

Cesàro Fonksiyon Uzayı Üzerinde Genelleştirilmiş Hausdorff Operatörünün Sınırlılığı

Ferit Gürbüz¹

Özet

Banach uzayları fonksiyonel analizde önemli bir rol oynar ve özellikle uzayların normları doğrusal operatörler ve p-integrallenebilir normlar tarafından üretildiğinden çok sayıda uygulamaya öncülük eder. Bu bağlamda, genelleştirilmiş Hausdorff operatörünün analizdeki çeşitli problemlerle derin bir ilişkisi vardır. Uygun çekirdekler için; Hausdorff operatörü, Hardy operatörü, Cesàro operatörü, Riemann-Liouville kesirli integrali ve diğer bazı operatörler gibi klasik operatörlerden başka bir şey değildir. Bu çalışmada Cesàro fonksiyon uzayı üzerinde genelleştirilmiş Hausdorff operatörünün davranışını inceledik ve bu operatörün bu uzayda sınırlı olması için φ ve a koşullarını belirledik.

1. Giriş

Son yıllarda Hausdorff matrislerinin dizi uzayları ve çeşitli fonksiyon uzayları üzerinde toplanabilme yöntemlerinden operatör teorisine kadar incelenmesi, esas olarak operatörlerin sınırlılığı üzerine yapılmıştır. Ayrıca, Hausdorff matrisleri, Cesàro, Riesz, Nörlund matrislerini vb. içerdiğinden, toplanabilme yöntemleri teorisinde çok önemli bir rol oynar. Başlangıçta, Siskakis [1] analitik fonksiyon uzaylarında Cesàro operatörünün özelliklerini inceledi ve Cesàro operatörünün H^p normunu, bu operatörü bileşke operatörünün bir yarı grubuna ilişkilendirerek elde etti. Georgakis [2], φ çekirdeği ile tanımlanan

$$\mathcal{H}_\varphi(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(t)}{|t|} f\left(\frac{x}{t}\right) dt$$

1 Prof. Dr., Kırklareli Üniversitesi Matematik Bölümü, feritgurbuz@klu.edu.tr, 0000-0003-3049-688X

klasik Hausdorff operatörünü inceledi ve bu operatörün $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ için $L^1(\mathbb{R})$ de sınırlı olduğunu gösterdi. Burada dikkat edilirse $\chi_{(0,1)}(t)$, $(0,1)$ üzerinde bir karakteristik fonksiyon olmak üzere eğer $\varphi(t) = a(1-t)^{a-1} \chi_{(0,1)}(t)$ ise bu durumda \mathcal{H}_φ Hausdorff operatörü a mertebesindeki Cesàro operatöründen başka bir şey değildir. Ayrıca, uygun φ çekirdeği için, Hausdorff operatörünün özel bir hali olarak Calderón maksimal operatörü elde edilebilir. 2001 de Xiao [3], $L^p(\mathbb{R}^n)$ ve $BMO(\mathbb{R}^n)$ üzerindeki \mathcal{H}_φ operatörünün karakterizasyonunu inceledi. Ayrıca, yazar bu makalesinde \mathcal{H}_φ operatörünün $L^p(\mathbb{R}^n)$ üzerinde sınırlı olması için ancak ve ancak $\int_0^1 t^{-\frac{n}{p}} \varphi(t) dt < \infty$ olması gerektiğini gösterdi ve operatörün normunun eşitliğini elde etti. 2014 de, Kuang [7], \mathbb{R}^n üzerinde φ çekirdeği ve a pozitif monoton fonksiyonu tarafından üretilen

$$\mathcal{H}_{\varphi,a}(f)(x) = \int_0^\infty \varphi(t) f\left(\frac{x}{a(t)}\right) dt \quad (1.1)$$

genelleştirilmiş Hausdorff operatörünü tanıttı ve bu operatörün ağırlıklı Herz uzaylarında sınırlılığını inceledi. Burada, a fonksiyonu $(0, \infty)$ aralığı üzerinde ve φ fonksiyonu ise $[0, \infty[$ aralığı üzerinde ölçülebilir fonksiyondur.

Diğer taraftan Cesàro fonksiyon uzayı, fonksiyon uzaylarının en önemli örneklerinden biridir ve Cesàro dizi uzaylarının $[0, \infty[$ 'a kadar olan bir genişlemesidir. Cesàro dizi uzayları ise 1968 yılında Hollanda Matematik Derneği'nin bu uzayların dualitelerini bulma problemini yayınlamasıyla açıkça ortaya çıktı [4, s. 14]. Ayrıca, Cesàro fonksiyon uzaylarının temel yapı özelliği Astashkin ve Maligranda [4] tarafından incelenmiştir. Cesàro fonksiyon uzaylarının tanımı göz önüne alındığında, Cesàro fonksiyon uzaylarındaki Hardy eşitsizliği, Lebesgue uzaylarındaki Hardy eşitsizliğinin bir sonucudur. Bu durum bizi Cesàro fonksiyon uzaylarındaki diğer ünlü eşitsizliğin, örneğin Hilbert eşitsizliğinin geçerliliğini araştırmaya teşvik eder. Bu bağlamda, 2022 de Ho [5] Cesàro fonksiyon uzaylarındaki bazı integral operatörlerin sınırlılığını inceledi. Biz de [5] deki çalışmadan esinlenerek, Cesàro fonksiyon uzaylarındaki (1.1) ile verilen genelleştirilmiş Hausdorff operatörlerinin sınırlılığı için, Cesàro fonksiyon uzaylarındaki Minkowski eşitsizlikleri ile genel bir sonuç oluşturacağız. Yani, genelleştirilmiş Hausdorff

operatörlerin sınırlılığını $[0, \infty[$ aralığı üzerindeki Cesàro fonksiyon uzaylarına genişleteceğiz.

Son olarak, Cesàro fonksiyon uzaylarının genel tanımını verip bu bölümü kapatalım.

Öncelikle $[0, \infty[= \mathbb{R}^+$ aralığı üzerinde ölçülebilir fonksiyonlar ailesi \mathfrak{M} olsun. Bu durumda, Cesàro fonksiyon uzayları aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım: f , \mathbb{R}^+ üzerinde pozitif ölçülebilir bir fonksiyon ve $p \in \mathbb{R}^+$ olsun.

$$\|f\|_{Ces_p(\mathbb{R}^+)} = \left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^\infty |f(t)| dt \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

olmak üzere bütün $f \in \mathfrak{M}$ fonksiyonlarının uzayı Cesàro fonksiyon uzayı olarak tanımlanır ve $Ces_p(\mathbb{R}^+)$ ile gösterilir.

2 Ana Sonuç

Bu bölümde, genelleştirilmiş Hausdorff operatörü için Cesàro fonksiyon uzayı üzerinde bazı sonuçlar verilecektir.

Aşağıdaki teorem, \mathbb{R}^+ üzerindeki φ çekirdeğinin davranışı ile Hausdorff operatörünün Cesàro fonksiyon uzayı üzerindeki sınırlılığını verir.

Teorem.

a , \mathbb{R}^+ üzerinde ölçülebilir bir fonksiyon ve $p \in \mathbb{R}^+$ olsun. Eğer

$$\int_0^\infty |\varphi(y)| |a(y)|^{\frac{1}{p}} dy < \infty \text{ ise, bu durumda}$$

$$\|\mathcal{H}_{\varphi,a}(f)\|_{Ces_p(\mathbb{R}^+)} \leq \|f\|_{Ces_p(\mathbb{R}^+)} \int_0^\infty |\varphi(y)| |a(y)|^{\frac{1}{p}} dy$$

gerçeklenir.

İspat.

$f \in Ces_p(\mathbb{R}^+)$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{H}_{\varphi,a}(f)\|_{Ces_p(\mathbb{R}^+)} &\leq \left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty \frac{1}{x} \int_0^x |\varphi(y)f\left(\frac{t}{a(y)}\right)| dt dy \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \int_0^\infty |\varphi(y)| \left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^{\frac{x}{a(y)}} |f(z)||a(y)| dz \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} dy \\ &\leq \|f\|_{Ces_p(\mathbb{R}^+)} \int_0^\infty |\varphi(y)||a(y)|^{\frac{1}{p}} dy \end{aligned}$$

olur. Buradan, norma geçiş integraller için Minkowski eşitsizliğini kullanırsak [6, (6.19)],

$$\begin{aligned} \|\mathcal{H}_{\varphi,a}(f)\|_{Ces_p(\mathbb{R}^+)} &\leq \left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty \frac{1}{x} \int_0^x |\varphi(y)f\left(\frac{t}{a(y)}\right)| dt dy \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \int_0^\infty |\varphi(y)| \left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^{\frac{x}{a(y)}} |f(z)||a(y)| dz \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} dy \\ &\leq \|f\|_{Ces_p(\mathbb{R}^+)} \int_0^\infty |\varphi(y)||a(y)|^{\frac{1}{p}} dy \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu da ispatı tamamlar.

Yukarıdaki teoremden aşağıdaki sonuçları elde edebiliriz.

Sonuçlar.

1- $a(t) = \frac{1}{t}$ ve $\varphi(t) = \chi_{(0,1)}(t)$ olsun. Bu durumda, (1.1) ile verilen $\mathcal{H}_{\varphi,a}$ operatörü klasik Cesàro operatörüne dönüşür. Buradan, Cesàro operatörü $\|\mathcal{H}_{\varphi,a}(f)\|_{Ces_p(\mathbb{R}^+)} = \frac{p}{p-1}$ normlu Cesàro fonksiyon uzayında sınırlıdır.

2- $a(t) = t$ ve $\alpha > -1$ için $\varphi(t) = \alpha(1-t)^{\alpha-1} \chi_{(0,1)}(t)$ olsun. Bu durumda, $p \geq 1$ için (1.1) ile verilen $\mathcal{H}_{\varphi,a}$ operatörü Cesàro fonksiyon uzayında sınırlıdır.

3- $k > 0$ için $a(t) = e^{kt}$ ve $\varphi(t) = e^{-t^2}$ olsun. Bu durumda, $p > 0$ için (1.1) ile verilen $\mathcal{H}_{\varphi,a}$ operatörü Cesàro fonksiyon uzayında sınırlıdır.

3 Kaynakça

- [1] A. G. Siskakis, Composition semigroups and the Cesàro operator on H^p , J. London Math. Soc. 36 (1987), no. 2, 153–164.
- [2] C. Georgakis, The Hausdorff mean of a Fourier-Stieltjes transform, Proc. Amer. Math. Soc. 116 (1992), 465–471.
- [3] J. Xiao, L^p and BMO bounds of weighted Hardy-Littlewood averages, J. Math. Anal. Appl. 128 (2001), 660–660.
- [4] S. V. Astashkin and L. Maligranda, Structure of Cesàro function spaces, Indag. Math. (N.S.) 20 (2009), no. 3, 329–379.
- [5] K.-P. Ho, Integral operators on Cesàro function spaces, Bull. Korean Math. Soc. 59 (2022), no. 4, 905–915.
- [6] G. B. Folland, Real Analysis: modern techniques and their applications, John Wiley & Sons, 1984.

