden, II. önerme her zaman geçerlidir. Bu durumda öğrencinin cevabı doğrudur.

Mühendislik fakültesi öğrencilerinin, araştırmanın 3. Sorusunun ***Ø*** . kısmına verdikleri doğru ve yanlış cevapların öğrencilere göre dağılımları Tablo 10'da verilmiştir.

***Tablo 10. Mühendislik fakültesi öğrencilerinin araştırmanın 3. Sorusunun III. kısmına verdikleri doğru ve yanlış cevapların frekans ve yüzdeleri.***

| 3. Soru III. Kısım | Verilen Cevap Kodları | Doğru ve Yanlış Cevap Veren Öğrenciler | f | % |
|---|---|---|---|---|
| $\text{III}-\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$ | √ İşareti Koyan Önermeyi Doğru Kabul Edenler (Cevabı Doğru Olanlar) | Ö2, Ö19, Ö42, Ö25, Ö9, Ö28, Ö3, Ö32, Ö24, Ö13, Ö44, Ö15 | 12 | 24 |
| | Yanlış Kabul Edenler (Cevabı Yanlış Olanlar) | Ö12, Ö35, Ö5, Ö31, Ö46, Ö1, Ö37, Ö23, Ö8, Ö30, Ö34, Ö49, Ö41, Ö14, Ö36, Ö17, Ö7, Ö10, Ö38, Ö22, Ö26, Ö47, Ö6, Ö50, Ö45, Ö43, Ö27, Ö4, Ö33, Ö39, Ö18, Ö16, Ö40, Ö20, Ö29, Ö48, Ö11, Ö21 | 38 | 76 |

Tablo incelendiğinde öğrencilerin neredeyse tamamına yakını 3. sorunun II. kısmını yanlış cevapladıkları görülmektedir. Mühendislik fakültesi öğrencileri;

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{g(x)}=1$$

$\mathrm{L}\neq 0$ ise her zaman doğru

$\mathrm{L}=0$ ise doğru olmayabilir

$\mathrm{L}=0$ da $\dfrac{0}{0}$ belirsizliği oluştuğunu görememiştirler.

## 5. Tartışma ve Sonuç

Türev kavramının bir bileşeni olan limit kavramını anlamak son derece önemlidir. Mühendislik fakültesi öğrencilerine Genel Matematik I dersi içeriğinde verilen limit kavramının mühendis adayları tarafından en genel haliyle anlaşılma durumunu belirlemek amacı ile yapılan bu çalışmanın bulgularına göre mühendis adaylarının büyük bir kısmının limit kavramına dair yanlış birikimler edindiği belirlenmiştir. Sorular yazılı şeklinde olup çoktan seçmeli olmadığından şans faktörünün neredeyse hiç etki etmediği söylenebilir. Sonuçlar Mühendis adaylarının tanımı ezberlemenin yanı sıra tanım üzerinde yapılan işlemleri de ezberlediklerini göstermiştir. Bu sonuç farklı çalışmalar ile de paralellik içindedir (Barak, 2007). Mühendislik fakültesi öğrencilerinin sağ ve sol limit kavramlarının sezgisel olarak ne anlama geldiğini anlayabildikleri; ancak bazı öğrencilerin bu kavramlar hakkında kavram yanılgılarına sahip oldukları belirlenmiştir. Benzer şekilde Baki ve Çekmez (2012) çalışmalarında limit kavramının öğrenciler tarafından ezberlendiğini belirtmişlerdir. Mühendislik fakültesi öğrencileri limit ve türev arasındaki ilişkiyi, "türev bir limittir" şeklinde ifade etmektedirler ve soruların çözümünde bu ilişkiyi derinlemesine inceleyemedikleri görülmektedir. Limit ve sürekliliğin en temel anlayışı, fonksiyonun o noktada tanımlanmış olması ve limit değerinin fonksiyonun görüntüsüne eşit olması koşuluyla, fonksiyonun o anda tanımlanması gerekmeksizin bir noktada limitinin olabileceğidir. Öğretmen adayları ile yapılan çalışmalarda da limit ve süreklilik kavramlarına ilişkin öğretmen adaylarının da çeşitli hatalı düşüncelere sahip olabildikleri görülmektedir. Bir fonksiyonun limiti olduğu yerde tanımlı ve sürekli olması gerektiği fikrine ilişkin bulgulardan biri, öğretmen adaylarının limitin alındığı yerde fonksiyonun sürekli olması ve belirtilmesi gerektiğine inandıkları şeklindedir (Baştürk, & Dönmez, 2011). Ayrıca çalışma; süreklilik ve limit arasındaki ilişkilerin tam olarak kurulamadığını ve öğrencilerin bu konuda yanlış fikirlere sahip olduklarını göstermiştir. Limit ve süreklilik fikirleri ile türev kavramı arasındaki ilişki genellikle tanımlar düzeyinde anlaşılmaktadır. Ancak, bu tanımların detayları tam olarak anlaşılamamıştır. Mühendislik fakültesi öğrencileri, kavramlar arasındaki ilişkileri doğru bir şekilde belirleyemedikleri için limit konusunu anlamakta zorlanmışlardır.

Sonuç olarak; mühendislik öğrencilerinin limit kavramlarını anlamakta ve ilişkilendirmekte zorlandıkları tespit edilmiştir.

Mühendis adaylarının karşılaştıkları bazı zorluklar ve yaptıkları hatalar:

1. Öğrencilerin, kavramların tanımları veya ayrıntıları hakkında yetersiz bilgiye sahip olması
2. Ezber yöntemiyle öğrenilen bilgilerin yönetimi
3. Belirli kavramların birbiriyle olan ilişkilerinin yanlış anlaşılması

4. Limit kavramlarının mühendislik fakültesi öğrencileri tarafından yetersiz anlaşılması
5. Mühendislik fakültesi öğrencilerin kavramsal anlama yerine, işlemsel anlamaya yönelmesi
6. Öğrencilerin soruyu çözerken hangi küme üzerinde işlem yaptığına dikkat etmediği şeklindedir.

Yanılgılar ve eksiklikler ile ilgili bu tür araştırmalar, ileri matematiğin bütün konularında ve daha geniş öğrenci kitlesi üzerinde yapılabilir. Çalışmaya, öğrencilerin kısa süre içerisinde hızlı bir şekilde yanıtlayamayacakları, yorumlama ve düşünme yeteneği gerektiren sorular dâhil edilmiştir. Çalışma sonuçları, öğrencilerin hatırlama basamağı hakkında bazı bilgilere sahip olduğunu göstermektedir. Ancak, eksik ve yanlış bilgilerin tamamlanıp düzeltilmesi gerektiği düşüncesini de desteklemektedir.

## Kaynakça

Alkan, S., & Güven, B., "Ders kitaplarında kullanılan örnek türlerinin analizi: Limit konusu", ***Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT)***, *9*(1), 147-169 (2018).

Altun, I., "The perceived problem solving ability and values of student nurses and midwives", ***Nurse education today***, 23(8), 575-584 (2003).

Baki, M., & Çekmez, E., "İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının limit kavramının formal tanımına yönelik anlamalarının incelenmesi", ***Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT)***, *3*(2), 81-98 (2012).

Barak, B., "Limit konusundaki kavram yanılgılarının belirlenmesi", ***(Master's thesis, Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü)*** (2007).

Basturk, S., Baştürk, S., & Dönmez, G., "Matematik öğretmen adaylarının limit ve süreklilik konusuyla ilgili kavram yanılgıları", ***Necati Bey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi***, 5(1), 225-249 (2011).

Bingolbali, E., & Monaghan, J., "Cognition and institutional setting", ***In New directions for situated cognition in mathematics education Springer***, Boston, MA. (pp. 233-259) (2008).

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K., "Research methods in education", ***(Sixth). Oxon: Routledge***. (2007).

Cornu, B. "*Limits*", In Tall, D. (Ed.) Advanced mathematical thinking (pp.153-166). **Boston: Kluwer** (1991).

Karadüz, A., "Türkçe öğretmenlerinin ölçme ve değerlendirme uygulamalarının "yapılandırmacı öğrenme kavramı bağlamında eleştirisi", ***Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi***, 22(1), 189-210 (2009).

Pape, S. J., Bell, C. V., & Yetkin, İ. E., "Developing mathematical thinking and self-regulated learning: A teaching experiment in a seventh-grade mathematics classroom", ***Educational Studies in Mathematics***, 53(3), 179-202 (2003).

Suraweera, F. (2002). Enhancing the quality of learning and understanding of first-year mathematics for computer science related majors. ACM SIGCSE Bulletin, 34(4), 117-120.

Tall, D., & Razali, M. R., "Diagnosing students' difficulties in learning mathematics", ***International Journal of Mathematical Education in Science and Technology***, *24*(2), 209-222 (1993).

Turan, S. B., "Matematik öğretmen adaylarının limit, süreklilik ve türev ile ilgili kavramsal yapıları", ***(Master's thesis, Necmettin Erbakan Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü)*** (2016).

Ünver, S. K., Çelik, A. Ö., & Guzel, E. B., "Öğrenci Hata ve Yanılgıları ile Başa Çıkma Yolları: Limit Örneği", ***Batı Anadolu Eğitim Bilimleri Dergisi***, *11*(2), 528-551 (2020).

Yitmez, B. G., Yılmaz, S., & Dinçer, B., "İlköğretim Matematik Öğretmenliği Lisans Öğrencilerinin Çok Değişkenli Fonksiyonların Limiti ve Sürekliliği Konusundaki Kavram Yanılgılarının İncelenmesi", ***Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi Dergisi***, (53), 611-637 (2022).