

# Matematik ve Fen Bilimlerinde Güncel Yaklaşımlar

Editör: Prof. Dr. Ferit Gürbüz



ÖZGÜR  
YAYINLARI

# Matematik ve Fen Bilimlerinde Güncel Yaklaşımlar

**Editör:**

Prof. Dr. Ferit Gürbüz



Published by

**Özgür Yayın-Dağıtım Co. Ltd.**

Certificate Number: 45503

📍 15 Temmuz Mah. 148136. Sk. No: 9 Şehitkamil/Gaziantep

☎ +90.850 260 09 97

📞 +90.532 289 82 15

🌐 www.ozgurayinlari.com

✉ info@ozgurayinlari.com

---

## Matematik ve Fen Bilimlerinde Güncel Yaklaşımlar

Editör: Prof. Dr. Ferit Gürbüz

---

Language: Turkish-English

Publication Date: 2024

Cover design by Mehmet Çakır

Cover design and image licensed under CC BY-NC 4.0

Print and digital versions typeset by Çizgi Medya Co. Ltd.

**ISBN (PDF):** 978-625-95513-8-8

**DOI:** <https://doi.org/10.58830/ozgur.pub568>

---



This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0). To view a copy of this license, visit <https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>  
This license allows for copying any part of the work for personal use, not commercial use, providing author attribution is clearly stated.

---

Suggested citation:

Gürbüz, F. (ed) (2024). *Matematik ve Fen Bilimlerinde Güncel Yaklaşımlar*. Özgür Publications.

DOI: <https://doi.org/10.58830/ozgur.pub568>. License: CC-BY-NC 4.0

---

*The full text of this book has been peer-reviewed to ensure high academic standards. For full review policies, see <https://www.ozgurayinlari.com/>*

---



## Ön Söz

Matematik ve bilim, matematiğe ek olarak, özünde matematiksel nitelikte olan ancak evrensel olarak matematiğin alt alanları olarak tanınmayan akademik disiplinleri içeren bir çalışma alanı grubudur. Matematik ve bilim arasında uzun ve yakın bir ilişki vardır ve her ikisi de hayati ve giderek artan bir öneme sahiptir. Matematik, bilimin içsel bir bileşeni, yapısının bir parçası, evrensel dili ve vazgeçilmez entelektüel araçlarının kaynağıdır. Buna karşılık, bilim matematiğe ilham verir ve onu canlandırır, yeni sorular ortaya koyar, yeni düşünme biçimleri yaratır ve nihayetinde matematiğin değer sistemini koşullandırır. Fizik ve mühendislik gibi her zaman matematiksel olan alanlar daha matematiksel hale geliyor. Biyoloji, fizyoloji, biyoteknoloji, mikrobiyoloji, moleküler biyoloji ve genetik gibi daha önce yoğun olarak matematiksel olmayan bilimler, tanımlama ve sınıflandırmadan analiz ve açıklamaya geçiyor; sorunlarının çoğu yalnızca kısmen anlaşılabilir ve bu nedenle doğası gereği belirsiz olan sistemleri içeriyor ve yeni matematiksel araçlarla araştırma gerektiriyor. Bilimdeki ilerleme, tüm dallarında, matematiksel girişimin yakın katılımını ve güçlendirilmesini gerektirir; yani yeni bilim ve yeni matematik el ele gider. Bu kitap bu amaçla hazırlanmıştır. Kitap 10 bölümden oluşmaktadır. Kitap genel olarak cebir, matematiksel analiz, geometri, uygulamalı matematik, matematik eğitimi, biyoteknoloji ve mikrobiyoloji gibi bilim dallarını içermektedir. Bu kitabın özellikle “biyoloji ve matematik” alanlarıyla ilgilenen lisansüstü öğrenciler ve araştırmacılar için değerli bir kaynak olması beklenmektedir. Elbette, bu gönderilen çalışmaları derleyen, toplayan ve okuyucuların yararına sunan Özgür Yayınevi çalışanlarına da teşekkür etmek istiyorum. “Matematik ve Bilimde Güncel Yaklaşımlar” kitabının okunması ve anlaşılması kolay olması için gerekli özen gösterilmiş olsa da yine de bazı hatalar olabilir. Bu konuda her türlü uyarı ve eleştiriyi yapacak meslektaşlarıma ve öğrencilerime şimdiden teşekkür etmek istiyorum.

Saygılarımla.

Prof. Dr. Ferit GÜRBÜZ



# İçindekiler

Ön Söz

iii

## Bölüm 1

---

Lie derivatives of almost contact structure and almost paracontact structure with respect to  ${}^{\infty}\tilde{X}$  and  ${}^{\nu}X$  on semi-tangent bundle  $t(M)$  1

*Kursat Akbulut*

*Furkan Yıldırım*

*Imran Gunes*

## Bölüm 2

---

On Lie Differentiability Conditions of Some Polynomial Structures in Semi Tangent Bundle 15

*Kursat Akbulut*

*Furkan Yıldırım*

*Imran Gunes*

## Bölüm 3

---

Ters Matris Yöntemi Kullanılarak Kosinüs Fonksiyonunun Kuvvetinin İntegralinin Hesaplanması 31

*Ferit Gürbüz*

## Bölüm 4

---

Notes on Tachibana Operators in the Semi-Tangent Bundle Associated with Almost R-Contact Structure 41

*Furkan Yıldırım*

*Kursat Akbulut*

*Gulnur Çağlar*

## Bölüm 5

---

The Antioxidant Potential of Some Mushrooms	61
<i>Şükrü Canpolat</i>	
<i>Elif Yürümez Canpolat</i>	

## Bölüm 6

---

Dual Birim Küre ve Study Dönüşümü	79
<i>Bülent Karakaş</i>	
<i>Şenay Baydaş</i>	

## Bölüm 7

---

Cesàro Fonksiyon Uzaı Üzerinde Genelleştirilmiş Hausdorff Operatörünün Sınırlılığı	89
<i>Ferit Gürbüz</i>	

## Bölüm 8

---

Mühendislik Fakültesi Öğrencilerinin Türev ve İntegral Konularındaki Kavramsal Bilgi Düzeyleri	95
<i>Aya Alebo</i>	
<i>Çiğdem İnci Kuzu</i>	

## Bölüm 9

---

Mühendislik Fakültesi Öğrencilerinin Limit Konusundaki Temel Bilgi Düzeyleri	115
<i>Aya Alebo</i>	
<i>Çiğdem İnci Kuzu</i>	

## Bölüm 10

---

Optimality Conditions of a Hyperbolic Beam Equation based on Mindlin's Gradient Elasticity Theory	137
<i>Kenan Yıldırım</i>	

# Lie derivatives of almost contact structure and almost paracontact structure with respect to ${}^{cc}\widetilde{X}$ and ${}^{vv}X$ on semi-tangent bundle $t(M)$

Kursat Akbulut<sup>1</sup>

Furkan Yıldırım<sup>2</sup>

Imran Gunes<sup>3</sup>

## Abstract

The main aim of this paper is to investigate Lie derivatives of almost contact structure and almost paracontact structure with respect to  ${}^{cc}\widetilde{X}$  and  ${}^{vv}X$  on semi-tangent bundle  $t(B)$ .

In addition, this results which obtained shall be studied for some special vector fields in of almost contact structure and almost paracontact structure.

## 1. Introduction

Let  $B_m$  and  $M_n$  denote two differentiable manifolds of dimensions  $m$  and  $n$  respectively, let  $(M_n, \pi_1, B_m)$  be a differentiable bundle, and let  $\pi_1$  be the submersion  $\pi_1: M_n \rightarrow B_m$ . We may consider  $(x^i) = (x^a, x^\alpha)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ;  $a, b, \dots = 1, \dots, n - m$ ;  $\alpha, \beta, \dots = n - m + 1, \dots, n$  as local coordinates in a neighborhood  $\pi_1^{-1}(U)$ . Let  $B_m$  be the base manifold and  $\tilde{\pi}: T(B_m) \rightarrow B_m$  be the natural projection, and let  $T(B_m)$  be the tangent bundle over  $B_m$ . In this case, let  $T_p(B_m)$  represent in for the tangent

1 Prof. Dr., Ataturk University, Faculty of Sci., Department of Mathematics, Erzurum, Turkey, kakbulut@atauni.edu.tr, 0000-0002-2829-4712

2 Assoc. Prof. Dr., Ataturk University, Narman Vocational Training School, Erzurum, Turkey, furkan.yildirim@atauni.edu.tr, 0000-0003-0081-7857

3 Master Student, Ataturk University, Faculty of Sci., Department of Mathematics, Erzurum, Turkey, umran6575@gmail.com, 0009-0001-6368-7239



space at a  $p$ -point ( $p = x^a, x^\alpha \in M_n, p = \pi_1(\tilde{p})$ ) on the base manifold  $B_m$ . If  $X^\alpha = dx^\alpha(X)$  are components of  $X$  in tangent space  $T_p(B_m)$  with respect to the natural base  $\{\partial_\alpha\} = \{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\}$ , then we have the set of all points,  $(x^a, x^\alpha, x^{\bar{\alpha}})$ ,  $X^\alpha = x^{\bar{\alpha}} = y^\alpha$ ,  $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \dots = n+1, \dots, n+m$ , is by definition, the semi-tangent bundle  $t(B_m)$  over the  $M_n$  manifold and the natural projection  $\pi_2 : t(B_m) \rightarrow M_n$ ,  $\dim t(B_m) = n+m$ . Specifically, assuming  $n = m$ , the semi-tangent bundle [14]  $t(B_m)$  becomes a tangent bundle  $T(B_m)$ . Given a tangent bundle  $\tilde{\pi} : T(B_m) \rightarrow B_m$  and a natural projection  $\pi_1 : M_n \rightarrow B_m$ , the pullback bundle (for example see [4], [5], [7], [8], [9], [10], [17], [19], [20]) is given by  $\pi_2 : t(B_m) \rightarrow M_n$  where

$$t(B_m) = \left\{ \left( (x^a, x^\alpha), x^{\bar{\alpha}} \right) \in M_n \times T_x(B_m) \mid \pi_1(x^a, x^\alpha) = \tilde{\pi}(x^\alpha, x^{\bar{\alpha}}) \right\}.$$

The induced coordinates  $(x^{a'}, \dots, x^{n-m'}, x^{1'}, \dots, x^{m'})$  with regard to  $\pi^{-1}(U)$  will be given by

$$\begin{cases} x^{a'} = x^{a'}(x^b, x^\beta), & a, b, \dots = 1, \dots, n-m \\ x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x^\beta), & \alpha, \beta, \dots = n-m+1, \dots, n, \end{cases} \quad (1)$$

If  $(x^{i'}) = (x^{a'}, x^{\alpha'})$  is another coordinate chart on  $M_n$ , the Jacobian matrices of (1) is given by [14]:

$$(A_j^{i'}) = \left( \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^b} & \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^\beta} \\ 0 & \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta} \end{pmatrix},$$

where  $i, j, \dots = 1, \dots, n$ . If (1) is local coordinate system on  $M_n$ , then we have the induced fibre coordinates  $(x^{a'}, x^{\alpha'}, x^{\bar{\alpha}'})$  on the semi-tangent bundle (change of coordinates):

$$\begin{cases} x^{a'} = x^{a'}(x^b, x^\beta), & a, b, \dots = 1, \dots, n-m, \\ x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x^\beta), & \alpha, \beta, \dots = n-m+1, \dots, n, \\ x^{\bar{\alpha}'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta} y^\beta, & \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \dots = n+1, \dots, n+m, \end{cases} \quad (2)$$

The Jacobian matrices for (2) are as follows [14]:

$$\bar{A} = (A_{J'}^I) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^b} & \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^\beta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta} & 0 \\ 0 & y^{\varepsilon} \frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^\beta \partial x^\varepsilon} & \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

where  $I, J, \dots = 1, \dots, n + m$ . Then, we obtain

$$(A_{J'}^I) = \begin{pmatrix} A_{b'}^a & A_{\beta'}^a & 0 \\ 0 & A_{\beta'}^\alpha & 0 \\ 0 & A_{\beta', \varepsilon'}^\alpha y^{\varepsilon'} & A_{\beta'}^\alpha \end{pmatrix}, \quad (4)$$

which is the Jacobian matrix of inverse (2).

This paper investigates lifts of several geometric objects (complete lifts, vertical lifts, etc.) that were previously studied in tangent bundles and their uses in semi-tangent bundles.

Much study has been done on the theory of tangent bundles [21], which is important in physics, differential geometry, and engineering. The semi-tangent bundle taken into consideration in this work specifies a pull-back bundle as opposed to the tangent bundle. In [1], [2], [3], [7], [12], [13] and [16], the almost paracontact structure and almost contact structure in tangent bundles have been studied along with some of their characteristics. The geometric properties of the semi-tangent bundle have been studied by several authors, such as [14], [19], [20], and others. It is known that projectable linear connections in semi-tangent bundles have been explored, along with some of their characteristics, in [9], [19] and [20].

## 2. Preliminaries

If  $f$  is a function on  $B_m$ , we write  ${}^{vv}f$  for the function on  $t(B_m)$  obtained by forming the composition of  $\pi : t(B_m) \rightarrow B_m$  and  ${}^v f = f \circ \pi_1$ , so that  ${}^{vv}f = {}^v f \circ \pi_2 = f \circ \pi_1 \circ \pi_2 = f \circ \pi$ .

Consequently,

$${}^{vv}f(x^a, x^\alpha, \bar{x}^\alpha) = f(x^\alpha) \tag{5}$$

is provided by the  ${}^{vv}f$  – vertical lift of the function  $f \in \mathfrak{F}_0^0(B_m)$  to  $t(B_m)$ . It should be observed that along every fiber of  $\pi : t(B_m) \rightarrow B_m$ , the value  ${}^{vv}f$  stays constant. If  $f = f(x^a, x^\alpha)$  is a function in  $M_n$ , on the other hand, we write  ${}^{cc}f$  for the function in  $t(B_m)$  defined by

$${}^{cc}f = \iota(df) = x^{\bar{\beta}} \partial_{\beta} f = y^{\beta} \partial_{\beta} f \tag{6}$$

and name the complete lift  ${}^{cc}f$  of the function  $f$  [14].  ${}^{HH}f = {}^{cc}f - \nabla_{\gamma} f$  determines the  ${}^{HH}f$  – horizontal lift of the function  $f$  to  $t(B_m)$  where  $\nabla_{\gamma} f = \gamma \nabla f$ . Let  $X \in \mathfrak{F}_0^1(B_m)$  be  $(X = X^\alpha \partial_\alpha)$ . By using (3), we have the usual law  ${}^{vv}X' = \bar{A}({}^{vv}X)$  of coordinate transformation of a vector field on  $t(B_m)$  when

$${}^{vv}X : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ X^\alpha \end{pmatrix}, \tag{7}$$

is put in. The  $(1,0)$ –tensor field  ${}^{vv}X$  is called the vertical lift of  $X$  to semi-tangent bundle [20]. Let  $\omega \in \mathfrak{F}_1^0(B_m)$ , i.e.  $\omega = \omega_\alpha dx^\alpha$ . On putting

$${}^v\omega : (0, \omega_\alpha, 0), \tag{8}$$

from (3), we easily see that  ${}^{vv}\omega = \bar{A}{}^{vv}\omega'$ . The vertical lift of  $\omega$  to  $t(B_m)$  is the name of the  $(0,1)$ -tensor field  ${}^{vv}\omega$  [20]. The complete lift  ${}^{cc}\omega \in \mathfrak{F}_1^0(t(B_m))$  of  $\omega \in \mathfrak{F}_1^0(B_m)$  with the components  $\omega_\alpha$  in  $B_m$  has the following components:

$${}^{cc}\omega : (0, y^\varepsilon \partial_\varepsilon \omega_\alpha, \omega_\alpha) \tag{9}$$

relative to the induced coordinates in the semi-tangent bundle [20]. Let  $\omega$  be a covector field on  $B_m$  with an affine connection  $\nabla$ . Then the components of the  ${}^{HH}\omega$  – horizontal lift of  $\omega$  have the form

$${}^{HH}\omega = {}^{cc}\omega - \nabla_\gamma \omega$$

in  $t(B_m)$ , where  $\nabla_\gamma \omega = \gamma \nabla \omega$ . The horizontal lift  ${}^{HH}\omega \in \mathfrak{T}_1^0(t(B_m))$  of  $\omega$  has the following components:

$${}^{HH}\omega : (0, \Gamma_\alpha^\varepsilon \omega_\varepsilon, \omega_\alpha)$$

relative to the induced coordinates in  $t(B_m)$ . Now, consider that there is given a  $(p, q)$  – tensor field  $S$  whose local expression is

$$S = S_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_p}} \otimes dx^{\beta_1} \otimes \dots \otimes dx^{\beta_q}$$

in base manifold  $B_m$  with  $\nabla$  – affine connection and a  $\nabla_\gamma S$  – tensor field defined by

$$\nabla_\gamma S = y^\varepsilon \nabla_\varepsilon S_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_p}} \otimes dx^{\beta_1} \otimes \dots \otimes dx^{\beta_q}$$

relative to the induced coordinates  $(x^a, x^\alpha, x^{\bar{\alpha}})$  in  $\pi^{-1}(U)$  in the semi-tangent bundle. Additionally, we define a  $\nabla_X S$  – tensor field in  $\pi^{-1}(U)$  by

$$\nabla_X S = (X^\varepsilon S_{\varepsilon \beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p}) \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_p}} \otimes dx^{\beta_1} \otimes \dots \otimes dx^{\beta_q}$$

and a  $\gamma S$  – tensor field in  $\pi^{-1}(U)$  by

$$\nabla S = (y^\varepsilon S_{\varepsilon \beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p}) \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_p}} \otimes dx^{\beta_1} \otimes \dots \otimes dx^{\beta_q}$$

relative to the induced coordinates  $(x^a, x^\alpha, x^{\bar{\alpha}})$ ,  $U$  being an arbitrary coordinate neighborhood in  $B_m$ .

Next, we obtain  $\nabla_X S = {}^{vv}S_X$  for any  $X \in \mathfrak{T}_0^1(B_m)$  and  $S \in \mathfrak{T}_s^0(B_m)$  or  $S \in \mathfrak{T}_s^1(B_m)$ , where  $S_X \in \mathfrak{T}_{s-1}^0(B_m)$  or  $\mathfrak{T}_{s-1}^1(B_m)$ . The  ${}^{HH}S$  – horizontal lift of  $(p, q)$  – tensor field  $S$  in base manifold  $B_m$  to  $t(B_m)$  has the following equation:

$${}^{HH}S = {}^{cc}S - \nabla_\gamma S.$$

Assuming  $P, Q \in t(B_m)$ , we obtain

$$\nabla_\gamma (P \otimes Q) = {}^{vv}P \otimes (\nabla_\gamma Q) + (\nabla_\gamma P) \otimes {}^{vv}Q \text{ and } {}^{HH}(P \otimes Q) = {}^{HH}P \otimes {}^{vv}Q + {}^{vv}P \otimes {}^{HH}Q.$$

Assume  $\widetilde{X} \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$  is a projectable  $(1, 0)$ -tensor field with projection  $X = X^\alpha(x^\alpha)\partial_\alpha$ , i.e.  $\widetilde{X} = \widetilde{X}^a(x^a, x^\alpha)\partial_a + X^\alpha(x^\alpha)\partial_\alpha$ . Now, take into account  $\widetilde{X} \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ , in that case complete lift  ${}^{cc}\widetilde{X}$  has components of the form [14]:

$${}^{cc}\widetilde{X} : \begin{pmatrix} \widetilde{X}^a \\ X^\alpha \\ y^\varepsilon \partial_\varepsilon X^\alpha \end{pmatrix} \quad (10)$$

relative to the coordinates  $(x^a, x^\alpha, \bar{x}^\alpha)$  on the semi-tangent bundle  $t(B_m)$ . For an arbitrary affiner field  $F \in \mathfrak{S}_1^1(B_m)$ , if (3) is taken into consideration, we may demonstrate that  $(\gamma F)' = \bar{A}(\gamma F)$ , where  $\gamma F$  is a  $(1, 0)$ -tensor field defined by [9]:

$$\gamma F : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y^\varepsilon F_\varepsilon^\alpha \end{pmatrix} \quad (11)$$

relative to the coordinates  $(x^a, x^\alpha, \bar{x}^\alpha)$ . For each projectable vector field  $\widetilde{X} \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$  [20], we well-know that the  ${}^{HH}\widetilde{X}$ -horizontal lift of  $\widetilde{X}$  to  $t(B_m)$  (see [9]) by  ${}^{HH}\widetilde{X} = {}^{cc}\widetilde{X} - \gamma(\nabla\widetilde{X})$ . In the above situation, a differentiable manifold  $B_m$  has a projectable symmetric linear connection denoted by  $\nabla$ . We recall that  $\gamma(\nabla\widetilde{X})$ -vector field has components [9]:

$$\gamma(\nabla\widetilde{X}) : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y^\varepsilon \nabla_\varepsilon X^\alpha \end{pmatrix}$$

relative to the coordinates  $(x^a, x^\alpha, \bar{x}^\alpha)$  on  $t(B_m)$ .  $\nabla_\alpha X^\varepsilon$  being the covariant derivative of  $X^\varepsilon$ , i.e.,

$$(\nabla_\alpha X^\varepsilon) = \partial_\alpha X^\varepsilon + X^\beta \Gamma_{\beta \alpha}^\varepsilon.$$

Consequently, the  ${}^{HH}\widetilde{X}$ -horizontal lift of  $\widetilde{X}$  to  $t(B_m)$  contains the following components [9]:

$${}^{HH}\tilde{X} : \begin{pmatrix} \tilde{X}^a \\ X^\alpha \\ -\Gamma^\alpha_\beta X^\beta \end{pmatrix} \tag{12}$$

relative to the coordinates  $(x^a, x^\alpha, \bar{x}^\alpha)$  on  $t(B_m)$  where

$$\Gamma^\alpha_\beta = y^\epsilon \Gamma_\epsilon^\alpha. \tag{13}$$

Vertical lifts are given by the following relations:

$${}^{vv}(P \otimes Q) = {}^{vv}P \otimes {}^{vv}Q, \quad {}^{vv}(P + R) = {}^{vv}P + {}^{vv}R \tag{14}$$

to an algebraic isomorphism (unique) of the  $\mathfrak{S}(B_m)$ -tensor algebra into the  $\mathfrak{S}(t(B_m))$ -tensor algebra with respect to constant coefficients. Where  $P, Q$  and  $R$  being arbitrary elements of  $t(B_m)$ . For an arbitrary affinor field  $F \in \mathfrak{S}_1^1(B_m)$ , if (3) is taken into consideration, we may demonstrate that  ${}^{vv}F_{j'} = A_i^l A_j^{l'} ({}^{vv}F_{j'})$ , where  ${}^{vv}F$  is a  $(1,1)$ -tensor field defined by [20]:

$${}^{vv}F : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_\beta^\alpha & 0 \end{pmatrix} \tag{15}$$

relative to the coordinates  $(x^a, x^\alpha, \bar{x}^\alpha)$ . The  $(1,1)$ -tensor field (15) is called the vertical lift of affinor field  $F$  to  $t(B_m)$  [20]. Complete lifts are given by the following relations:

$${}^{cc}(P + R) = {}^{cc}P + {}^{cc}R, \quad {}^{cc}(P \otimes Q) = {}^{cc}P \otimes {}^{vv}Q + {}^{vv}P \otimes {}^{cc}Q, \tag{16}$$

to an algebraic isomorphism (unique) of the  $\mathfrak{S}(B_m)$ -tensor algebra into the  $\mathfrak{S}(t(B_m))$ -tensor algebra with respect to constant coefficients. Where  $P, Q$  and  $R$  being arbitrary elements of  $t(B_m)$ . For an arbitrary projectable affinor field  $\tilde{F} \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$  [20] with projection  $F = F_\beta^\alpha(x^\alpha) \partial_\alpha \otimes dx^\beta$  i.e.  $\tilde{F}$  has components

$$\tilde{F} : \begin{pmatrix} \tilde{F}_b^a(x^a, x^\alpha) & \tilde{F}_\beta^a(x^a, x^\alpha) \\ 0 & \tilde{F}_\beta^\alpha(x^\alpha) \end{pmatrix}$$

relative to the coordinates  $(x^a, x^\alpha)$ . If (3) is taken into consideration, we may demonstrate that  ${}^{cc}\widetilde{F}^I{}_J = A^I{}_I A^J{}_J ({}^{cc}\widetilde{F}^I{}_J)$ , where  ${}^{cc}\widetilde{F}$  is a  $(1,1)$ -tensor field defined by [20]:

$${}^{cc}\widetilde{F} : \begin{pmatrix} \widetilde{F}^a{}_b & \widetilde{F}^a{}_\beta & 0 \\ 0 & F^\alpha{}_\beta & 0 \\ 0 & y^\varepsilon \partial_\varepsilon F^\alpha{}_\beta & F^\alpha{}_\beta \end{pmatrix}, \quad (17)$$

relative to the coordinates  $(x^a, x^\alpha, x^{\bar{\alpha}})$ . The  $(1,1)$ -tensor field (17) is called the complete lift of affiner field  $F$  to semi-tangent bundle  $t(B_m)$  [20]. We will now give below some important equations that we will use.

*Lemma 1.* Let  $\widetilde{X}, \widetilde{Y}$  and  $\widetilde{F}$  be projectable vector and  $(1,1)$ -tensor fields on  $M_n$  with projections  $X, Y$  and  $F$  on base manifold  $B_m$ , respectively. If  $f \in \mathfrak{S}_0^0(B_m)$ ,  $\omega \in \mathfrak{S}_1^0(B_m)$  and  $I = id_{B_m}$ , then [17], [18] yerine [19], [20]:

$$\begin{aligned} & (i) \quad {}^{vv}\omega \quad {}^{vv}X = 0, \quad (ii) \quad {}^{cc}\widetilde{X} \quad {}^{vv}f = {}^{vv}(Xf), \quad (iii) \quad {}^{vv}\omega({}^{cc}\widetilde{X}) = {}^{vv}(\omega(X)) \\ & , \quad (iv) \quad {}^{vv}F \quad {}^{cc}\widetilde{X} = {}^{vv}(FX), \\ & (v) \quad {}^{vv}X \quad {}^{cc}f = {}^{vv}(Xf), \quad (vi) \quad {}^{cc}(\widetilde{fX}) = {}^{cc}f \quad {}^{vv}X + {}^{vv}f \quad {}^{cc}\widetilde{X} = {}^{cc}(\widetilde{Xf}), \quad (vii) \\ & {}^{vv}I \quad {}^{cc}\widetilde{X} = {}^{vv}X, \quad (viii) \quad {}^{cc}\widetilde{I} = \widetilde{I}, \\ & (ix) \quad [{}^{vv}X, {}^{cc}\widetilde{Y}] = {}^{vv}[X, Y], \quad (x) \quad {}^{cc}\omega({}^{vv}X) = {}^{vv}(\omega(X)), \quad (xi) \quad {}^{vv}F \quad {}^{vv}X = 0 \\ & , \quad (xii) \quad {}^{cc}\widetilde{F} \quad {}^{vv}X = {}^{vv}(FX) \\ & (xiii) \quad {}^{cc}\widetilde{X} \quad {}^{cc}f = {}^{cc}(Xf), \quad (xiv) \quad {}^{cc}\omega({}^{cc}\widetilde{X}) = {}^{cc}(\omega X), \quad (xv) \quad {}^{cc}(\widetilde{fX}) = {}^{cc}\widetilde{F} \quad {}^{cc}\widetilde{X} \\ & , \quad (xvi) \quad {}^{vv}(fX) = {}^{vv}f \quad {}^{vv}X, \\ & (xvii) \quad {}^{vv}I \quad {}^{vv}X = 0, \quad (xviii) \quad [{}^{cc}\widetilde{X}, {}^{cc}\widetilde{Y}] = {}^{cc}[\widetilde{X}, \widetilde{Y}], \quad (xix) \\ & {}^{vv}(f\omega) = {}^{vv}f \quad {}^{vv}\omega, \quad (xx) \quad {}^{vv}X \quad {}^{vv}f = 0, \\ & (xxi) \quad [{}^{vv}X, {}^{vv}Y] = 0. \end{aligned}$$

### 3. Main Results

Let an  $m$ -dimensional differentiable manifold  $B_m$  ( $m = 2k + 1, k \geq 0$ ) be endowed with a projectable  $(1,1)$ -tensor field  $\widetilde{\varphi} \in \mathfrak{T}_1^1(M_n)$  [20] with projection  $\varphi = \varphi_\beta^\alpha(x^\alpha) \partial_\alpha \otimes dx^\beta$  i.e., a projectable  $(1,0)$ -tensor field

$\tilde{\xi} \in \mathfrak{Z}_0^1(M_n)$  with projection  $\xi = \xi^\alpha (x^\alpha) \partial_\alpha$  i.e.  $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}^a (x^\alpha, x^\alpha) \partial_a + \xi^\alpha (x^\alpha) \partial_\alpha$  [20], a 1-form  $\eta$ ,  $l$  be an identity and let them satisfy

$$\tilde{\varphi}^2 = -I + \eta \otimes \tilde{\xi}, \quad \tilde{\varphi}(\tilde{\xi}) = 0, \quad \eta \circ \tilde{\varphi} = 0, \quad \eta(\tilde{\xi}) = 1. \quad (18)$$

Then  $(\tilde{\varphi}, \tilde{\xi}, \eta)$  define almost contact structure on  $B_m$  (see, for example [2], [6], [11], [12], [16], [19], [23]). Taking account of (18) we obtain

$$\left( {}^{cc}\tilde{\varphi} \right)^2 = -I + {}^{vv}\eta \otimes {}^{cc}\tilde{\xi} + {}^{cc}\eta \otimes {}^{vv}\xi, \quad (19)$$

$${}^{cc}\tilde{\varphi} {}^{vv}\xi = 0, \quad {}^{vv}\eta \circ {}^{cc}\tilde{\varphi} = 0, \quad {}^{vv}\eta \circ {}^{cc}\tilde{\varphi} = 0,$$

$${}^{cc}\eta \circ {}^{cc}\tilde{\varphi} = 0, \quad {}^{vv}\eta({}^{vv}\xi) = 0, \quad {}^{vv}\eta({}^{cc}\tilde{\xi}) = 1, \quad {}^{cc}\eta({}^{vv}\xi) = 1, \quad {}^{cc}\eta({}^{cc}\tilde{\xi}) = 0, \quad [20]$$

using (18) and (19) we define a (1,1) tensor field  $\tilde{J}$  on  $t(B_m)$  by

$$\tilde{J} = {}^{cc}\tilde{\varphi} - {}^{vv}\xi \otimes {}^{vv}\eta + {}^{cc}\tilde{\xi} \otimes {}^{cc}\eta \quad (20)$$

Then it is easy to show that  $\tilde{J}^2 {}^{vv}X = -{}^{vv}X$  and  $\tilde{J}^2 {}^{cc}\tilde{X} = -{}^{cc}\tilde{X}$ , which give that  $\tilde{J}$  is an almost contact structure on  $t(B_m)$ . We get from (20)

$$\tilde{J} {}^{vv}X = {}^{vv}(\varphi X) + {}^{vv}(\eta(X)) {}^{cc}\tilde{\xi},$$

$$\tilde{J} {}^{cc}\tilde{X} = {}^{cc}(\widetilde{\varphi X}) - {}^{vv}(\eta(X)) {}^{vv}\xi + {}^{cc}(\eta(X)) {}^{cc}\tilde{\xi}$$

for any  $\tilde{X} \in \mathfrak{Z}_0^1(M_n)$ .

*Theorem 1.* In accordance with (20), we have the following for the  $L_X$  - operator, Lie derivation with respect to  $\tilde{J} \in \mathfrak{Z}_1^1(t(B_m))$  and  $\eta(Y) = 0$  :

$$(i) \quad (L_{{}^{vv}X} \tilde{J}) {}^{vv}Y = 0, \quad (ii) \quad (L_{{}^{vv}X} \tilde{J}) {}^{cc}\tilde{Y} = {}^{vv}((L_X \varphi)Y) + {}^{vv}((L_X \eta)Y) {}^{cc}\tilde{\xi},$$

$$(iii) \quad (L_{{}^{cc}\tilde{X}} \tilde{J}) {}^{vv}Y = {}^{vv}((L_X \varphi)Y) + {}^{vv}((L_X \eta)Y) {}^{cc}\tilde{\xi},$$

$$(iv) \quad (L_{{}^{cc}\tilde{X}} \tilde{J}) {}^{cc}\tilde{Y} = {}^{cc}(\widetilde{(L_X \varphi)Y}) - {}^{vv}((L_X \eta)Y) {}^{vv}\xi + {}^{cc}(\widetilde{(L_X \eta)Y}) {}^{cc}\tilde{\xi},$$

where  $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{\xi} \in \mathfrak{Z}_0^1(M_n)$  are projectable (1,0)-tensor fields,  $\eta \in \mathfrak{Z}_1^0(M_n)$  is a 1-form and  $\tilde{\varphi} \in \mathfrak{Z}_1^1(M_n)$  is a projectable (1,1)-tensor field.

*Proof 1.* For  $\tilde{J} = {}^{cc}\tilde{\varphi} - {}^{vv}\xi \otimes {}^{vv}\eta + {}^{cc}\tilde{\xi} \otimes {}^{cc}\eta$  and  $\eta(Y) = 0$ , we obtain

$$(i) \quad (L_{{}^{vv}X} \tilde{J}) {}^{vv}Y = L_{{}^{vv}X} \left( {}^{cc}\tilde{\varphi} - {}^{vv}\xi \otimes {}^{vv}\eta + {}^{cc}\tilde{\xi} \otimes {}^{cc}\eta \right) {}^{vv}Y - \underbrace{\left( {}^{cc}\tilde{\varphi} - {}^{vv}\xi \otimes {}^{vv}\eta + {}^{cc}\tilde{\xi} \otimes {}^{cc}\eta \right) L_{{}^{vv}X} {}^{vv}Y}_0$$



$$\begin{aligned}
 &= \underbrace{L_{\nu X}{}^{\nu\nu}(\varphi Y)}_0 - L_{\nu X} \left( \underbrace{\nu\nu\eta}{}^{\nu\nu}(Y) \right) \nu\nu\xi + L_{\nu X} \underbrace{\nu\nu(\eta(Y))}{}^{cc}\tilde{\xi} = 0 \\
 \text{(ii)} \quad & (L_{\nu X}\tilde{J}){}^{cc}\tilde{Y} = L_{\nu X} \left( \underbrace{cc\tilde{\varphi}}{}^{\nu\nu}\xi \otimes \nu\nu\eta + \underbrace{cc\tilde{\xi}}{}^{cc}\xi \otimes cc\eta \right) {}^{cc}\tilde{Y} - \left( \underbrace{cc\tilde{\varphi}}{}^{\nu\nu}\xi \otimes \nu\nu\eta + \underbrace{cc\tilde{\xi}}{}^{cc}\xi \otimes cc\eta \right) L_{\nu X}{}^{cc}\tilde{Y} \\
 &= \underbrace{L_{\nu X}{}^{cc}\tilde{\varphi}}{}^{cc}\tilde{Y} - L_{\nu X} \underbrace{\nu\nu(\eta(Y))}{}^{\nu\nu}\xi + \underbrace{L_{\nu X}{}^{cc}\tilde{\xi}}{}^{cc}(\eta(Y)) - \underbrace{cc\tilde{\varphi}}{}^{cc}L_{\nu X}{}^{cc}\tilde{Y} + \\
 &\quad \underbrace{\left( L_{\nu X}{}^{cc}\tilde{\varphi} \right) {}^{cc}\tilde{Y} + \underbrace{cc\tilde{\varphi}}{}^{cc}L_{\nu X}{}^{cc}\tilde{Y}}_{\nu\nu((L_X\varphi)Y)} - \underbrace{cc\tilde{\varphi}}{}^{cc}\nu\nu(L_X Y)}_{cc\tilde{\varphi}{}^{\nu\nu}(L_X Y)} \\
 &+ \underbrace{\nu\nu\eta}{}^{\nu\nu}(L_X Y) \nu\nu\xi - \underbrace{\nu\nu(\eta(L_X Y))}{}^{cc}\tilde{\xi} \\
 &\quad \nu\nu(L_X\eta(Y)) - \nu\nu((L_X\eta)Y) \\
 &= \left( L_{\nu X}{}^{cc}\tilde{\varphi} \right) {}^{cc}\tilde{Y} + \underbrace{cc\tilde{\varphi}}{}^{cc}(L_{\nu X}{}^{cc}\tilde{Y}) - \underbrace{cc\tilde{\varphi}}{}^{cc}L_{\nu X}{}^{cc}\tilde{Y} - \nu\nu(L_X(\eta(Y))){}^{cc}\tilde{\xi} + \nu\nu((L_X\eta)Y) {}^{cc}\tilde{\xi} \\
 &= \nu\nu((L_X\varphi)Y) + \underbrace{cc\tilde{\varphi}}{}^{\nu\nu}(L_X Y) + \underbrace{cc(\eta(Y))L_{\nu X}{}^{cc}\tilde{\xi}}_0 + \underbrace{cc\tilde{\xi}}{}^{cc}(L_{\nu X}{}^{cc}(\eta(Y))) \\
 &\quad \nu\nu(L_X\eta(Y)) \\
 &- \underbrace{cc\tilde{\varphi}}{}^{\nu\nu}(L_X Y) - \nu\nu(L_X\eta(Y)) {}^{cc}\tilde{\xi} + \nu\nu((L_X\eta)Y) {}^{cc}\tilde{\xi} = \nu\nu((L_X\varphi)Y) + \nu\nu((L_X\eta)Y) {}^{cc}\tilde{\xi} \\
 \text{(iii)} \quad & (L_{cc\bar{X}}\tilde{J}){}^{\nu\nu}Y = L_{cc\bar{X}} \left( \underbrace{cc\tilde{\varphi}}{}^{\nu\nu}\xi \otimes \nu\nu\eta + \underbrace{cc\tilde{\xi}}{}^{cc}\xi \otimes cc\eta \right) {}^{\nu\nu}Y - \left( \underbrace{cc\tilde{\varphi}}{}^{\nu\nu}\xi \otimes \nu\nu\eta + \underbrace{cc\tilde{\xi}}{}^{cc}\xi \otimes cc\eta \right) L_{cc\bar{X}}{}^{\nu\nu}Y \\
 &= \underbrace{L_{cc\bar{X}}{}^{cc}\tilde{\varphi}}{}^{\nu\nu}Y - L_{cc\bar{X}} \left( \underbrace{\nu\nu\eta}{}^{\nu\nu}(Y) \right) \nu\nu\xi + \underbrace{L_{cc\bar{X}}{}^{cc}\tilde{\xi}}{}^{\nu\nu}(\eta(Y)) - \underbrace{cc\tilde{\varphi}}{}^{cc}L_{cc\bar{X}}{}^{\nu\nu}Y \\
 &\quad \nu\nu((L_X\varphi)Y) + \nu\nu(\varphi L_X Y)}_{\nu\nu((L_X\varphi)Y) + \nu\nu(\varphi L_X Y)} \\
 &+ \nu\nu\eta{}^{\nu\nu}(L_X Y) \nu\nu\xi - \underbrace{\nu\nu(\eta(L_X Y))}{}^{cc}\tilde{\xi} \\
 &\quad \nu\nu(L_X\eta(Y)) - \nu\nu((L_X\eta)Y) \\
 &= \nu\nu((L_X\varphi)Y) + \nu\nu(\varphi L_X Y) + \nu\nu(\eta(Y)) \underbrace{\left( L_{cc\bar{X}}{}^{cc}\tilde{\xi} \right)}_{cc(L_X\xi)} + \underbrace{cc\tilde{\xi}}{}^{cc} \left( \underbrace{L_{cc\bar{X}}{}^{\nu\nu}(\eta(Y))}_{\nu\nu(L_X\eta(Y))} \right) \\
 &- \nu\nu(\varphi L_X Y) - \nu\nu(L_X\eta(Y)) {}^{cc}\tilde{\xi} + \nu\nu((L_X\eta)Y) {}^{cc}\tilde{\xi} \\
 &= \nu\nu((L_X\varphi)Y) + \underbrace{\left( \underbrace{\eta(Y)}_0 \right) {}^{cc}(\widetilde{L_X\xi})}_{\nu\nu(L_X\eta(Y))} + \nu\nu((L_X\eta)Y) {}^{cc}\tilde{\xi} = \nu\nu((L_X\varphi)Y) + \nu\nu((L_X\eta)Y) {}^{cc}\tilde{\xi} \\
 \text{(iv)} \quad & (L_{cc\bar{X}}\tilde{J}){}^{cc}\tilde{Y} = L_{cc\bar{X}} \left( \underbrace{cc\tilde{\varphi}}{}^{\nu\nu}\xi \otimes \nu\nu\eta + \underbrace{cc\tilde{\xi}}{}^{cc}\xi \otimes cc\eta \right) {}^{cc}\tilde{Y} - \left( \underbrace{cc\tilde{\varphi}}{}^{\nu\nu}\xi \otimes \nu\nu\eta + \underbrace{cc\tilde{\xi}}{}^{cc}\xi \otimes cc\eta \right) L_{cc\bar{X}}{}^{cc}\tilde{Y}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \underbrace{L_{cc_X}^{cc} \widetilde{\varphi}^{cc} \widetilde{Y}}_{\substack{cc(L_X \varphi Y) \\ cc((L_X \varphi)Y) + cc(\varphi L_X Y)}} - L_{cc_{\widetilde{X}}}^{vv} \xi^{vv} \underbrace{(\eta(Y))}_0 + \underbrace{L_{cc_{\widetilde{X}}}^{cc} \widetilde{\xi}^{cc} (\eta(Y))}_{cc(\eta(Y)) \left( L_{cc_{\widetilde{X}}}^{cc} \widetilde{\xi} \right) + cc \widetilde{\xi}^{cc} L_{cc_{\widetilde{X}}}^{cc} (\eta(Y))} - \underbrace{cc \widetilde{\varphi} L_{cc_{\widetilde{X}}}^{cc} \widetilde{Y}}_{cc(\varphi L_X Y)} \\
 &+ \underbrace{vv \eta^{cc} (L_X Y)}_{vv(\eta(L_X Y))} \underbrace{vv \xi}_{cc(L_X \eta(Y)) - cc((L_X \eta)Y)} - \underbrace{cc (\eta(L_X Y))}_{cc(L_X \eta(Y)) - cc((L_X \eta)Y)} \underbrace{cc \widetilde{\xi}}_{cc \widetilde{\xi}} \\
 &= \underbrace{cc (\overline{(L_X \varphi)Y})}_{cc(\overline{(L_X \varphi)Y})} + \underbrace{cc (\overline{\varphi L_X Y})}_{cc(\overline{\varphi L_X Y})} + \underbrace{cc (\eta(Y))}_0 \left( L_{cc_{\widetilde{X}}}^{cc} \widetilde{\xi} \right) + \underbrace{cc \widetilde{\xi}^{cc} L_{cc_{\widetilde{X}}}^{cc} (\eta(Y))}_{cc(L_X \eta(Y))} \\
 &- \underbrace{cc (\overline{\varphi L_X Y})}_{cc(\overline{\varphi L_X Y})} + \underbrace{vv (\eta(L_X Y))}_{vv(\eta(L_X Y))} \underbrace{vv \xi}_{cc(L_X \eta(Y)) - cc((L_X \eta)Y)} - \underbrace{cc (L_X \eta(Y))}_{cc(L_X \eta(Y)) - cc((L_X \eta)Y)} \underbrace{cc \widetilde{\xi}}_{cc \widetilde{\xi}} + \underbrace{cc ((L_X \eta)Y)}_{cc((L_X \eta)Y)} \underbrace{cc \widetilde{\xi}}_{cc \widetilde{\xi}} \\
 &= \underbrace{cc (\overline{(L_X \varphi)Y})}_{cc(\overline{(L_X \varphi)Y})} + \underbrace{vv (\eta(L_X Y))}_{vv(L_X \eta(Y)) - vv((L_X \eta)Y)} \underbrace{vv \xi}_{vv \xi} + \underbrace{cc ((L_X \eta)Y)}_{cc((L_X \eta)Y)} \underbrace{cc \widetilde{\xi}}_{cc \widetilde{\xi}} \\
 &= \underbrace{cc (\overline{(L_X \varphi)Y})}_{cc(\overline{(L_X \varphi)Y})} - \underbrace{vv \xi^{vv} (L_X \eta(Y))}_{0} - \underbrace{vv ((L_X \eta)Y)}_{vv((L_X \eta)Y)} \underbrace{vv \xi}_{vv \xi} + \underbrace{cc ((L_X \eta)Y)}_{cc((L_X \eta)Y)} \underbrace{cc \widetilde{\xi}}_{cc \widetilde{\xi}} \\
 &= \underbrace{cc (\overline{(L_X \varphi)Y})}_{cc(\overline{(L_X \varphi)Y})} - \underbrace{vv ((L_X \eta)Y)}_{vv((L_X \eta)Y)} \underbrace{vv \xi}_{vv \xi} + \underbrace{cc ((L_X \eta)Y)}_{cc((L_X \eta)Y)} \underbrace{cc \widetilde{\xi}}_{cc \widetilde{\xi}},
 \end{aligned}$$

Thus, we get the following corollary:

*Corollary 1.* We obtain different results if we set  $Y = \xi$ , i.e.,  $\eta(\xi) = 1$  and  $\widetilde{\xi} \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$  has the conditions of (18):

- (i)  $(L_{vv_X} \widetilde{J})^{vv} \xi = vv(L_X \xi)$ , (ii)  $(L_{vv_X} \widetilde{J})^{cc} \widetilde{\xi} = vv((L_X \varphi)\xi) + vv((L_X \eta)\xi) \underbrace{cc \widetilde{\xi}}_{cc \widetilde{\xi}}$ ,
- (iii)  $(L_{cc_{\widetilde{X}}} \widetilde{J})^{vv} \xi = vv((L_X \varphi)\xi) + \underbrace{cc (\overline{(L_X \varphi)\xi})}_{cc(\overline{(L_X \varphi)\xi})} + vv((L_X \eta)\xi) \underbrace{cc \widetilde{\xi}}_{cc \widetilde{\xi}}$ ,
- (iv)  $(L_{cc_{\widetilde{X}}} \widetilde{J})^{cc} \widetilde{\xi} = \underbrace{cc (\overline{(L_X \varphi)\xi})}_{cc(\overline{(L_X \varphi)\xi})} - \underbrace{vv(L_X \xi)}_{vv(L_X \xi)} - \underbrace{vv((L_X \eta)\xi)}_{vv((L_X \eta)\xi)} \underbrace{vv \xi}_{vv \xi} + \underbrace{cc((L_X \eta)\xi)}_{cc((L_X \eta)\xi)} \underbrace{cc \widetilde{\xi}}_{cc \widetilde{\xi}}$ .

*Definition 1.* Let  $X$  and  $J$  be respectively vector field and tensor field of type (1,1) on  $M_n$ . A vector field  $X$  is called infinitesimal automorphism with respect to almost contact structure  $J$  if there is  $L_X J = 0$ , where  $(L_X J)(Y) = L_X(JY) - JL_X Y = [X, JY] - f[X, Y]$  for any  $Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$  and  $L_X$  denotes the Lie derivative along  $X$  [22].

Using Theorem 1 and Definition 1, we have:

*Theorem 2.* Let  $\tilde{X}, \tilde{Y}$  and  $\eta$  be respectively projectable vector fields with projections  $X, Y$  on base manifold  $M_n$  and a 1-form providing the condition  $\eta(Y)=0$  on  $B_m$ . Then,  ${}^v X$  and  ${}^c \tilde{X}$  are infinitesimal automorphisms with respect to almost contact structure  $\tilde{J}$  in semi-tangent bundle  $t(B_m)$  defined by (20) if and only if  $L_X \varphi = 0$  and  $L_X \eta = 0$ , where  $\tilde{\varphi} \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$ .

**Acknowledgment.** This study was supported by Scientific and Technological Research Council of Turkey (TUBITAK) under the Grant Number (TBAG-1001, MFAG-122F131). The authors thank to TUBITAK for their supports.

## References

- [1] Blair DE. Contact Manifolds in Riemannian Geometry. Lecture Notes in Maths, Vol. 509, New York: Springer Verlag, 1976.
- [2] Çayır H, Koseogolu G. Lie derivatives of almost contact structure and almost paracontact structure with respect to  ${}^cX$  and  ${}^vX$  on tangent bundle  $T(M)$ . New Tr. in Math. Sci., 4 (1) (2016), 153-159.
- [3] Das Lovejoy S. Fiberings on almost r.contact manifolds. Publicationes Mathematicae, Debrecen, Hungary 1993; 43: 161-167.
- [4] Husemoller D. Fibre Bundles. New York: Springer, 1994.
- [5] Lawson HB, Michelsohn ML. Spin Geometry. Princeton: Princeton University Press, 1989.
- [6] Omran T, Sharffuddin A, Husain SI. Lift of Structures on Manifolds. Publications de l'Institut Mathematique,, Nouvelle serie 1984; 360 (50): 93-97.
- [7] Oproiu V. Some remarkable structures and connections defined on the tangent bundle. Rendiconti di Matematica 1973; 3 (6): 503-540.
- [8] Ostianu N.M. Step-fibred spaces. Tr. Geom. Sem. 5, Moscow: (VINITI) 1974; 259-309.
- [9] Polat M, Yıldırım F. Complete lifts of projectable linear connection to semi-tangent bundle. Honam Mathematical J., 2021; 43 (3): 483-501. <https://doi.org/10.5831/HMJ.2021.43.3.483>
- [10] Pontryagin LS. Characteristic cycles on differentiable manifolds. Rec. Math. (Mat. Sbornik) N.S. 1947; 21 (63): 233-284.
- [11] Poor WA. Differential Geometric Structures. New York: McGraw-Hill, 1981.
- [12] Salimov AA. Tensor Operators and Their applications. New York: Nova Sci. Publ., 2013.
- [13] Salimov AA, Cayır H. Some Notes On Almost Paracontact Structures. Comptes Rendus de l'Academie Bulgare Des Sciences 2013; 66 (3): 331-338.
- [14] Salimov AA, Kadioglu E. Lifts of Derivations to the Semi-tangent Bundle. Turk J. Math. 2000; 24 (3): 259-266.
- [15] Salimov AA. Applications of Holomorphic Functions in Geometry. Birkhauser: Springer, 2023.
- [16] Sasaki S. On The Differential Geometry of Tangent Bundles of Riemannian Manifolds. Tohoku Math. J. 1958; 10 (3): 338-358. <https://doi.org/10.2748/tmj/1178244668>
- [17] Steenrod N. The Topology of Fibre Bundles. Princeton: Princeton University Press., 1951.

- [18] Şahin B, Akyol MA. Golden maps between Golden Riemannian manifolds and constancy of certain maps. *Math. Com.* 2014; 19 (2): 333–342.
- [19] Vishnevskii V, Shirokov AP, Shurygin VV. Spaces over Algebras. Kazan: Kazan Gos. Univ., 1985 (in Russian).
- [20] Vishnevskii VV. Integrable affinor structures and their plural interpretations. *Geometry, 7.J. Math. Sci. (New York)* 2002; 108 (2): 151-187.
- [21] Yano K, Ishihara S. *Tangent and Cotangent Bundles*. New York: Marcel Dekker Inc., 1973.
- [22] Vanžura J. Integrability conditions for polynomial structures. *Ködai Math. Sem. Rep.* 1976; 27, 42-50.

# On Lie Differentiability Conditions of Some Polynomial Structures in Semi Tangent Bundle

Kursat Akbulut<sup>1</sup>

Furkan Yıldırım<sup>2</sup>

Imran Gunes<sup>3</sup>

## Abstract

In popular differential geometry, the tensor structures on smooth manifolds are remarkable geometric objects. In reality, every tensor structure is a polynomial structure. A tensor field  $f$  of type  $(1,1)$  on a differentiable manifold is called a polynomial structure if it satisfies the algebraic equation  $f^n + a_1 f^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} f + a_n I = 0$ , where  $I$  is the identity tensor of type  $(1,1)$  and  $a_1, a_2, \dots, a_n$  are real numbers. The Lie differentiability conditions of some polynomial structures (almost contact and almost paracontact structures) in semi-tangent bundle  $\tau(M)$  are examined in this study.

## 1. Introduction

Let  $B_m$  and  $M_n$  denote two differentiable manifolds of dimensions  $m$  and  $n$  respectively, let  $(M_n, \pi_1, B_m)$  be a differentiable bundle, and let  $\pi_1$  be the submersion  $\pi_1: M_n \rightarrow B_m$ . We may consider  $(x^i) = (x^a, x^\alpha)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ;  $a, b, \dots = 1, \dots, n - m$ ;  $\alpha, \beta, \dots = n - m + 1, \dots, n$  as local coordinates in a neighborhood  $\pi_1^{-1}(U)$ . Let  $B_m$  be the base manifold and  $\tilde{\pi}: T(B_m) \rightarrow B_m$  be the natural projection, and let  $T(B_m)$  be the tangent bundle over  $B_m$ . In this case, let  $T_p(B_m)$  represent in for the tangent

- 1 Prof. Dr., Ataturk University, Faculty of Sci., Department of Mathematics, Erzurum, Turkey, kakbulut@atauni.edu.tr, 0000-0002-2829-4712
- 2 Assoc. Prof. Dr., Ataturk University, Narman Vocational Training School, Erzurum, Turkey, furkan.yildirim@atauni.edu.tr, 0000-0003-0081-7857
- 3 Master Student, Ataturk University, Faculty of Sci., Department of Mathematics, Erzurum, Turkey, umran6575@gmail.com, 0009-0001-6368-7239

space at a  $p$ -point  $(p = x^a, x^\alpha) \in M_n, p = \pi_1(\tilde{p})$  on the base manifold  $B_m$ . If  $X^\alpha = dx^\alpha(X)$  are components of  $X$  in tangent space  $T_p(B_m)$  with respect to the natural base  $\{\partial_\alpha\} = \{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\}$ , then we have the set of all points,  $(x^a, x^\alpha, x^{\bar{\alpha}}), X^\alpha = x^{\bar{\alpha}} = y^\alpha, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \dots = n+1, \dots, n+m$ , is by definition, the semi-tangent bundle  $t(B_m)$  over the  $M_n$  manifold and the natural projection  $\pi_2 : t(B_m) \rightarrow M_n, \dim t(B_m) = n+m$ . Specifically, assuming  $n = m$ , the semi-tangent bundle [14]  $t(B_m)$  becomes a tangent bundle  $T(B_m)$ . Given a tangent bundle  $\tilde{\pi} : T(B_m) \rightarrow B_m$  and a natural projection  $\pi_1 : M_n \rightarrow B_m$ , the pullback bundle (for example see [4], [5], [7], [8], [9], [10], [17], [19], [20] is given by  $\pi_2 : t(B_m) \rightarrow M_n$  where

$$t(B_m) = \left\{ (x^a, x^\alpha), x^{\bar{\alpha}} \in M_n \times T_x(B_m) \mid \pi_1(x^a, x^\alpha) = \tilde{\pi}(x^\alpha, x^{\bar{\alpha}}) \right\}.$$

The induced coordinates  $(x^{a'}, \dots, x^{n-m'}, x^{1'}, \dots, x^{m'})$  with regard to  $\pi^{-1}(U)$  will be given by

$$\begin{cases} x^{a'} = x^{a'}(x^b, x^\beta), & a, b, \dots = 1, \dots, n-m \\ x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x^\beta), & \alpha, \beta, \dots = n-m+1, \dots, n. \end{cases} \tag{1}$$

If  $(x^{i'}) = (x^{a'}, x^{\alpha'})$  is another coordinate chart on  $M_n$ , the Jacobian matrices of (1) is given by [14]:

$$(A_j^{i'}) = \left( \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^b} & \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^\beta} \\ 0 & \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta} \end{pmatrix},$$

where  $i, j, \dots = 1, \dots, n$ .

If (1) is local coordinate system on  $M_n$ , then we have the induced fibre coordinates  $(x^{a'}, x^{\alpha'}, x^{\bar{\alpha}'})$  on the semi-tangent bundle (change of coordinates):

$$\begin{cases} x^{a'} = x^{a'}(x^b, x^\beta), & a, b, \dots = 1, \dots, n-m, \\ x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x^\beta), & \alpha, \beta, \dots = n-m+1, \dots, n, \\ x^{\bar{\alpha}'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta} y^\beta, & \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \dots = n+1, \dots, n+m, \end{cases} \tag{2}$$

The Jacobian matrices for (2) are as follows [14]:

$$\bar{A} = (A_{J'}^{I'}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^b} & \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^\beta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta} & 0 \\ 0 & y^\varepsilon \frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^\beta \partial x^\varepsilon} & \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

where  $I, J, \dots = 1, \dots, n + m$ . Then, we obtain

$$(A_{J'}^I) = \begin{pmatrix} A_{b'}^a & A_{\beta'}^\alpha & 0 \\ 0 & A_{\beta'}^\alpha & 0 \\ 0 & A_{\beta' \varepsilon'}^\alpha y^{\varepsilon'} & A_{\beta'}^\alpha \end{pmatrix}, \tag{4}$$

which is the Jacobian matrix of inverse (2).

This work examines lifts of various geometric objects (complete etc. lifts of tensor fields), which were previously examined in tangent bundles, as well as their applications in semi-tangent bundles. The theory of tangent bundles [21], which is popular in engineering, physics, and particularly differential geometry, has been the subject of a great deal of research [15]. The semi-tangent bundle taken into account in this work differs from the tangent bundle in that it specifies a pull-back bundle. The almost paracontact structure and almost contact structure in tangent bundles, as well as some of their properties, have been examined in [1], [2], [3], [7], [12], [13] and [16]. Numerous authors have researched the geometric characteristics of the semi-tangent bundle, including [14], [19], [20] and others. In [9], [19] and [20], it is known that projectable linear connections in semi-tangent bundles and some of their features have been studied.

The definition of Lie derivation and its most significant properties for semi-tangent bundle are introduced in the second part. The analysis of Lie derivatives of geometric structures in relation to the complete and vertical lift of  $(1, 0)$ -tensor field  $X$  for semi-tangent bundle is described in the final



part, which is the most crucial for the progress of the current inquiry. The additional data on Lie derivatives of the created geometric structures will be extensively used in future studies. Our aim is to examine Lie differentiability conditions of almost paracontact structure and almost contact structure in semi-tangent bundle  $tM$ .

### 2. Preliminaries

If  $f$  is a function on  $B_m$ , we write  ${}^{vv}f$  for the function on  $t(B_m)$  obtained by forming the composition of  $\pi : t(B_m) \rightarrow B_m$  and  ${}^v f = f \circ \pi_1$ , so that  ${}^{vv}f = {}^v f \circ \pi_2 = f \circ \pi_1 \circ \pi_2 = f \circ \pi$ .

Consequently,

$${}^{vv}f(x^a, x^\alpha, \bar{x}^\alpha) = f(x^\alpha) \tag{5}$$

is provided by the  ${}^{vv}f$  – vertical lift of the function  $f \in \mathfrak{F}_0^0(B_m)$  to  $t(B_m)$ . It should be observed that along every fiber of  $\pi : t(B_m) \rightarrow B_m$ , the value  ${}^{vv}f$  stays constant. If  $f = f(x^a, x^\alpha)$  is a function in  $M_n$ , on the other hand, we write  ${}^{cc}f$  for the function in  $t(B_m)$  defined by

$${}^{cc}f \# f ( \mathfrak{y} = \bar{f} \partial_\beta y = \hat{f} \partial_\beta \tag{6}$$

and name the complete lift  ${}^{cc}f$  of the function  $f$  [14].  ${}^{HH}f = {}^{cc}f - \nabla_\gamma f$  determines the  ${}^{HH}f$  – horizontal lift of the function  $f$  to  $t(B_m)$  where  $\nabla_\gamma f = \gamma \mathcal{N}f$ . Let  $X \in \mathfrak{F}_0^1(B_m)$  be  $(X = X^\alpha \partial_\alpha)$ . By using (3), we have the usual law  ${}^{vv}X' = \bar{A}({}^{vv}X)$  of coordinate transformation of a vector field on  $t(B_m)$  when

$${}^{vv}X : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ X^\alpha \end{pmatrix}, \tag{7}$$

is put in. The  $(1,0)$ –tensor field  ${}^{vv}X$  is called the vertical lift of  $X$  to semi-tangent bundle [20]. Let  $\omega \in \mathfrak{F}_1^0(B_m)$ , i.e.  $\omega = \omega_\alpha dx^\alpha$ . On putting

$${}^{vv}\omega : (0, \omega_\alpha, 0), \tag{8}$$

from (3), we easily see that  ${}^{vv}\omega = \overline{A}{}^{vv}\omega'$ . The vertical lift of  $\omega$  to  $t(B_m)$  is the name of the (0,1)-tensor field  ${}^{vv}\omega$  [20]. The complete lift  ${}^{cc}\omega \in \mathfrak{T}_1^0(t(B_m))$  of  $\omega \in \mathfrak{T}_1^0(B_m)$  with the components  $\omega_\alpha$  in  $B_m$  has the following components:

$${}^{cc}\omega : (0, y^\varepsilon \partial_\varepsilon \omega_\alpha, \omega_\alpha) \tag{9}$$

relative to the induced coordinates in the semi-tangent bundle [20]. Let  $\omega$  be a covector field on  $B_m$  with an affine connection  $\nabla$ . Then the components of the  ${}^{HH}\omega$  – horizontal lift of  $\omega$  have the form

$${}^{HH}\omega = {}^{cc}\omega - \nabla_\gamma \omega$$

in  $t(B_m)$ , where  $\nabla_\gamma \omega = \gamma \nabla \omega$ . The horizontal lift  ${}^{HH}\omega \in \mathfrak{T}_1^0(t(B_m))$  of  $\omega$  has the following components:

$${}^{HH}\omega : (0, \Gamma_\alpha^\varepsilon \omega_\varepsilon, \omega_\alpha)$$

relative to the induced coordinates in  $t(B_m)$ . Now, consider that there is given a  $(p, q)$  – tensor field  $S$  whose local expression is

$$S = S_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_p}} \otimes dx^{\beta_1} \otimes \dots \otimes dx^{\beta_q}$$

in base manifold  $B_m$  with  $\nabla$  – affine connection and a  $\nabla_\gamma S$  – tensor field defined by

$$\nabla_\gamma S = y^\varepsilon \nabla_\varepsilon S_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_p}} \otimes dx^{\beta_1} \otimes \dots \otimes dx^{\beta_q}$$

relative to the induced coordinates  $(x^a, x^\alpha, x^{\bar{\alpha}})$  in  $\pi^{-1}(U)$  in the semi-tangent bundle. Additionally, we define a  $\nabla_x S$  – tensor field in  $\pi^{-1}(U)$  by

$$\nabla_x S = \left( X^\varepsilon S_{\varepsilon\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} \right) \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_p}} \otimes dx^{\beta_1} \otimes \dots \otimes dx^{\beta_q}$$

and a  $\gamma S$  – tensor field in  $\pi^{-1}(U)$  by

$$\nabla S = \left( y^\varepsilon S_{\varepsilon\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} \right) \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\alpha_p}} \otimes dx^{\beta_1} \otimes \dots \otimes dx^{\beta_q}$$

relative to the induced coordinates  $(x^a, x^\alpha, \bar{x}^\alpha)$ ,  $U$  being an arbitrary coordinate neighborhood in  $B_m$ .

Next, we obtain  $\nabla_X S = {}^{vv}S_X$  for any  $X \in \mathfrak{F}_0^1(B_m)$  and  $S \in \mathfrak{F}_s^0(B_m)$  or  $S \in \mathfrak{F}_s^1(B_m)$ , where  $S_X \in \mathfrak{F}_{s-1}^0(B_m)$  or  $\mathfrak{F}_{s-1}^1(B_m)$ . The  ${}^{HH}S$ -horizontal lift of  $(p, q)$ -tensor field  $S$  in base manifold  $B_m$  to  $t(B_m)$  has the following equation:

$${}^{HH}S = {}^{cc}S - \nabla_\gamma S.$$

Assuming  $P, Q \in t(B_m)$ , we obtain

$$\nabla_\gamma(P \otimes Q) = {}^{vv}P \otimes (\nabla_\gamma Q) + (\nabla_\gamma P) \otimes {}^{vv}Q \text{ and } {}^{HH}(P \otimes Q) = {}^{HH}P \otimes {}^{vv}Q + {}^{vv}P \otimes {}^{HH}Q.$$

Assume  $\widetilde{X} \in \mathfrak{F}_0^1(M_n)$  is a projectable  $(1, 0)$ -tensor field with projection  $X = X^\alpha(x^\alpha)\partial_\alpha$ , i.e.  $\widetilde{X} = \widetilde{X}^a(x^a, x^\alpha)\partial_a + X^\alpha(x^\alpha)\partial_\alpha$ . Now, take into account  $\widetilde{X} \in \mathfrak{F}_0^1(M_n)$ , in that case complete lift  ${}^{cc}\widetilde{X}$  has components of the form [14]:

$${}^{cc}\widetilde{X} : \begin{pmatrix} \widetilde{X}^a \\ X^\alpha \\ y^\varepsilon \partial_\varepsilon X^\alpha \end{pmatrix} \tag{10}$$

relative to the coordinates  $(x^a, x^\alpha, \bar{x}^\alpha)$  on the semi-tangent bundle  $t(B_m)$ . For an arbitrary affiner field  $F \in \mathfrak{F}_1^1(B_m)$ , if (3) is taken into consideration, we may demonstrate that  $(\gamma F)' = \bar{A}(\gamma F)$ , where  $\gamma F$  is a  $(1, 0)$ -tensor field defined by [9]:

$$\gamma F : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y^\varepsilon F_\varepsilon^\alpha \end{pmatrix} \tag{11}$$

relative to the coordinates  $(x^a, x^\alpha, \bar{x}^\alpha)$ . For each projectable vector field  $\widetilde{X} \in \mathfrak{F}_0^1(M_n)$  [20], we well-know that the  ${}^{HH}\widetilde{X}$ -horizontal lift of  $\widetilde{X}$  to  $t(B_m)$  (see [9]) by  ${}^{HH}\widetilde{X} = {}^{cc}\widetilde{X} - \gamma(\nabla\widetilde{X})$ . In the above situation, a

differentiable manifold  $B_m$  has a projectable symmetric linear connection denoted by  $\nabla$ . We recall that  $\gamma(\nabla\widetilde{X})$ - vector field has components [9]:

$$\gamma(\nabla\widetilde{X}) : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y^\varepsilon \nabla_\varepsilon X^\alpha \end{pmatrix}$$

relative to the coordinates  $(x^a, x^\alpha, \bar{x}^\alpha)$  on  $t(B_m)$ .  $\nabla_\alpha X^\varepsilon$  being the covariant derivative of  $X^\varepsilon$ , i.e.,

$$(\nabla_\alpha X^\varepsilon) = \partial_\alpha X^\varepsilon + X^\beta \Gamma_{\beta\alpha}^\varepsilon.$$

Consequently, the  ${}^{HH}\widetilde{X}$ -horizontal lift of  $\widetilde{X}$  to  $t(B_m)$  contains the following components [9]:

$${}^{HH}\widetilde{X} : \begin{pmatrix} \widetilde{X}^a \\ X^\alpha \\ -\Gamma_{\beta\alpha}^\alpha X^\beta \end{pmatrix} \tag{12}$$

relative to the coordinates  $(x^a, x^\alpha, \bar{x}^\alpha)$  on  $t(B_m)$  where

$$\Gamma_{\beta\alpha}^\alpha = y^\varepsilon \Gamma_{\varepsilon\beta}^\alpha. \tag{13}$$

Vertical lifts are given by the following relations:

$${}^{vv}(P \otimes Q) = {}^{vv}P \otimes {}^{vv}Q, \quad {}^{vv}(P + R) = {}^{vv}P + {}^{vv}R \tag{14}$$

to an algebraic isomorphism (unique) of the  $\mathfrak{Z}(B_m)$ -tensor algebra into the  $\mathfrak{Z}(t(B_m))$ -tensor algebra with respect to constant coefficients. Where  $P, Q$  and  $R$  being arbitrary elements of  $t(B_m)$ . For an arbitrary affinor field  $F \in \mathfrak{Z}_1^1(B_m)$ , if (3) is taken into consideration, we may demonstrate that  ${}^{vv}F_{j'}^{i'} = A_r^{i'} A_j^{r'} ({}^{vv}F_{j'}^{i'})$ , where  ${}^{vv}F$  is a  $(1,1)$ -tensor field defined by [20]:

$${}^{vv}F : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_\beta^\alpha & 0 \end{pmatrix} \tag{15}$$

relative to the coordinates  $(x^a, x^\alpha, \bar{x}^\alpha)$ . The  $(1,1)$ -tensor field (15) is called the vertical lift of affiner field  $F$  to  $t(B_m)$  [20]. Complete lifts are given by the following relations:

$${}^{cc}(P + R) = {}^{cc}P + {}^{cc}R, \quad {}^{cc}(P \otimes Q) = {}^{cc}P \otimes {}^{vv}Q + {}^{vv}P \otimes {}^{cc}Q, \quad (16)$$

to an algebraic isomorphism (unique) of the  $\mathfrak{S}(B_m)$ -tensor algebra into the  $\mathfrak{S}(t(B_m))$ -tensor algebra with respect to constant coefficients. Where  $P$ ,  $Q$  and  $R$  being arbitrary elements of  $t(B_m)$ . For an arbitrary projectable affiner field  $\tilde{F} \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$  [20] with projection  $F = F_\beta^\alpha(x^\alpha)\partial_\alpha \otimes dx^\beta$  i.e.  $\tilde{F}$  has components

$$\tilde{F} : \begin{pmatrix} \tilde{F}_b^a(x^a, x^\alpha) & \tilde{F}_\beta^a(x^a, x^\alpha) \\ 0 & \tilde{F}_\beta^\alpha(x^\alpha) \end{pmatrix}$$

relative to the coordinates  $(x^a, x^\alpha)$ . If (3) is taken into consideration, we may demonstrate that  ${}^{cc}\tilde{F}^{I'} = A_{I'}^I A_J^{I'} ({}^{cc}\tilde{F}^{J'})$ , where  ${}^{cc}\tilde{F}$  is a  $(1,1)$ -tensor field defined by [20]:

$${}^{cc}\tilde{F} : \begin{pmatrix} \tilde{F}_b^a & \tilde{F}_\beta^a & 0 \\ 0 & F_\beta^\alpha & 0 \\ 0 & y^\varepsilon \partial_\varepsilon F_\beta^\alpha & F_\beta^\alpha \end{pmatrix}, \quad (17)$$

relative to the coordinates  $(x^a, x^\alpha, \bar{x}^\alpha)$ . The  $(1,1)$ -tensor field (17) is called the complete lift of affiner field  $F$  to semi-tangent bundle  $t(B_m)$  [20]. We will now give below some important equations that we will use.

*Lemma 1.* Let  $\tilde{X}, \tilde{Y}$  and  $\tilde{F}$  be projectable vector and  $(1,1)$ -tensor fields on  $M_n$  with projections  $X, Y$  and  $F$  on base manifold  $B_m$ , respectively. If  $f \in \mathfrak{S}_0^0(B_m)$ ,  $\omega \in \mathfrak{S}_1^0(B_m)$  and  $I = id_{B_m}$ , then [17], [18] yerine [19], [20]:

$$\begin{aligned} & (i) \quad {}^{vv}\omega \, {}^{vv}X = 0, \quad (ii) \quad {}^{cc}\tilde{X} \, {}^{vv}f = {}^{vv}(Xf), \quad (iii) \quad {}^{vv}\omega \left( {}^{cc}\tilde{X} \right) = {}^{vv}(\omega(X)) \\ & , \quad (iv) \quad {}^{vv}F \, {}^{cc}\tilde{X} = {}^{vv}(FX), \end{aligned}$$

$$(v) {}^{vv}X {}^{cc}f = {}^{vv}(Xf), \quad (vi) {}^{cc}(\widetilde{fX}) = {}^{cc}f {}^{vv}X + {}^{vv}f {}^{cc}\widetilde{X} = {}^{cc}(\widetilde{Xf}), \quad (vii) \\ {}^{vv}I {}^{cc}\widetilde{X} = {}^{vv}X, \quad (viii) {}^{cc}\widetilde{I} = \widetilde{I},$$

$$(ix) \left[ {}^{vv}X, {}^{cc}\widetilde{Y} \right] = {}^{vv}[X, Y], \quad (x) {}^{cc}\omega({}^{vv}X) = {}^{vv}(\omega(X)), \quad (xi) {}^{vv}F {}^{vv}X = 0 \\ , \quad (xii) {}^{cc}\widetilde{F} {}^{vv}X = {}^{vv}(FX)$$

$$(xiii) {}^{cc}\widetilde{X} {}^{cc}f = {}^{cc}(Xf), \quad (xiv) {}^{cc}\omega({}^{cc}\widetilde{X}) = {}^{cc}(\omega X), \quad (xv) {}^{cc}(\widetilde{FX}) = {}^{cc}\widetilde{F} {}^{cc}\widetilde{X} \\ , \quad (xvi) {}^{vv}(fX) = {}^{vv}f {}^{vv}X,$$

$$(xvii) {}^{vv}I {}^{vv}X = 0, \quad (xviii) \left[ {}^{cc}\widetilde{X}, {}^{cc}\widetilde{Y} \right] = {}^{cc}[\widetilde{X}, \widetilde{Y}], \quad (xix) {}^{vv}(f\omega) = {}^{vv}f {}^{vv}\omega \\ , \quad (xx) {}^{vv}X {}^{vv}f = 0,$$

$$(xxi) \left[ {}^{vv}X, {}^{vv}Y \right] = 0.$$

### 3. Main Results

Let an  $m$ -dimensional differentiable manifold  $B_m$  ( $m = 2k + 1, k \geq 0$ ) be endowed with a projectable  $(1, 1)$ -tensor field  $\widetilde{\varphi} \in \mathfrak{T}_1^1(M_n)$  [20] with projection  $\varphi = \varphi_\beta^\alpha(x^\alpha)\partial_\alpha \otimes dx^\beta$  i.e., a projectable  $(1, 0)$ -tensor field  $\widetilde{\xi} \in \mathfrak{T}_0^1(M_n)$  with projection  $\xi = \xi^\alpha(x^\alpha)\partial_\alpha$  i.e.  $\widetilde{\xi} = \widetilde{\xi}^a(x^\alpha, x^\alpha)\partial_a + \xi^\alpha(x^\alpha)\partial_\alpha$  [20], a 1-form  $\eta$ ,  $I$  be an identity and let them satisfy

$$\widetilde{\varphi}^2 = -I + \eta \otimes \widetilde{\xi}, \quad \widetilde{\varphi}(\widetilde{\xi}) = 0, \quad \eta \circ \widetilde{\varphi} = 0, \quad \eta(\widetilde{\xi}) = 1. \quad (18)$$

Then  $(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\xi}, \eta)$  define almost contact structure on  $B_m$  (see, for example [6], [11], [12], [16], [19], [23]). Taking account of (18) we obtain

$$\left( {}^{cc}\widetilde{\varphi} \right)^2 = -I + {}^{vv}\eta \otimes {}^{cc}\widetilde{\xi} + {}^{cc}\eta \otimes {}^{vv}\xi, \quad (19)$$

$${}^{cc}\widetilde{\varphi} {}^{vv}\xi = 0, \quad {}^{vv}\eta \circ {}^{cc}\widetilde{\varphi} = 0, \quad {}^{vv}\eta \circ {}^{cc}\widetilde{\varphi} = 0,$$

$${}^{cc}\eta \circ {}^{cc}\widetilde{\varphi} = 0, \quad {}^{vv}\eta({}^{vv}\xi) = 0, \quad {}^{vv}\eta({}^{cc}\widetilde{\xi}) = 1, \quad {}^{cc}\eta({}^{vv}\xi) = 1, \quad {}^{cc}\eta({}^{cc}\widetilde{\xi}) = 0, \quad [20]$$

Using (18) and (19) we define a  $(1, 1)$  tensor field  $\widetilde{J}$  on  $t(B_m)$  by

$$\widetilde{J} = {}^{cc}\widetilde{\varphi} - {}^{vv}\xi \otimes {}^{vv}\eta + {}^{cc}\widetilde{\xi} \otimes {}^{cc}\eta \quad (20)$$

Then it is easy to show that  $\widetilde{J}^2 {}^{vv}X = -{}^{vv}X$  and  $\widetilde{J}^2 {}^{cc}\widetilde{X} = -{}^{cc}\widetilde{X}$ , which give that  $\widetilde{J}$  is an almost contact structure on  $t(B_m)$ . We get from (20)

$$\begin{aligned} \tilde{J}{}^{vv}X &= {}^{vv}(\varphi X) + {}^{vv}(\eta(X)){}^{cc}\tilde{\xi}, \\ \tilde{J}{}^{cc}\tilde{X} &= {}^{cc}(\widetilde{\varphi X}) - {}^{vv}(\eta(X)){}^{vv}\xi + {}^{cc}(\eta(X)){}^{cc}\tilde{\xi} \end{aligned}$$

for any  $\tilde{X} \in \mathfrak{Z}_0^1(M_n)$ .

Let an  $m$ -dimensional differentiable manifold  $B_m$  ( $m=2k+1, k \geq 0$ ) be endowed with a projectable  $(1,1)$ -tensor field  $\tilde{\varphi} \in \mathfrak{Z}_1^1(M_n)$  [20] with projection  $\varphi = \varphi_\beta^\alpha(x^\alpha)\partial_\alpha \otimes dx^\beta$  i.e., a projectable  $(1,0)$ -tensor field  $\tilde{\xi} \in \mathfrak{Z}_0^1(M_n)$  with projection  $\xi = \xi^\alpha(x^\alpha)\partial_\alpha$  i.e.  $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}^a(x^\alpha, x^a)\partial_a + \xi^\alpha(x^\alpha)\partial_\alpha$  [20], a 1-form  $\eta$ ,  $I$  be an identity and let them satisfy

$$\tilde{\varphi}^2 = I - \eta \otimes \tilde{\xi}, \quad \tilde{\varphi}(\tilde{\xi}) = 0, \quad \eta \circ \tilde{\varphi} = 0, \quad \eta(\tilde{\xi}) = 1. \tag{21}$$

Then  $(\tilde{\varphi}, \tilde{\xi}, \eta)$  define almost paracontact structure on  $B_m$  (see, for example [2], [3], [6], [13], [21]). We continue taking complete and vertical lifts from (21):

$$({}^{cc}\tilde{\varphi})^2 = I - {}^{vv}\eta \otimes {}^{cc}\tilde{\xi} - {}^{cc}\eta \otimes {}^{vv}\xi, \tag{22}$$

$$\begin{aligned} {}^{cc}\tilde{\varphi}{}^{vv}\xi &= 0, \quad {}^{cc}\tilde{\varphi}{}^{cc}\tilde{\xi} = 0, \quad {}^{vv}\eta{}^{cc}\tilde{\varphi} = 0, \\ {}^{cc}\eta \circ {}^{cc}\tilde{\varphi} &= 0, \quad {}^{vv}\eta({}^{vv}\xi) = 0, \quad {}^{vv}\eta({}^{cc}\tilde{\xi}) = 1, \quad {}^{cc}\eta({}^{vv}\xi) = 1, \quad {}^{cc}\eta({}^{cc}\tilde{\xi}) = 0, \end{aligned} \tag{20}.$$

Using (21) and (22), we define a  $(1,1)$  tensor field  $\tilde{J}$  on  $t(B_m)$  by

$$\tilde{J} = {}^{cc}\tilde{\varphi} - {}^{vv}\xi \otimes {}^{vv}\eta - {}^{cc}\tilde{\xi} \otimes {}^{cc}\eta \tag{23}$$

Then it is easy to show that  $\tilde{J}^2{}^{vv}X = {}^{vv}X$  and  $\tilde{J}^2{}^{cc}\tilde{X} = {}^{cc}\tilde{X}$ , which give that  $\tilde{J}$  is an almost product structure on  $t(B_m)$ . We get from (23)

$$\begin{aligned} \tilde{J}{}^{vv}X &= {}^{vv}(\varphi X) - {}^{vv}(\eta(X)){}^{cc}\tilde{\xi}, \quad \tilde{J}{}^{cc}\tilde{X} = {}^{cc}(\widetilde{\varphi X}) - {}^{vv}(\eta(X)){}^{vv}\xi - {}^{cc}(\eta(X)){}^{cc}\tilde{\xi}, \end{aligned}$$

for any  $\tilde{X} \in \mathfrak{Z}_0^1(M_n)$ , (see, for example [6]).

*Theorem 1.* In accordance with (23), we have the following for the  $L_X$ -operator Lie derivation with respect to  $\tilde{J} \in \mathfrak{Z}_1^1(t(B_m))$  and  $\eta(Y) = 0$ :

$$(i) (L_{v_X}\tilde{J}){}^{vv}Y = 0, \quad (ii) (L_{v_X}\tilde{J}){}^{cc}Y = {}^{vv}((L_X\varphi)Y) - {}^{vv}((L_X\eta)Y) {}^{cc}\tilde{\xi},$$

$$(iii) \left( L_{cc\tilde{X}} \tilde{J} \right)^{\nu\nu} Y = {}^{\nu\nu} \left( (L_X \varphi) Y \right) - {}^{\nu\nu} \left( (L_X \eta) Y \right)^{cc} \tilde{\xi},$$

$$(iv) \left( L_{cc\tilde{X}} \tilde{J} \right)^{cc} Y = {}^{cc} \left( \overline{(L_X \varphi) Y} \right) - {}^{\nu\nu} \left( (L_X \eta) Y \right)^{\nu\nu} \xi - {}^{cc} \left( (L_X \eta) Y \right)^{cc} \tilde{\xi},$$

where  $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{\xi} \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$  are projectable  $(1,0)$ -tensor fields,  $\eta \in \mathfrak{S}_1^0(M_n)$  is a 1-form and  $\tilde{\varphi} \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$  is a projectable  $(1,1)$ -tensor field.

*Proof 1.* For  $\tilde{J} = {}^{cc} \tilde{\varphi} - {}^{\nu\nu} \xi \otimes {}^{\nu\nu} \eta - {}^{cc} \tilde{\xi} \otimes {}^{cc} \eta$  and  $\eta(Y) = 0$ , we obtain

$$\begin{aligned} \wp(L_{\nu\nu X} \tilde{J})^{\nu\nu} Y &= L_{\nu\nu X} \left( {}^{cc} \tilde{\varphi} - {}^{\nu\nu} \xi \otimes {}^{\nu\nu} \eta - {}^{cc} \tilde{\xi} \otimes {}^{cc} \eta \right)^{\nu\nu} Y - \underbrace{\left( {}^{cc} \tilde{\varphi} - {}^{\nu\nu} \xi \otimes {}^{\nu\nu} \eta - {}^{cc} \tilde{\xi} \otimes {}^{cc} \eta \right) L_{\nu\nu X}^{\nu\nu} Y}_0 \\ &= \underbrace{L_{\nu\nu X}^{\nu\nu} (\varphi Y)}_0 - L_{\nu\nu X}^{\nu\nu} \xi \left( \underbrace{{}^{\nu\nu} \eta^{\nu\nu} (Y)}_0 \right) - L_{\nu\nu X}^{cc} \tilde{\xi} \left( \underbrace{\eta(Y)}_0 \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ii) (L_{\nu\nu X} \tilde{J})^{cc} \tilde{Y} &= L_{\nu\nu X} \left( {}^{cc} \tilde{\varphi} - {}^{\nu\nu} \xi \otimes {}^{\nu\nu} \eta - {}^{cc} \tilde{\xi} \otimes {}^{cc} \eta \right)^{cc} \tilde{Y} - \left( {}^{cc} \tilde{\varphi} - {}^{\nu\nu} \xi \otimes {}^{\nu\nu} \eta - {}^{cc} \tilde{\xi} \otimes {}^{cc} \eta \right) L_{\nu\nu X}^{cc} \tilde{Y} \\ &= \underbrace{L_{\nu\nu X}^{cc} \tilde{\varphi}^{cc} \tilde{Y}}_{\substack{(L_{\nu\nu X}^{cc} \tilde{\varphi})^{cc} \tilde{Y} + {}^{cc} \tilde{\varphi} (L_{\nu\nu X}^{cc} \tilde{Y}) \\ {}^{\nu\nu} ((L_X \varphi) Y) \quad {}^{cc} \tilde{\varphi}^{\nu\nu} (L_X Y)}} - L_{\nu\nu X}^{\nu\nu} \xi \left( \underbrace{\eta(Y)}_0 \right) - \underbrace{L_{\nu\nu X}^{cc} \tilde{\xi}^{cc} (\eta(Y))}_{{}^{cc} (\eta(Y)) L_{\nu\nu X}^{cc} \tilde{\xi} + {}^{cc} \tilde{\xi} (L_{\nu\nu X}^{cc} (\eta(Y)))} - {}^{cc} \tilde{\varphi}^{\nu\nu} (L_X Y) \\ &\quad + \underbrace{{}^{\nu\nu} \eta^{\nu\nu} (L_X Y)^{\nu\nu} \xi}_0 + \underbrace{{}^{\nu\nu} (\eta(L_X Y))^{cc} \tilde{\xi}}_{{}^{\nu\nu} (L_X \eta(Y)) - {}^{\nu\nu} ((L_X \eta) Y)} \\ &= {}^{\nu\nu} ((L_X \varphi) Y) + {}^{cc} \tilde{\varphi}^{\nu\nu} (L_X Y) - \underbrace{{}^{cc} (\eta(Y)) L_{\nu\nu X}^{cc} \tilde{\xi}}_0 - {}^{cc} \tilde{\xi} \left( \underbrace{L_{\nu\nu X}^{cc} (\eta(Y))}_{{}^{\nu\nu} (L_X \eta(Y))} \right) \\ &\quad - {}^{cc} \tilde{\varphi}^{\nu\nu} (L_X Y) + {}^{\nu\nu} (L_X \eta(Y))^{cc} \tilde{\xi} - {}^{\nu\nu} ((L_X \eta) Y)^{cc} \tilde{\xi} \\ &= {}^{\nu\nu} ((L_X \varphi) Y) - {}^{\nu\nu} ((L_X \eta) Y)^{cc} \tilde{\xi}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (iii) (L_{cc\tilde{X}} \tilde{J})^{\nu\nu} Y &= L_{cc\tilde{X}} \left( {}^{cc} \tilde{\varphi} - {}^{\nu\nu} \xi \otimes {}^{\nu\nu} \eta - {}^{cc} \tilde{\xi} \otimes {}^{cc} \eta \right)^{\nu\nu} Y - \left( {}^{cc} \tilde{\varphi} - {}^{\nu\nu} \xi \otimes {}^{\nu\nu} \eta - {}^{cc} \tilde{\xi} \otimes {}^{cc} \eta \right) L_{cc\tilde{X}}^{\nu\nu} Y \\ &= L_{cc\tilde{X}}^{cc} \tilde{\varphi}^{\nu\nu} Y - L_{cc\tilde{X}} \left( {}^{\nu\nu} \eta^{\nu\nu} (Y) \right)^{\nu\nu} \xi - L_{cc\tilde{X}}^{\nu\nu} (\eta(Y))^{cc} \tilde{\xi} - {}^{cc} \tilde{\varphi} L_{cc\tilde{X}}^{\nu\nu} Y \\ &\quad + {}^{\nu\nu} \eta^{\nu\nu} (L_X Y)^{\nu\nu} \xi + {}^{\nu\nu} (\eta(L_X Y))^{cc} \tilde{\xi} \\ &= \underbrace{L_{cc\tilde{X}}^{cc} \tilde{\varphi}^{\nu\nu} Y - L_{cc\tilde{X}}^{\nu\nu} \xi \left( \underbrace{{}^{\nu\nu} \eta^{\nu\nu} (Y)}_0 \right)}_{\substack{{}^{\nu\nu} (L_X \varphi) Y \\ {}^{\nu\nu} ((L_X \varphi) Y)^{\nu\nu} \xi + {}^{\nu\nu} (\eta(L_X Y))}} - \underbrace{L_{cc\tilde{X}}^{cc} \tilde{\xi}^{\nu\nu} (\eta(Y))}_{{}^{\nu\nu} (\eta(Y)) (L_{cc\tilde{X}}^{cc} \tilde{\xi}) + {}^{cc} \tilde{\xi} (L_{cc\tilde{X}}^{\nu\nu} (\eta(Y)))} - \underbrace{{}^{cc} \tilde{\varphi} L_{cc\tilde{X}}^{\nu\nu} Y}_{{}^{\nu\nu} (\varphi L_X Y)} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & + \underbrace{{}^{vv}\eta \quad {}^{vv}(L_X Y)}_0 \quad {}^{vv}\xi + \underbrace{{}^{vv}(\eta(L_X Y))}_{{}^{vv}(L_X \eta(Y)) - {}^{vv}((L_X \eta)Y)} \quad {}^{cc}\tilde{\xi} \\
 = & \quad {}^{vv}((L_X \varphi)Y) + {}^{vv}(\varphi L_X Y) - {}^{vv}(\eta(Y)) \underbrace{\left( L_{cc\tilde{X}} \quad {}^{cc}\tilde{\xi} \right)}_{{}^{cc}(L_X \tilde{\xi})} - {}^{cc}\tilde{\xi} \left( \underbrace{L_{cc\tilde{X}} \quad {}^{vv}(\eta(Y))}_{{}^{vv}(L_X \eta(Y))} \right) \\
 & - {}^{vv}(\varphi L_X Y) + {}^{vv}(L_X \eta(Y)) \quad {}^{cc}\tilde{\xi} - {}^{vv}((L_X \eta)Y) \quad {}^{cc}\tilde{\xi} \\
 = & \quad {}^{vv}((L_X \varphi)Y) - \underbrace{\left( \underbrace{\eta(Y)}_0 \right)}_{cc} \underbrace{\left( \widetilde{L_X \xi} \right)}_{cc} - {}^{vv}((L_X \eta)Y) \quad {}^{cc}\tilde{\xi} \\
 = & \quad {}^{vv}((L_X \varphi)Y) - {}^{vv}((L_X \eta)Y) \quad {}^{cc}\tilde{\xi}, \\
 (iv) \quad & \left( L_{cc\tilde{X}} \tilde{J} \right) {}^{cc}\tilde{Y} = L_{cc\tilde{X}} \left( \underbrace{\tilde{\varphi} - {}^{vv}\xi \otimes {}^{vv}\eta - {}^{cc}\tilde{\xi} \otimes {}^{cc}\eta}_{cc} \right) {}^{cc}\tilde{Y} - \left( \underbrace{\tilde{\varphi} - {}^{vv}\xi \otimes {}^{vv}\eta - {}^{cc}\tilde{\xi} \otimes {}^{cc}\eta}_{cc} \right) L_{cc\tilde{X}} \quad {}^{cc}\tilde{Y} \\
 & + \underbrace{{}^{vv}\eta \quad {}^{cc}(L_X Y)}_{{}^{vv}(\eta(L_X Y))} \quad {}^{vv}\xi + \underbrace{{}^{cc}(\eta(L_X Y))}_{{}^{cc}(L_X \eta(Y)) - {}^{cc}((L_X \eta)Y)} \quad {}^{cc}\tilde{\xi} \\
 = & \quad {}^{cc}(\widetilde{(L_X \varphi)Y}) + {}^{cc}(\widetilde{\varphi L_X Y}) - \underbrace{{}^{cc}(\eta(Y))}_0 \left( L_{cc\tilde{X}} \quad {}^{cc}\tilde{\xi} \right) - {}^{cc}\tilde{\xi} \underbrace{{}^{cc}L_{cc\tilde{X}} \quad {}^{cc}(\eta(Y))}_{{}^{cc}(L_X \eta(Y))} \\
 & - {}^{cc}(\widetilde{\varphi L_X Y}) + {}^{vv}(\eta(L_X Y)) \quad {}^{vv}\xi + {}^{cc}(L_X \eta(Y)) \quad {}^{cc}\tilde{\xi} - {}^{cc}((L_X \eta)Y) \quad {}^{cc}\tilde{\xi} \\
 = & \quad {}^{cc}(\widetilde{(L_X \varphi)Y}) + \underbrace{{}^{vv}(\eta(L_X Y))}_{{}^{vv}(L_X \eta(Y)) - {}^{vv}((L_X \eta)Y)} \quad {}^{vv}\xi - {}^{cc}((L_X \eta)Y) \quad {}^{cc}\tilde{\xi} \\
 = & \quad {}^{cc}(\widetilde{(L_X \varphi)Y}) + \underbrace{{}^{vv}\xi \quad {}^{vv}(L_X \eta(Y))}_0 - {}^{vv}((L_X \eta)Y) \quad {}^{vv}\xi - {}^{cc}((L_X \eta)Y) \quad {}^{cc}\tilde{\xi} \\
 = & \quad {}^{cc}(\widetilde{(L_X \varphi)Y}) - {}^{vv}((L_X \eta)Y) \quad {}^{vv}\xi - {}^{cc}((L_X \eta)Y) \quad {}^{cc}\tilde{\xi},
 \end{aligned}$$

where  $\eta L_X Y = L_X \eta(Y) - (L_X \eta)Y$  and  $\widetilde{\varphi Y} \in \mathfrak{I}_0^1(M_n)$ . Thus, we get the following corollary:

*Corollary 1.* We obtain different results if we set  $Y = \xi$  i.e.,  $\eta(\xi) = 1$  and  $\tilde{\xi} \in \mathfrak{I}_0^1(M_n)$  has the conditions of (21):

$$\begin{aligned}
 & (i) \left( L_{\nu_X} \tilde{J} \right)^{\nu \xi} = -{}^{\nu} (L_X \xi), \quad (ii) \left( L_{\nu_X} \tilde{J} \right)^{cc \tilde{\xi}} = {}^{\nu \nu} \left( (L_X \varphi) \xi \right) - {}^{\nu \nu} \left( (L_X \eta) \xi \right)^{cc \tilde{\xi}}, \\
 & (iii) \left( L_{cc \tilde{X}} \tilde{J} \right)^{\nu \xi} = {}^{\nu \nu} \left( (L_X \varphi) \xi \right) - {}^{cc} \left( \widetilde{L_X \xi} \right) - {}^{\nu \nu} \left( (L_X \eta) \xi \right)^{cc \tilde{\xi}}, \\
 & (iv) \left( L_{cc \tilde{X}} \tilde{J} \right)^{cc \tilde{\xi}} = {}^{cc} \left( \widetilde{(L_X \varphi) \xi} \right) - {}^{\nu \nu} (L_X \xi) - {}^{\nu \nu} \left( (L_X \eta) \xi \right)^{\nu \xi} - {}^{cc} \left( (L_X \eta) \xi \right)^{cc \tilde{\xi}}.
 \end{aligned}$$

*Definition 1.* Let  $X$  and  $J$  be respectively vector field and tensor field of type (1,1) on  $M_n$ . A vector field  $X$  is called infinitesimal automorphism with respect to almost contact structure  $J$  if there is  $L_X J = 0$ , where  $(L_X J)(Y) = L_X(JY) - JL_X Y = [X, JY] - J[X, Y]$  for any  $Y \in \mathfrak{X}_0^1(M_n)$  and  $L_X$  denotes the Lie derivative along  $X$  [22].

Using Theorem 1 and Definition 1, we have:

*Theorem 2.* Let  $\tilde{X}, \tilde{Y}$  and  $\eta$  be respectively projectable vector fields with projections  $X, Y$  on base manifold  $M_n$  and a 1-form providing the condition  $\eta(Y) = 0$  on  $B_m$ . Then,  ${}^{\nu} X$  and  ${}^{cc} \tilde{X}$  are infinitesimal automorphism with respect to almost paracontact structure  $\tilde{J}$  in semi-tangent bundle  $t(B_m)$  defined by (23) if and only if  $L_X \varphi = 0$  and  $L_X \eta = 0$ , where  $\tilde{\varphi} \in \mathfrak{X}_1^1(M_n)$ .

**Acknowledgment.** This study was supported by Scientific and Technological Research Council of Turkey (TUBITAK) under the Grant Number (TBAG-1001, MFAG-122F131). The authors thank to TUBITAK for their supports.

## References

- [1] Blair DE. Contact Manifolds in Riemannian Geometry. Lecture Notes in Maths, Vol. 509, New York: Springer Verlag, 1976.
- [2] Çayır H, Koseogolu G. Lie derivatives of almost contact structure and almost paracontact structure with respect to  ${}^cX$  and  ${}^vX$  on tangent bundle  $T(M)$ . New Tr. in Math. Sci., 4 (1) (2016), 153-159.
- [3] Das Lovejoy S. Fiberings on almost r.contact manifolds. Publicationes Mathematicae, Debrecen, Hungary 1993; 43: 161-167.
- [4] Husemoller D. Fibre Bundles. New York: Springer, 1994.
- [5] Lawson HB, Michelsohn ML. Spin Geometry. Princeton: Princeton University Press, 1989.
- [6] Omran T, Sharffuddin A, Husain SI. Lift of Structures on Manifolds. Publications de l'Institut Mathematique,, Nouvelle serie 1984; 360 (50): 93-97.
- [7] Oproiu V. Some remarkable structures and connections defined on the tangent bundle. Rendiconti di Matematica 1973; 3 (6): 503-540.
- [8] Ostianu N.M. Step-fibred spaces. Tr. Geom. Sem. 5, Moscow: (VINITI) 1974; 259-309.
- [9] Polat M, Yıldırım F. Complete lifts of projectable linear connection to semi-tangent bundle. Honam Mathematical J., 2021; 43 (3): 483-501. <https://doi.org/10.5831/HMJ.2021.43.3.483>
- [10] Pontryagin LS. Characteristic cycles on differentiable manifolds. Rec. Math. (Mat. Sbornik) N.S. 1947; 21 (63): 233-284.
- [11] Poor WA. Differential Geometric Structures. New York: McGraw-Hill, 1981.
- [12] Salimov AA. Tensor Operators and Their applications. New York: Nova Sci. Publ., 2013.
- [13] Salimov AA, Cayır H. Some Notes On Almost Paracontact Structures. Comptes Rendus de l'Academie Bulgare Des Sciences 2013; 66 (3): 331-338.
- [14] Salimov AA, Kadioglu E. Lifts of Derivations to the Semi-tangent Bundle. Turk J. Math. 2000; 24 (3): 259-266.
- [15] Salimov AA. Applications of Holomorphic Functions in Geometry. Birkhauser: Springer, 2023.
- [16] Sasaki S. On The Differential Geometry of Tangent Bundles of Riemannian Manifolds. Tohoku Math. J. 1958; 10 (3): 338-358. <https://doi.org/10.2748/tmj/1178244668>
- [17] Steenrod N. The Topology of Fibre Bundles. Princeton: Princeton University Press., 1951.

- [18] Şahin B, Akyol MA. Golden maps between Golden Riemannian manifolds and constancy of certain maps. *Math. Com.* 2014; 19 (2): 333–342.
- [19] Vishnevskii V, Shirokov AP, Shurygin VV. *Spaces over Algebras*. Kazan: Kazan Gos. Univ., 1985 (in Russian).
- [20] Vishnevskii VV. Integrable affinor structures and their plural interpretations. *Geometry, 7.J. Math. Sci. (New York)* 2002; 108 (2): 151-187.
- [21] Yano K, Ishihara S. *Tangent and Cotangent Bundles*. New York: Marcel Dekker Inc., 1973.
- [22] Vanžura J. Integrability conditions for polynomial structures. *Ködai Math. Sem. Rep.* 1976; 27, 42-50.



# Ters Matris Yöntemi Kullanılarak Kosinüs Fonksiyonunun Kuvvetinin İntegralinin Hesaplanması

Ferit Gürbüz<sup>1</sup>

## Özet

Ters matris yöntemi kabaca  $N$  tane doğrusal eşitlik ve  $n$  tane bilinmeyenden oluşan denklem sisteminin çözümünde yararlanılan yöntemdir. Böyle bir denklem sistemi matris ve vektörler kullanarak  $Ax = b$  biçiminde ifade edilir. Burada  $A$  katsayılar matrisini,  $x$  çözüm vektörünü ve  $b$  de sabitler vektörünü verir. Eğer  $A$  matrisin tersi alınabilirse  $x$  in çözümü,  $x = A^{-1}b$  şeklindedir. Bu çalışmada, kosinüs fonksiyonunun integralini belirlemek için ters matris yöntemini kullandık. Elde ettiğimiz formül, kosinüs fonksiyonunun integralini bulmaya alternatif bir yol olarak kullanılabilir.

## 1. Giriş

Matrisler, doğrusal denklem sistemlerinin çözümünü bulma [1], formülleri basitleştirmek için doğrusal diferansiyel denklem sistemlerini matris biçiminde yazma [2] gibi birçok farklı matematiksel problemde kullanılabilir. 2014 yılında Matlak vd. [3], çift kuvvet ve tek kuvvet olarak sınıflandırılan sinüs fonksiyonlarının kuvvetlerinin belirsiz integralini bulmak için matris tersinin uygulamalarını verdi. Her şeyden önce, yazarlar [3] aşağıdaki diferansiyel denklem sisteminden bahsetmiştir.

$$\begin{aligned} f_1' &= a_{1,1}f_1 + \cdots + a_{1,n}f_n \\ f_2' &= a_{2,1}f_1 + \cdots + a_{2,n}f_n \\ &\vdots \\ f_n' &= a_{n,1}f_1 + \cdots + a_{n,n}f_n \end{aligned} \quad (1.1)$$

1 Prof. Dr., Kırklareli Üniversitesi Matematik Bölümü, feritgurbuz@klu.edu.tr, 0000-0003-3049-688X

sistemi

$$\begin{pmatrix} f_1' \\ \vdots \\ f_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}f_1 + \dots + a_{1,n}f_n \\ \vdots \\ a_{n,1}f_1 + \dots + a_{n,n}f_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

şeklinde bir matris formunda yazılabilir.

Sistem (1.1) in  $A = [a_{i,j}]_{n \times n}$  matrisinin tekil olmadığını varsayalım.

Ayrıca, sistem (1.1) in  $(f_1, f_2, \dots, f_n)^T$  çözümlerinin lineer eşleşmesini

aşağıdaki gibi

$$T \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1' \\ \vdots \\ f_n' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

$T$  olarak alalım ve  $g_1, g_2, \dots, g_n$  fonksiyonlarının denklem (1.1) sisteminin çözümü olduğunu varsayalım. Böylece,

$$T \begin{pmatrix} A^{-1} \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} \end{pmatrix} = AA^{-1} \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

olur. Eğer,

$$A^{-1} \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_n \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

ise bu durumda  $i = 1, 2, \dots, n$  için  $G_i$  ler  $g_i$  lerin belirsiz integrali olur. İntegrali bulmak için bir örnek olarak, Swartz'ın [4] makalesinden esinlenerek

$$g_1(x) = \cosh ax \sin bx \quad , \quad g_2(x) = \cosh ax \cos bx$$

$$g_3(x) = \sinh ax \cos bx \quad , \quad g_4(x) = \sinh ax \sin bx$$

fonksiyonlarını verebiliriz. Bu durumda, operatörler matris formunda şu şekilde yazılabilir:

$$T \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g'_1 \\ g'_2 \\ g'_3 \\ g'_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b & 0 & a \\ -b & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & -b \\ a & 0 & b & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{pmatrix}.$$

Eğer  $ab \neq 0$  ise  $T$  operatörünün matrisinin tersi şu şekildedir:

$$A^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} 0 & -b & 0 & a \\ b & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ a & 0 & -b & 0 \end{bmatrix}.$$

Bu nedenle,

$$\int g_1(x) dx = \frac{-bg_2(x) + ag_4(x)}{a^2 + b^2}$$

$$\int g_2(x) dx = \frac{bg_1(x) + ag_3(x)}{a^2 + b^2}$$

gibi integralleri bulmak mümkündür.

Bu çalışmada, kosinüs fonksiyonunun çift ve tek kuvvetlerinin belirsiz integralinin formüllerini ters matris kullanarak bulmak için bu yöntemi kullanacağız. Burada, integral sabitleri atlanmıştır ve bu kural bundan sonra da geçerli olacaktır.

Son olarak, çalışma boyunca çift faktöriyel (tüm  $n$  tam sayıları için) tanımı aşağıdaki gibi kullanılacaktır:

$$n!! = \begin{cases} \prod_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (n-2k) & , \quad n \geq 1 \text{ tek ise} \\ \prod_{k=0}^{\frac{n-2}{2}} (n-2k) & , \quad n \geq 2 \text{ çift ise} \\ 1 & , \quad n \leq 0 \text{ ise} \end{cases}$$



$$= \begin{cases} n(n-2)\cdots 1 & , \quad n \geq 1 \text{ tek ise} \\ n(n-2)\cdots 2 & , \quad n \geq 2 \text{ çift ise} \\ 1 & , \quad n \leq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

## 2 Ana Sonuçlar

### 2.1 $n$ tek olmak üzere $\cos^n x$ nin integrali

$n=1,3,5,\dots$  için  $g(x) = \cos^n x$  olsun. Bu durumda,  $g(x)$  in ikinci türevleri

$$(\cos^n x)' = (-n \cos^{n-1} x \sin x)' = n(n-1) \cos^{n-2} x - n^2 \cos^n x \quad \text{olur.}$$

Buradan  $g(x)$  in ikinci türev operatörünü aşağıdaki matris biçiminde yazabiliriz:

$$A_k \begin{pmatrix} \cos x \\ \cos^3 x \\ \vdots \\ \cos^k x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\cos x)^n \\ (\cos^3 x)^n \\ \vdots \\ (\cos^k x)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos x \\ 6\cos x - 9\cos^3 x \\ \vdots \\ k(k-1)\cos^{k-2} x - k^2 \cos^k x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 3 \cdot 2 & -3^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k(k-1) & -k^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \cos x \\ \cos^3 x \\ \vdots \\ \cos^k x \end{pmatrix},$$

burada  $k$  tek bir sayıdır.  $\det A_k = (-1)^{\frac{k+1}{2}} (k!!)^2 \neq 0$  olduğundan ve  $A_k$ ; [3] de  $\sin x$  fonksiyonunun tek kuvveti durumunda matrise karşılık geldiğinden, ters matris

$$A_k^{-1} = [a_{i,j}]_{\frac{k+1}{2} \times \frac{k+1}{2}}$$

şekindedir, burada

$$a_{i,j} = \begin{cases} 0 & , i < j \\ -\frac{1}{(2i-1)^2} & , i = j \\ -\frac{(n-2)!!}{n(n-1)!!} \frac{1}{(2i-1)} \frac{(2i-2)!!}{(2i-3)!!} & , i > j \end{cases}$$

dir.

(1.2) ve (1.3) den

$$\begin{pmatrix} \int(\int \cos x dx) dx \\ \int(\int \cos^3 x dx) dx \\ \vdots \\ \int(\int \cos^k x dx) dx \end{pmatrix} = A_k^{-1} \begin{pmatrix} \cos x \\ \cos^3 x \\ \vdots \\ \cos^k x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1, \frac{k+1}{2}} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2, \frac{k+1}{2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\frac{k+1}{2},1} & a_{\frac{k+1}{2},2} & \cdots & a_{\frac{k+1}{2}, \frac{k+1}{2}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \cos x \\ \cos^3 x \\ \vdots \\ \cos^k x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{1,1} \cos x + a_{1,2} \cos^3 x + \cdots + a_{1, \frac{k+1}{2}} \cos^k x \\ a_{2,1} \cos x + a_{2,2} \cos^3 x + \cdots + a_{2, \frac{k+1}{2}} \cos^k x \\ \vdots \\ a_{\frac{k+1}{2},1} \cos x + a_{\frac{k+1}{2},2} \cos^3 x + \cdots + a_{\frac{k+1}{2}, \frac{k+1}{2}} \cos^k x \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Böylece,

$$\begin{aligned} \int \left( \int \cos^k x dx \right) dx &= a_{\frac{k+1}{2}, 1} \cos x + a_{\frac{k+1}{2}, 2} \cos^3 x + \dots + a_{\frac{k+1}{2}, \frac{k+1}{2}} \cos^k x \\ &= -\frac{1}{k} \frac{(k-1)!!}{(k-2)!!} \left( \frac{(1-2)!!}{1(1-1)!!} \cos x + \frac{(3-2)!!}{3(3-1)!!} \cos^3 x + \frac{(k-2)!!}{k(k-1)!!} \cos^k x \right) \end{aligned}$$

olur.

$n = 1, 3, 5, \dots, k$  olduğu için

$$\int \left( \int \cos^n x dx \right) dx = -\frac{(n-1)!!}{n!!} \left( \sum_{i=0}^{(n-1)/2} \frac{1}{2i+1} \frac{(2i-1)!!}{(2i)!!} \cos^{2i+1} x \right) \quad (2.1)$$

bulunur. Sonra (2.1) de türev alınırsa,

$$\begin{aligned} \int \cos^n x dx &= -\frac{(n-1)!!}{n!!} \left( \sum_{i=0}^{(n-1)/2} \frac{d}{dx} \frac{1}{2i+1} \frac{(2i-1)!!}{(2i)!!} \cos^{2i+1} x \right) \\ &= -\frac{(n-1)!!}{n!!} \sin x \left( \sum_{i=0}^{(n-1)/2} \frac{(2i-1)!!}{(2i)!!} \cos^{2i} x \right) \end{aligned}$$

elde edilir.

Örneğin  $n=5$  olduğunda,

$$\begin{aligned} \int \cos^5 x dx &= \frac{(5-1)!!}{5!!} \sin x \left( \sum_{i=0}^{(5-1)/2} \frac{(2i-1)!!}{(2i)!!} \cos^{2i} x \right) \\ &= \frac{8}{15} \sin x + \frac{4}{15} \sin x \cos^2 x + \frac{1}{5} \sin x \cos^4 x \end{aligned}$$

olur.

## 2.2 $n$ çift olmak üzere $\cos^n x$ nin integrali

$n = 2, 4, 6, \dots$  için  $g_n(x) = \cos^n x - \frac{n-1}{n} \cos^{n-2} x$  olsun. Bu durumda,  $g_n(x)$  in ikinci türevleri

$$\begin{aligned}
(g_n(x))^n &= \left(\frac{n-1}{n}(n-2)\sin x \cos^{n-3} x - n \sin x \cos^{n-1} x\right)' \\
&= (n-2)^2(n-1)/n \left(\cos^{n-2} x - \frac{n-3}{n-2} \cos^{n-4} x\right) - n^2 \left(\cos^n x - \frac{n-1}{n} \cos^{n-2} x\right)
\end{aligned}$$

olur. Buradan  $g_n(x)$  in ikinci türev operatörünü aşağıdaki matris biçiminde yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
B_k \begin{pmatrix} g_2(x) \\ g_4(x) \\ \vdots \\ g_k(x) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (g_2(x))^n \\ (g_4(x))^n \\ \vdots \\ (g_k(x))^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -4 \left(\cos^2 x - \frac{1}{2}\right) \\ 3 \left(\cos^2 x - \frac{1}{2}\right) - 16 \left(\cos^4 x - \frac{3}{4} \cos^2 x\right) \\ \vdots \\ (k-2)^2(k-1)/k \left(\cos^{k-2} x - \frac{k-3}{k-2} \cos^{k-4} x\right) - k^2 \left(\cos^k x - \frac{k-1}{k} \cos^{k-2} x\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -2^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2^2 \hat{A}3/4 & -4^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (k-2)^2(k-1)/k & -k^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} g_2(x) \\ g_4(x) \\ \vdots \\ g_k(x) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

burada  $k$  çift bir sayıdır.  $\det B_k = (-1)^{\frac{k}{2}}(k!)^2 \neq 0$  olduğundan ve  $B_k$ ; [3] de  $\sin x$  fonksiyonunun çift kuvveti durumunda matrise karşılık geldiğinden, ters matris

$$B_k^{-1} = [b_{i,j}]_{\frac{k}{2} \times \frac{k}{2}}$$

şeklindedir, burada

$$b_{i,j} = \begin{cases} 0 & , i < j \\ -\frac{1}{(2i)^2} & , i = j \\ -\frac{1}{(2i)^2} \frac{(2i-1)!! (2j)!!}{(2j-1)!! (2i)!!} & , i > j \end{cases}$$

dir.

(1.2) ve (1.3) den

$$\begin{pmatrix} \int \left( \int \left( \cos^2 x - \frac{1}{2} \right) dx \right) dx \\ \int \left( \int \left( \cos^4 x - \frac{3}{4} \cos^2 x \right) dx \right) dx \\ \vdots \\ \int \left( \int \left( \cos^k x - \frac{k-1}{k} \cos^{k-2} x \right) dx \right) dx \end{pmatrix} = B_k^{-1} \begin{pmatrix} \left( \cos^2 x - \frac{1}{2} \right) \\ \left( \cos^4 x - \frac{3}{4} \cos^2 x \right) \\ \vdots \\ \left( \cos^k x - \frac{k-1}{k} \cos^{k-2} x \right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,\frac{k}{2}} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,\frac{k}{2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{\frac{k}{2},1} & b_{\frac{k}{2},2} & \cdots & b_{\frac{k}{2},\frac{k}{2}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \left( \cos^2 x - \frac{1}{2} \right) \\ \left( \cos^4 x - \frac{3}{4} \cos^2 x \right) \\ \vdots \\ \left( \cos^k x - \frac{k-1}{k} \cos^{k-2} x \right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_{1,1} \left( \cos^2 x - \frac{1}{2} \right) + b_{1,2} \left( \cos^4 x - \frac{3}{4} \cos^2 x \right) + \cdots + b_{1,\frac{k}{2}} \left( \cos^k x - \frac{k-1}{k} \cos^{k-2} x \right) \\ b_{2,1} \left( \cos^2 x - \frac{1}{2} \right) + b_{2,2} \left( \cos^4 x - \frac{3}{4} \cos^2 x \right) + \cdots + b_{2,\frac{k}{2}} \left( \cos^k x - \frac{k-1}{k} \cos^{k-2} x \right) \\ \vdots \\ b_{\frac{k}{2},1} \left( \cos^2 x - \frac{1}{2} \right) + b_{\frac{k}{2},2} \left( \cos^4 x - \frac{3}{4} \cos^2 x \right) + \cdots + b_{\frac{k}{2},\frac{k}{2}} \left( \cos^k x - \frac{k-1}{k} \cos^{k-2} x \right) \end{pmatrix}$$

elde edilir.

$A_k$  ile aynı şekilde,  $n$  çift olmak üzere aşağıdaki formülü elde ederiz:

$$\int \left( \int \cos^n x dx \right) dx = \frac{(n-1)!!}{n!!} \left( \frac{x^2}{2} - \sum_{i=1}^{n/2} \frac{(2i)!!}{(2i-1)!!(2i)^2} \cos^{2i} x \right). \quad (2.2)$$

Böylece, (2.2) de türev alınırsa

$$\begin{aligned} \int \cos^n x dx &= \frac{(n-1)!!}{n!!} \left( \frac{d}{dx} \frac{x^2}{2} - \sum_{i=1}^{n/2} \frac{(2i)!!}{(2i-1)!!(2i)^2} \cdot \frac{d}{dx} \cos^{2i} x \right) \\ &= \frac{(n-1)!!}{n!!} \left( x + \sin x \sum_{i=1}^{n/2} \frac{(2i-2)!!}{(2i-1)!!} \cos^{2i-1} x \right). \end{aligned}$$

olur.

### 3 Sonuçlar

Bu çalışmada, ters matris yöntemini kullanarak belirsiz bir integrali bulmayı ele aldık. Ele aldığımız fonksiyon kosinüs fonksiyonudur. İlgilenilen fonksiyon kosinüs fonksiyonudur. Amacımız ise, kosinüs fonksiyonunun tek ve çift kuvvetlerinin belirsiz integrallerinin formüllerini ters matris yöntemini kullanarak ayrı ayrı vermektir.

Çarpım fonksiyonlarının ve bileşke fonksiyonlarının  $n$ -kez diferansiyellenebilmesiyle elde edilen matrisin diğer bazı uygulamaları [5] de incelenmiştir. Ayrıca, çalışmada elde edilen formüller, trigonometrik özdeşlikleri üretmek için kullanılmıştır.

#### 4 Kaynakça

- [1] E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, 1993.
- [2] D. G. Zill, M. R. Cullen, *Differential Equations with Boundary-Value Problems*, 1997.
- [3] D. Matlak, J. Matlak, D. Slota, R. Witula, Differentiation and integration by using matrix inversion, *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics*, **13**, no.2, (2014), 63–71.
- [4] W. Swartz, Integration by matrix inversion, *The American Mathematical Monthly*, **4**, (1958), 282–283.
- [5] R. Redheffer, Induced transformations of the derivative - vector, *The American Mathematical Monthly*, **83** (1976), 255-259.

# Notes on Tachibana Operators in the Semi-Tangent Bundle Associated with Almost R-Contact Structure

Furkan Yıldırım <sup>1</sup>

Kursat Akbulut <sup>2</sup>

Gulnur Caglar <sup>3</sup>

## Abstract

Studying the horizontal lifts utilizing Tachibana operators along a generalized almost r-contact structure in a semi-tangent bundle is the goal of this work. Additionally, we demonstrate several theorems on Tachibana operators with lifts and Lie derivatives.

## 1. Introduction

The tensor structures on smooth manifolds are remarkable geometric objects in popular differential geometry. Many authors have made important contributions to this field. In 1947, Weil noticed that there exist in a complex space a  $(1,1)$ -tensor field (i.e., an affinor field)  $P$  whose square is minus unity [24]. Ehresmann and Libermann [8] researched and provided the prerequisites for a complex structure to generate an almost complex structure. A.G. Walker began researching so-called almost product spaces in 1955 and proved that a mixed tensor field exists whose square is unity instead of being minus unity as it is in the case of an almost complex space [23]. In 1965, K. Yano tries to make as clear as possible the analogy between the almost complex and almost product structures in [26]. All the tensor

- 
- 1 Assoc. Prof. Dr., Ataturk University, Narman Vocational Training School, Erzurum, Turkey, furkan.yildirim@atauni.edu.tr, 0000-0003-0081-7857
  - 2 Prof. Dr., Ataturk University, Faculty of Sci., Department of Mathematics, Erzurum, Turkey, kakbulut@atauni.edu.tr, 0000-0002-2829-4712
  - 3 Master Student, Ataturk University, Faculty of Sci., Department of Mathematics, Erzurum, Turkey, caglargulnur084@gmail.com, 0009-0004-2883-3052



structures are actually a polynomial structure ( $P$ -structures). In reality, all tensor structures are polynomial structures ( $P$ -structures). Affinor fields ( $(1,1)$ - tensor fields), which are roots of the algebraic equation

$$\varphi(P) = a_1P^1 + a_2P^2 + \dots + a_{(n-1)}P^{(n-1)} + a_nP^n = 0$$

in which  $I \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$  is the identity tensor, can be thought of as polynomial structures  $(a_1, a_2, \dots, a_n \in R)$ . Polynomial structures on a manifold we have talked about were defined as the following equations, (i) If  $\varphi(P) = P^2 + I = 0$ , then  $P$  is referred to as an almost complex structure. As a result, we have a smooth affinor field  $P$  such that  $P^2 = -I$  when regarded as a vector bundle isomorphism  $P : T(M_n) \rightarrow T(M_n)$  on the tangent bundle  $T(M_n)$ . Thus, we defined an almost-complex structure to be a linear bundle map  $P : T(M_n) \rightarrow T(M_n)$  with  $P^2 = -I$ . (ii) If  $\varphi(P) = P^2 - I = 0$ , then  $P$  is referred to as an almost product structure. That is to say, an almost-product structure on  $M_n$  is a field of endomorphisms of  $T(M_n)$ , i.e. an affinor field on  $M_n$ , so  $P^2 = I$ . (iii) If  $\varphi(P) = P^2 = 0$ , then  $P$  is referred to as an almost tangent structure [9]. Suppose  $B_m$  and  $M_n$  are two differentiable manifolds with dimensions  $m$  and  $n$ , respectively, and let  $\pi_1$  be the submersion (natural projection)  $\pi_1 : M_n \rightarrow B_m$ . We may consider  $(x_i) = (x^a, x^\alpha)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ;  $a, b, \dots = 1, \dots, n - m$ ;  $\alpha, \beta, \dots = n - m + 1, \dots, n$  as local coordinates in a neighborhood  $\pi_1^{-1}(U)$ . Let  $B_m$  be the base manifold and  $\tilde{\pi} : T(B_m) \rightarrow B_m$  be the natural projection, and let  $T(B_m)$  be the tangent bundle [27] over  $B_m$ . In this case, let  $T_p(B_m)$  represent in for the tangent space at a  $p$ -point  $(\tilde{p} = (x^a, x^\alpha) \in M_n, p = \pi_1(\tilde{p}))$  on the base manifold  $B_m$ . If  $X^\alpha = dx^\alpha(X)$  are components of  $X$  in tangent space  $T_p(B_m)$  with regard to the natural base  $\{\partial_\alpha\} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right\}$ , then we have the set of all points  $(x^a, x^\alpha, x^{\bar{\alpha}})$ ,  $X^\alpha = x^{\bar{\alpha}} = y^\alpha$ ,  $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \dots = n + 1, \dots, n + m$  is by definition, the semi-tangent bundle  $t(B_m)$  over the  $M_n$  manifold and the natural projection  $\pi_2 : t(B_m) \rightarrow M_n$ ,  $\dim t(B_m) = n + m$ .

Specifically, assuming  $n = m$ , the semi-tangent bundle [17]  $t(B_m)$  becomes a tangent bundle  $T(B_m)$ . Given a tangent bundle  $\tilde{\pi} : T(B_m) \rightarrow B_m$  and a natural projection  $\pi_1 : M_n \rightarrow B_m$ , the pullback bundle or Whitney product (for example, see [10], [11], [17], [19], [21], [22], [29]) is given by  $\pi_2 : t(B_m) \rightarrow M_n$  where

$$\left\{ \begin{aligned} t(B_m) &= \left\{ \left( (x^a, x^\alpha), x^{\bar{\alpha}} \right) \in M_n \times T_x(B_m) : \pi_1(x^a, x^\alpha) = \tilde{\pi}(x^\alpha, x^{\bar{\alpha}}) = (x^\alpha) \right\}, \\ t(B_m) &\subset M_n \times T_x(B_m). \end{aligned} \right.$$

The induced coordinates  $(x^{l'}, \dots, x^{n-m'}, x^{1'}, \dots, x^{m'})$  with regard to  $\pi^{-1}(U)$  will be given by

$$\left\{ \begin{aligned} x^{a'} &= x^{a'}(x^b, x^\beta), \\ x^{\alpha'} &= x^{\alpha'}(x^\beta). \end{aligned} \right. \tag{1.1}$$

If  $(x^{i'}) = (x^{a'}, x^{\alpha'})$  is another coordinate chart on manifold  $M_n$ . The Jacobian matrices of (1.1) is given by [21]:

$$(A_j^{i'}) = \left( \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \right) = \begin{pmatrix} A_b^{a'} & A_\beta^{a'} \\ 0 & A_\beta^{\alpha'} \end{pmatrix}$$

where  $i, j = 1, \dots, n$ .

If the equations (1.1) is the local coordinate system of on manifold  $M_n$ , then we have the induced fiber coordinates  $(x^a, x^\alpha, x^{\bar{\alpha}})$  on the semi-tangent bundle:

$$\left\{ \begin{aligned} x^{a'} &= x^{a'}(x^b, x^\beta), \\ x^{\alpha'} &= x^{\alpha'}(x^\beta), \\ x^{\bar{\alpha}'} &= \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta} y^\beta. \end{aligned} \right. \tag{1.2}$$

The Jacobian matrices for (1.2) are as follows [21]:

$$\bar{A} = (A_J^{I'}) = \begin{pmatrix} A_b^{a'} & A_\beta^{a'} & 0 \\ 0 & A_\beta^{\alpha'} & 0 \\ 0 & A_{\beta\varepsilon}^{\alpha'} y^\varepsilon & A_\beta^{\alpha'} \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

where  $I, J = 1, \dots, n + m$ .

Therefore, we obtain the following matrix:

$$(A_{J'}^I) = \begin{pmatrix} A_b^a & A_\beta^a & 0 \\ 0 & A_\beta^{\alpha'} & 0 \\ 0 & A_{\beta'\varepsilon'}^{\alpha'} y^{\varepsilon'} & A_\beta^{\alpha'} \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

which is the Jacobian matrix of inverse (1.2).

We note that almost paracontact structure and almost contact structure in tangent bundles and some of their geometrical properties have been discussed in [2], [5], [7], [13], [15], [16], [18]. Several writers, including [17], [21], [22], [29] and others, have studied the differential geometry of semi-tangent bundles. It is well known that projectable linear connections in the semi-tangent bundles and their some geometrical properties were studied in [21], [22]. Several authors cited here in obtained important results in this direction [14]. Studying the horizontal lifts with Tachibana operators along a generalized almost r-contact structure (for example, see [3], [4]) in a semi-tangent bundle is the goal of this work. For Tachibana operators with lifts and Lie derivatives, we also prove several of theorems.

## 2. Preliminaries

By prescribing a smooth function  $f$  on base manifold  $B_m$ , we write  ${}^v f$  for the function  $f$  on the semi-tangent bundle  $t(B_m)$  acquired by forming the composition of  ${}^v f = f \circ \pi_1$  and  $\pi : t(B_m) \rightarrow B_m$ , so that

$${}^v f = {}^v f \circ \pi_2 = f \circ \pi_1 \circ \pi_2 = f \circ \pi.$$

Then we have

$${}^v f(x^\alpha, x^\alpha, \bar{x}^\alpha) = f(x^\alpha). \tag{2.1}$$

The function  ${}^v f$  constructed is called the vertical lift of the function  $f$  to the  $t(B_m)$ . Here, we notice that the value of function  ${}^v f$  is constant for every fiber in  $\pi : t(B_m) \rightarrow B_m$  [17].

The complete lift of a function  $f \in M_n$  is defined as follows. Let  $f = f(x^\alpha, x^\alpha)$  be the function of this form on  $M_n$ . Then the complete lift  ${}^c f$  of this form is a form on  $t(B_m)$  such that [17]:

$${}^c f = \iota(df) = x^{\bar{\beta}} \partial_\beta f = y^\beta \partial_\beta f. \tag{2.2}$$

Let  $X = X^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$  be local expressions in  $U \subset B_m$  of a vector field  $X \in \mathfrak{S}_0^1(B_m)$ . Then the vertical lift  ${}^v X \in \mathfrak{S}_0^1(t(B_m))$  of  $X$  is given by the formula [21]:

$${}^v X = X^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \tag{2.3}$$

relative to the natural frame

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^a}, \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x^{\bar{\alpha}}} \right\}.$$

By using relations (1.3) and (2.3), we can readily determine that

$${}^v X' = \bar{A}({}^v X).$$

Let  $\omega = \omega_\alpha dx^\alpha$  be the expression of the coordinates in  $U$  subset  $B_m$  of a covector (1-form) fields  $\omega \in \mathfrak{T}_1^0(B_m)$ . On putting

$${}^v \omega = ({}^v \omega)_a = (0, \omega_\alpha, 0), \tag{2.4}$$

we can easily verify that by (1.3):

$${}^v \omega = \bar{A}{}^{vv} \omega'.$$

The vertical lift of the covector field  $\omega$  to  $t(B_m)$  is the name of the  $(0,1)$ -tensor field  ${}^v \omega$  [21].

The complete lift  ${}^{cc} \omega \in \mathfrak{T}_1^0(t(B_m))$  of  $\omega \in \mathfrak{T}_1^0(B_m)$  with the components  $\omega_\alpha$  in  $B_m$  has the following components

$${}^{cc} \omega : (0, y^\varepsilon \partial_\varepsilon \omega_\alpha, \omega_\alpha) \tag{2.5}$$

relative to the induced coordinates in the semi-tangent bundle [21].

We assume that vector field  $\tilde{X}$  is a projectable  $(1,0)$ -tensor field [22] on manifold  $M_n$  with projection  $X = X^\alpha(x^\alpha)\partial_\alpha$ , i.e.  $\tilde{X} = \tilde{X}^a(x^a, x^\alpha)\partial_a + X^\alpha(x^\alpha)\partial_\alpha$ . Now, take into account  $\tilde{X} \in \mathfrak{T}_0^1(M_n)$ , in that case complete lift  ${}^{cc} \tilde{X}$  has components of the form [17]:

$${}^{cc} \tilde{X} = ({}^{cc} \tilde{X}^\alpha) = \begin{pmatrix} \tilde{X}^a \\ X^\alpha \\ y^\varepsilon \partial_\varepsilon X^\alpha \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

relative to the coordinates  $(x^a, x^\alpha, x^{\bar{\alpha}})$  on the semi-tangent bundle  $t(B_m)$ .

For an arbitrary affiner field  $F \in \mathfrak{T}_1^1(B_m)$ , we have  $(\gamma F)' = \bar{A}(\gamma F)$  in  $t(B_m)$ , where the matrix [14]:

$$\gamma F = (\gamma F^I) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y^\varepsilon F_\varepsilon^\alpha \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

defines a  $(1,0)$ -tensor field relative to the coordinates  $(x^a, x^\alpha, \bar{x}^\alpha)$ , and where the matrix  $\bar{A}$  given with (1.3).

For each projectable  $(1,0)$ -tensor field  $\tilde{X} \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$  [22], we well-know that the  ${}^{HH}\tilde{X}$ -horizontal lift of  $\tilde{X}$  to  $t(B_m)$  (see [14]) by

$${}^{HH}\tilde{X} = {}^{cc}\tilde{X} - \gamma(\nabla\tilde{X}).$$

In the above situation, a differentiable manifold  $B_m$  has a projectable symmetric linear connection denoted by  $\nabla$ . We recall that  $\gamma(\nabla\tilde{X})$ -vector field has components [14]:

$$\gamma(\nabla\tilde{X}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y^\varepsilon \nabla_\varepsilon X^\alpha \end{pmatrix}$$

relative to the coordinates  $(x^a, x^\alpha, \bar{x}^\alpha)$  on semi-tangent bundle.  $\nabla_\alpha X^\varepsilon$  being the covariant derivative of  $X^\varepsilon$ , i.e.

$$(\nabla_\alpha X^\varepsilon) = \partial_\alpha X^\varepsilon + X^\beta \Gamma_{\beta\alpha}^\varepsilon.$$

When we contrast complete lift with horizontal lift, we get

$${}^{HH}\tilde{X} = ({}^{cc}\hat{\nabla}_X)$$

for any arbitrary projectable vector  $\tilde{X} \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$  [22], where  $\hat{\nabla}$  is an affine connection in manifold  $B_m$  given by

$$\hat{\nabla}_X Y = \nabla_Y X + [X, Y]$$

or

$${}^{vv}(\hat{\nabla}_Y X) = {}^{vv}(\hat{\nabla}_X Y) + {}^{vv}[Y, X].$$

Consequently, the  ${}^{HH}\tilde{X}$ -horizontal lift of  $\tilde{X}$  to  $t(B_m)$  contains the following components [14]:

$${}^{HH}\tilde{X} = \left( {}^{HH}\tilde{X}^I \right) = \begin{pmatrix} \tilde{X}^a \\ X^\alpha \\ -\Gamma_{\beta\alpha}^\alpha X^\beta \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

relative to the coordinates  $(x^a, x^\alpha, \bar{x}^\alpha)$  on semi-tangent bundle. Where

$$\Gamma_{\beta\alpha}^\alpha = y^\varepsilon \Gamma_{\varepsilon\beta}^\alpha. \tag{2.9}$$

Vertical lifts are given by the following relations:

$${}^{vv}(P \otimes Q) = {}^{vv}P \otimes {}^{vv}Q, \quad {}^{vv}(P + R) = {}^{vv}P + {}^{vv}R \quad (2.10)$$

to an algebraic isomorphism (unique) of  $\mathfrak{S}(B_m)$ – tensor algebra into the  $\mathfrak{S}(t(B_m))$ – tensor algebra with regard to constant coefficients. Where  $P, Q$  and  $R$  being arbitrary elements of  $t(B_m)$ .

For an arbitrary afinor field  $F \in \mathfrak{S}_1^1(B_m)$ , if (1.3) is taken into consideration, we may demonstrate that  ${}^{vv}F_J^I = A_{J'}^I A_J^{J'} ({}^{vv}F_{J'}^{I'})$ , where  ${}^{vv}F$  is a (1,1)– tensor field defined by [21]:

$${}^{vv}F = ({}^{vv}F_J^I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_\beta^\alpha & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

relative to the coordinates  $(x^a, x^\alpha, \bar{x}^\alpha)$ . The (1,1)– tensor field (2.11) is called the vertical lift of aff inor field  $F$  to  $t(B_m)$ .

Complete lifts are given by the following relations:

$${}^{cc}(P \otimes Q) = {}^{cc}P \otimes {}^{vv}Q + {}^{vv}P \otimes {}^{cc}Q, \quad {}^{cc}(P + R) = {}^{cc}P + {}^{cc}R \quad (2.12)$$

to an algebraic isomorphism (unique) of  $\mathfrak{S}(B_m)$ – tensor algebra into the  $\mathfrak{S}(t(B_m))$ – tensor algebra with regard to constant coefficients. Where  $P, Q, R$  being arbitrary elements of  $t(B_m)$ .

For an arbitrary projectable afinor field  $\tilde{F} \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$  [22] with projection  $F = F_\beta^\alpha(x^\alpha) \partial_\alpha \otimes dx^\beta$  i.e.  $\tilde{F}$  has components

$$\tilde{F} = (\tilde{F}_j^i) = \begin{pmatrix} \tilde{F}_b^a(x^a, x^\alpha) & \tilde{F}_\beta^a(x^a, x^\alpha) \\ 0 & \tilde{F}_\beta^\alpha(x^\alpha) \end{pmatrix}$$

relative to the coordinates  $(x^a, x^\alpha)$ . If (1.3) is taken into consideration, we may demonstrate that  ${}^{cc}F_{J'}^{I'} = A_{J'}^I A_J^{J'} ({}^{cc}\tilde{F}_{J'}^{I'})$  where  ${}^{cc}\tilde{F}$  is an afinor field (1,1)– tensor field) given by

$${}^{cc}\tilde{F} = ({}^{cc}\tilde{F}_J^I) = \begin{pmatrix} \tilde{F}_b^a & \tilde{F}_\beta^a & 0 \\ 0 & F_\beta^\alpha & 0 \\ 0 & y^\varepsilon \partial_\varepsilon F_\beta^\alpha & F_\beta^\alpha \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

relative to the coordinates  $(x^a, x^\alpha, \bar{x}^\alpha)$ . The (1,1)-tensor field (2.13) is called the complete lift of afinor field to semi-tangent bundle  $t(B_m)$  [21]. We will now give below some important equations that we will use:

**Theorem 1.** Let  $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(B_m)$ . If  $f \in \mathfrak{S}_0^0(B_m)$ ,  $\omega \in \mathfrak{S}_1^0(B_m)$ ,  $F \in \mathfrak{S}_1^1(B_m)$  and  $I = id_{B_m}$ , then [21], [22]:

- (i)  ${}^{vv}(fX) = {}^{vv}f {}^{vv}X$ ,
- (ii)  ${}^{vv}I {}^{vv}X = 0$ ,
- (iii)  ${}^{vw}(f\omega) = {}^{vw}f {}^{vw}\omega$ ,
- (iv)  $[{}^{vw}X, {}^{vw}Y] = 0$ ,
- (v)  ${}^{vw}F {}^{vw}X = 0$ ,
- (vi)  ${}^{vw}X {}^{vw}f = 0$ ,
- (vii)  ${}^{vw}\omega {}^{vw}X = 0$ .

**Theorem 2.** Let  $\widetilde{X}, \widetilde{Y}$  and  $\widetilde{F}$  be projectable vector and afinor fields on  $M_n$  with projections  $X, Y$  and  $F$  on  $B_m$ , respectively. If  $f \in \mathfrak{S}_0^0(B_m)$ ,  $\omega \in \mathfrak{S}_1^0(B_m)$  and  $I = id_{B_m}$ , then [21], [22]:

- (i)  ${}^{cc}(\widetilde{fX}) = {}^{cc}f {}^{vw}X + {}^{vw}f {}^{cc}\widetilde{X}$ ,
- (ii)  ${}^{cc}\widetilde{X} {}^{vw}f = {}^{vw}(Xf)$ ,
- (iii)  ${}^{vw}\omega({}^{cc}\widetilde{X}) = {}^{vw}(\omega(X))$ ,
- (iv)  ${}^{vw}X {}^{cc}f = {}^{vw}(Xf)$ ,
- (v)  ${}^{vw}F {}^{cc}\widetilde{X} = {}^{vw}(FX)$ ,
- (vi)  ${}^{vw}\omega({}^{cc}\widetilde{X}) = {}^{cc}(\omega(X))$ ,
- (vii)  ${}^{cc}\omega({}^{vw}X) = {}^{vw}(\omega(X))$ ,
- (viii)  $[{}^{vw}X, {}^{cc}\widetilde{Y}] = {}^{vw}[X, Y]$ ,
- (ix)  ${}^{cc}\widetilde{I} = \widetilde{I}$ ,
- (x)  ${}^{vw}I {}^{cc}\widetilde{X} = {}^{vw}X$ ,
- (xi)  $[{}^{cc}\widetilde{X}, {}^{cc}\widetilde{Y}] = {}^{cc}[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]$ ,

- (xii)  ${}^{cc}\omega\left({}^{cc}\widetilde{X}\right) = {}^{cc}(\omega X),$
- (xiii)  ${}^{cc}\widetilde{X}{}^{cc}f = {}^{cc}(Xf),$
- (xiv)  ${}^{cc}\widetilde{F}{}^{vv}X = {}^{vv}(FX),$
- (xv)  ${}^{cc}(\widetilde{FX}) = {}^{cc}\widetilde{F}{}^{cc}\widetilde{X}.$

**Definition 1.** Let  $X \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$  and  $T \in \mathfrak{S}_q^p(M_n)$ . Then the classical definition of the Lie derivative of the tensor field  $T$  with respect to the vector field  $X$  is the tensor field  $L_X T$  of type  $(p,q)$  with components

$$\begin{aligned} (L_X T)_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} &= X^l \partial_l T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} - T_{j_1 \dots j_q}^{s_1 \dots s_p} \partial_s X^{i_1} \\ &- T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 s_2 \dots s_p} \partial_s X^{i_2} - \dots \\ &+ T_{s_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \partial_{j_1} X^s + T_{j_1 s \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \partial_{j_2} X^s + \dots \end{aligned}$$

for a vector fields  $X, Y$  given in manifold  $M_n$ , the Lie bracket  $[X, Y]$  of  $X$  and  $Y$  is the vector field which acts on a function  $f \in C^\infty(M_n)$

$$\begin{aligned} L_X f &= Xf, \forall f \in \mathfrak{S}_0^0(M_n), \\ L_X Y &= [X, Y], \forall X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(M_n). \end{aligned} \tag{2.21}$$

The Lie derivative  $L_X F$  of the  $(1,1)$ - afinor field  $F$  with respect to the vector field  $X$  over  $B_m$  is the field of a differential-geometric object and is given by

$$(L_X F)Y = [X, FY] - F[X, Y]. \tag{2.22}$$

**Proposition 1.** Let there be given a projectable tensor field, say,  $\widetilde{X}, \widetilde{Y}$  of type  $(1,0)$  in  $M_n$  with projections  $X$  and  $Y$  on  $B_m$ , respectively. If  $f$  is any real valued function on  $B_m$  and  $L_X$  is the Lie derivative in the direction of the vector  $X$ , then we easily obtain [22]:

- (i)  $L_{v_X}({}^{vv}f) = 0,$                       (ii)  $L_{v_X}({}^{cc}f) = {}^{vv}(L_X f),$
- (iii)  $L_{cc\widetilde{X}}({}^{vv}f) = {}^{vv}(L_X f),$       (iv)  $L_{cc\widetilde{X}}({}^{cc}f) = {}^{cc}(L_X f),$
- (v)  $L_{v_X}({}^{vv}Y) = 0,$                       (vi)  $L_{v_X}({}^{cc}\widetilde{Y}) = {}^{vv}(L_X Y),$
- (vii)  $L_{cc\widetilde{X}}({}^{vv}Y) = {}^{vv}(L_X Y),$       (viii)  $L_{cc\widetilde{X}}({}^{cc}\widetilde{Y}) = {}^{cc}(\widetilde{L_X Y}).$



**Definition 2.** Differential transformation of algebra  $t(B_m)$ , given by

$$D = \nabla_X : t(B_m) \rightarrow t(B_m), X \in \mathfrak{S}_0^1(B_m),$$

is called as covariant derivation with respect to vector field  $X$ , if

$$\nabla_{fX+gY}t = f\nabla_Xt + g\nabla_Yt,$$

$$\nabla_Xf = Xf,$$

where  $\forall f, g \in \mathfrak{S}_0^0(B_m), \forall X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(B_m), \forall t \in \mathfrak{S}(B_m)$ .

However, a map defined by

$$\nabla : \mathfrak{S}_0^1(B_m) \times \mathfrak{S}_0^1(B_m) \rightarrow \mathfrak{S}_0^1(B_m)$$

is called as affine (or linear) connection [22], [25].

The concept of projectable classical linear connection as follows. Let  $p : Y \rightarrow M$  be a fibred manifold. A classical connection  $\nabla$  on  $\mathcal{Y}$  is said to be projectable (with respect to  $p$ ) if there is a unique classical linear connection  $\underline{\nabla}$  on  $M$  such that  $\nabla$  and  $\underline{\nabla}$  are  $p$ -related [1], [25]. In particular, if  $T(B_m)$  is the tangent bundle of base manifold  $B_m$ , then a linear connection  $\underline{\nabla}$  is a classical linear connection on manifold  $B_m$  [12]. The last condition means that if  $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$  and  $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(B_m)$  are such that  $T_p \circ \tilde{X} = X \circ p$  and  $T_p \circ \tilde{Y} = Y \circ p$  then  $T_p \circ \nabla_{\tilde{X}}\tilde{Y} = (\underline{\nabla}_X Y) \circ p$ .

$T$  is determined by

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

for any  $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(B_m)$ . Along with the above concept  $\nabla$  is a projectable linear connection on  $B_m$  (with respect to  $p := \pi_1 : M_n \rightarrow B_m$ ).

**Theorem 3.** Let  $\tilde{X}, \tilde{Y}$  and  $\tilde{F}$  be projectable vector and affiner fields on  $M_n$  with projections  $X, Y$  and  $F$  on  $B_m$ , respectively. If  $f \in \mathfrak{S}_0^0(B_m)$ ,  $\omega \in \mathfrak{S}_1^0(B_m)$  and  $I = id_{B_m}$ , then [22]:

$$(i) \quad {}^{HH}\tilde{I} = I,$$

$$(ii) \quad {}^{HH}\tilde{I}{}^w X = {}^w X,$$

$$(iii) \quad {}^w I {}^{HH}\tilde{X} = {}^w X,$$

$$(iv) \quad {}^{HH}\tilde{I} {}^{HH}\tilde{X} = {}^{HH}\tilde{X},$$

$$(v) \quad {}^{HH}\tilde{X}{}^w f = {}^w (Xf),$$

- (vi)  ${}^{HH}(fX) = {}^{vv}f {}^{HH}\tilde{X}$ ,
- (vii)  ${}^{HH}\omega({}^{HH}\tilde{X}) = 0$ ,
- (viii)  ${}^{vv}\omega({}^{HH}\tilde{X}) = {}^{vv}(\omega(X))$ ,
- (ix)  ${}^{HH}\omega({}^{vv}X) = {}^{vv}(\omega(X))$ ,
- (x)  ${}^{HH}\tilde{F} {}^{vv}X = {}^{vv}(FX)$ ,
- (xi)  ${}^{HH}\tilde{F} {}^{HH}\tilde{X} = {}^{HH}(\tilde{FX})$ .

**Definition 3.** Let  $\tilde{X}$  and  $\tilde{Y}$  be projectable vector fields on  $M_n$  with projections  $X$  and  $Y$  on  $B_m$ , respectively. For the Lie product, we obtain [29]:

- (i)  $[{}^{vv}X, {}^{HH}\tilde{Y}] = {}^{vv}[X, Y] - {}^{vv}(\nabla_X Y) = -{}^{vv}(\hat{\nabla}_Y X)$ ,
- (ii)  $[{}^{cc}\tilde{X}, {}^{HH}\tilde{Y}] = {}^{HH}[\widetilde{X, Y}] - \gamma(L_X Y)$ ,
- (iii)  $[{}^{HH}\tilde{X}, {}^{vv}Y] = {}^{vv}[X, Y] + {}^{vv}(\nabla_Y X)$ ,
- (iv)  $[{}^{HH}\tilde{X}, {}^{HH}\tilde{Y}] = {}^{HH}[\widetilde{X, Y}] - \gamma\hat{R}(X, Y)$ ,

where the curvature tensor of the affine connection  $\hat{\nabla}$  is represented by  $\hat{R}$ .

**Definition 4.**

Assume that  $\nabla$  in  $B_m$  is a projectable linear connection. We will use the following conditions to define the horizontal lift  ${}^{HH}\nabla$  of a projectable linear connection  $\nabla$  in  $B_m$  to  $t(B_m)$  [28], [29]:

- (i)  ${}^{HH}\nabla_{{}^{vv}X} {}^{vv}Y = 0$ ,
- (ii)  ${}^{HH}\nabla_{{}^{vv}X} {}^{HH}\tilde{Y} = 0$ ,
- (iii)  ${}^{HH}\nabla_{{}^{HH}\tilde{X}} {}^{vv}Y = {}^{vv}(\nabla_X Y)$ ,
- (iv)  ${}^{HH}\nabla_{{}^{HH}\tilde{X}} {}^{HH}\tilde{Y} = {}^{HH}(\nabla_X Y)$ ,

for any  $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{Z}_0^1(M_n)$ .

**Proposition 2.**

Let  $\tilde{S}$  and  $\tilde{T}$  be two tensor fields of type  $(r, s)$  in  $t(B_m)$  such that

$$\tilde{S}(\tilde{X}_s, \dots, \tilde{X}_1) = \tilde{T}(\tilde{X}_s, \dots, \tilde{X}_1)$$

for all vector fields  $\tilde{X}_t$  ( $t = 1, 2, \dots, s$ ) which are of the form  $\overline{\tilde{X}}$ ,  ${}^v X$  or  ${}^{HH} \tilde{X}$ , where  $X \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ . Then  $\tilde{S} = \tilde{T}$  (for example, see [27]).

### 3. Main Results

#### 3.1. Tachibana Operators for Generalized Almost R-Contact Structure in Semi-tangent Bundle

Let  $B_m$  be a differentiable manifold of  $C^\infty$  class and  $T(B_m)$  denotes the semi-tangent bundle of  $B_m$  ( $m = 2k + r, k \geq 0$ ). Suppose that there are projectable affinor field  $\tilde{\phi} \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$  [22] with projection  $\phi = \phi_\beta^\alpha(x^\alpha) \partial_\alpha \otimes dx^\beta$  i.e., a projectable  $(1, 0)$ -tensor field  $\tilde{\xi}_p \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$  with projection  $\xi_p = \xi^\alpha(x^\alpha) \partial_\alpha$  i.e.  $\tilde{\xi}_p = \tilde{\xi}^a(x^\alpha, x^\alpha) \partial_a + \xi^\alpha(x^\alpha) \partial_\alpha$  [22], a covector field  $\eta_p, p = 1, 2, \dots, r$  satisfying (for example, see [2], [5], [20]):

$$\begin{aligned} (i) \quad & \phi^2 = a^2 I + \in \sum_{p=1}^r \xi_p \otimes \eta_p \\ (ii) \quad & \phi \xi_p = 0 \\ (iii) \quad & \eta_p \circ \phi = 0 \\ (iv) \quad & \eta_p(\xi_q) = -\frac{a^2}{\in} \delta_{pq}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Where  $a$  and  $\in$  are non-zero complex numbers and  $p = 1, 2, \dots, r$  and  $\delta_{pq}$  represent the Kronecker delta. A generalized almost  $r$ -contact manifold with a generalized almost  $r$ -contact structure, or simply an  $(\phi, \eta_p, \xi_p, a, \in)$ -structure, is what the manifold  $B_m$  is known as.

Let  $B_m$  be the base space where the Lorentzian almost  $r$ -para-contact structure is accepted. Then there exists a projectable affinor field  $\tilde{\phi}$  of type  $(1, 1), r(C^\infty)$  vector fields  $\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2, \dots, \tilde{\xi}_p$ , and  $r(C^\infty)$  1-forms  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_p$ , such that equation (3.1) are satisfied. We get the following by taking the complete lifts of equation (3.1):

$$(i) \quad (\phi^H)^2 = a^2 I + \in \sum_{p=1}^r \{ \xi_p^V \otimes \eta_p^H + \xi_p^H \otimes \eta_p^V \}$$

$$(ii) \quad {}^{HH}\phi^{vv}\xi_p = 0, \quad {}^{HH}\phi^{cc}\xi_p = 0$$

$$(iii) \quad {}^{vv}\eta_p \circ {}^{HH}\phi = 0, \quad {}^{HH}\eta_p \circ {}^{vv}\phi = 0, \quad {}^{HH}\eta_p \circ {}^{HH}\phi = 0, \quad {}^{vv}\eta_p \circ {}^{vv}\phi = 0$$

$$(iv) \quad {}^{HH}\eta_p({}^{HH}\xi_p) = {}^{vv}\eta_p({}^{vv}\xi_p) = 0, \quad {}^{HH}\eta_p({}^{vv}\xi_p) = {}^{vv}\eta_p({}^{HH}\xi_p) = -\frac{a^2}{\epsilon}\delta_{pq} \quad (3.2)$$

Let's use

$$\tilde{J} = \phi^H + \frac{\epsilon}{a} \sum_{p=1}^r (\xi_p^V \otimes \eta_p^V + \xi_p^H \otimes \eta_p^H) \quad (3.3)$$

to define the  $\tilde{J}$  element of  $J_0^1 t(B_m)$ .

Then, considering equation (3.2), it is evident that

$$\tilde{J}^2 {}^{vv}X = a^2 {}^{vv}X, \quad \tilde{J}^2 {}^{HH}\tilde{X} = a^2 {}^{HH}\tilde{X}$$

which gives that  $\tilde{J}$  is GF structure in  $t(B_m)$  (for example, see [6], [7]).

Considering Equation (3.4), we now have

$$\begin{aligned} (i) \quad \tilde{J} {}^{HH}\tilde{X} &= {}^{HH}(\tilde{\phi}\tilde{X}) + \frac{\epsilon}{a} \sum_{p=1}^r \left\{ {}^{vv}(\eta_p(X)) {}^{vv}\xi_p \right\} \\ (ii) \quad \tilde{J} {}^{vv}X &= {}^{vv}(\phi X) + \frac{\epsilon}{a} \sum_{p=1}^r \left\{ {}^{vv}(\eta_p(X)) {}^{HH}\tilde{\xi}_p \right\} \end{aligned} \quad (3.4)$$

for all  $X \in \mathfrak{T}_0^1(B_m)$ .

### 3.2. Tachibana operator

**Definition 5.**

Let  $\phi \in \mathfrak{T}_1^1(B_m)$  and  $\mathfrak{T}(B_m) = \sum_{r,s=0}^{\infty} \mathfrak{T}_s^r(B_m)$  be an tensor algebra over

$\mathbb{R}$ . A map  $\phi_\phi \Big|_{r+s \rightarrow 0} : \mathfrak{T}(B_m) \rightarrow \mathfrak{T}(B_m)$  is called a Tachibana operator or

$\phi_\phi$  operator on  $B_m$  if

a)  $\phi_\phi$  is linear with respect to constant coefficient,

b)  $\phi_\varphi : \mathfrak{S}^*(B_m) \rightarrow \mathfrak{S}_{s+1}^r(B_m)$  for all  $r$  and  $s$ ,

c)  $\phi_\varphi \left( K \overset{C}{\otimes} L \right) = (\phi_\varphi K) \otimes L + K \otimes \phi_\varphi L$  for all  $K, L \in \mathfrak{S}^*(B_m)$ ,

d)  $\phi_{\varphi X} Y = -(L_Y \varphi) X$  for all  $X, Y \in \mathfrak{S}_0^1(B_m)$ , where  $L_Y$  is the Lie derivation with respect to  $Y$ ,

$$\begin{aligned} \text{e) } (\phi_{\varphi X} \eta) Y &= (d(\iota_Y \eta)(\phi X) - (d(\iota_Y (\eta \circ \phi)) X + \eta((L_Y \varphi) X)) \\ &= (\phi X (\iota_Y \eta))(\phi X) - X (\iota_{\phi Y} \eta) + \eta((L_Y \varphi) X) \end{aligned} \tag{3.5}$$

for all  $\eta \in \mathfrak{S}_1^0(B_m)$  and  $X, Y \in \mathfrak{S}_1^0(B_m)$ , where  $\mathfrak{S}_s^r(B_m)$  the module of all pure tensor fields of type  $(r, s)$  on  $B_m$  with respect to the affinor field  $\tilde{\varphi}$  [12?][13?].

**Theorem 3.1.**

For the Tachibana operator on  $B_m$ ,  $L_X$  the operator Lie derivation with respect to  $X$ ,  $\tilde{J} \in \mathfrak{S}_1^1(t(B_m))$  defined by

$$\tilde{J} = {}^{HH} \tilde{\phi} + \frac{\epsilon}{a} \sum_{p=1}^r \left( {}^{vw} \xi_p \otimes {}^{vw} \eta_p + {}^{HH} \tilde{\xi}_p \otimes {}^{HH} \eta_p \right) \text{ and } \eta(Y) = 0, \text{ we have}$$

(i)  $\Phi_{\tilde{J}{}^{vw} Y} {}^{HH} \tilde{X} = - {}^{vw} \left( (\hat{\nabla}_X \phi) Y \right) - \frac{\epsilon}{a} \sum_{p=1}^r {}^{vw} \left( (\hat{\nabla}_X \eta_p) Y \right) {}^{HH} \tilde{\xi}_p$

(ii)  $\Phi_{\tilde{J}{}^{HH} \tilde{Y}} {}^{HH} \tilde{X} = - {}^{HH} \left( \overline{(L_X \phi) Y} \right) + \gamma \hat{R}(X, \phi Y) + \frac{\epsilon}{a} \sum_{p=1}^r {}^{vw} \left( (L_X \eta_p) Y \right) {}^{vw} \xi_p - \tilde{J} \gamma \hat{R}(X, Y)$

(iii)  $\Phi_{\tilde{J}{}^{vw} Y} {}^{vw} X = 0$

(iv)  $\Phi_{\tilde{J}{}^{HH} \tilde{Y}} {}^{vw} X = - {}^{vw} \left( (L_X Y) \phi \right) + {}^{vw} \left( (\nabla_X \phi) Y \right)$

$$- \frac{\epsilon}{a} \sum_{p=1}^r {}^{vw} \left( (L_X \eta_p) Y \right) {}^{HH} \tilde{\xi}_p + \frac{\epsilon}{a} \sum_{p=1}^r {}^{vw} \left( (\nabla_X \eta_p) Y \right) {}^{HH} \tilde{\xi}_p. \tag{3.6}$$

where projectable vector fields  $\widetilde{X}, \widetilde{Y}, \widetilde{\xi}_p \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$ , a projectable (1,1)-tensor field  $\widetilde{\phi} \in \mathfrak{S}_1^1(M_n)$  and a 1-form  $\eta \in \mathfrak{S}_1^0(M_n)$ .

**Proof.**

$$\begin{aligned}
 (i) \quad & \Phi_{\widetilde{J}^{vvY}}{}^{HH} \widetilde{X} = -\left(L_{HH \widetilde{X}} \widetilde{J}\right)^{vv} Y = -\left(L_{HH \widetilde{X}} \widetilde{J}^{vv} Y - \widetilde{J} L_{HH \widetilde{X}}{}^{vv} Y\right) \\
 & = -\left[{}^{HH} \widetilde{X}, {}^{vv}(\phi Y) + \frac{\epsilon}{a} \sum_{p=1}^r {}^{HH} \left(\overline{\eta_p(Y) \xi_p}\right)\right] + \left({}^{HH} \widetilde{\phi} + \frac{\epsilon}{a} \sum_{p=1}^r \left({}^{vv} \xi_p \otimes {}^{vv} \eta_p + {}^{HH} \widetilde{\xi}_p \otimes {}^{HH} \eta_p\right)\right) \underbrace{\left[{}^{HH} \widetilde{X}, {}^{vv} Y\right]}_{{}^{vv}[X,Y] + {}^{vv}(\nabla_Y X)} \\
 & = -\underbrace{\left[{}^{HH} \widetilde{X}, {}^{vv}(\phi Y)\right]}_{{}^{vv}[X, \phi Y] + {}^{vv}(\nabla_{\phi Y} X)} - \left[{}^{HH} \widetilde{X}, \frac{\epsilon}{a} \sum_{p=1}^r \left(\overline{\eta_p(Y) \xi_p}\right)\right] \\
 & + {}^{HH} \widetilde{\phi} \left[{}^{HH} \widetilde{X}, {}^{vv} Y\right] + \frac{\epsilon}{a} \sum_{p=1}^r {}^{vv} \eta_p \left(\left[{}^{HH} \widetilde{X}, {}^{vv} Y\right]\right) {}^{vv} \xi_p + \frac{\epsilon}{a} \sum_{p=1}^r {}^{HH} \eta_p \left(\left[{}^{HH} \widetilde{X}, {}^{vv} Y\right]\right) {}^{HH} \widetilde{\xi}_p \\
 & = -{}^{vv} \left(\left(L_X \phi\right) Y\right) - {}^{vv} \left(\phi \left(L_X Y\right)\right) - {}^{vv} \left(\widehat{\nabla}_X \phi Y\right) - {}^{vv} [\phi Y, X] + {}^{vv} \left(\phi L_X Y\right) \\
 & + {}^{HH} \widetilde{\phi} {}^{vv} \left(\nabla_Y X\right) + \frac{\epsilon}{a} \sum_{p=1}^r \underbrace{{}^{vv} \eta_p}{}^{vv} [X, Y] {}^{vv} \xi_p + \frac{\epsilon}{a} \sum_{p=1}^r \underbrace{{}^{vv} \eta_p}{}^{vv} \left(\nabla_Y X\right) {}^{vv} \xi_p \\
 & + \frac{\epsilon}{a} \sum_{p=1}^r {}^{vv} \left(\eta_p [X, Y]\right) {}^{HH} \widetilde{\xi}_p + \frac{\epsilon}{a} \sum_{p=1}^r {}^{HH} \eta_p {}^{vv} \left(\nabla_Y X\right) {}^{HH} \widetilde{\xi}_p \\
 & - \frac{\epsilon}{a} \sum_{p=1}^r {}^{vv} \left(\left(L_X \eta_p\right) Y\right) {}^{HH} \widetilde{\xi}_p + \frac{\epsilon}{a} \sum_{p=1}^r \left({}^{HH} \eta_p \left({}^{vv} \left(\widehat{\nabla}_X Y\right) + {}^{vv} [Y, X]\right)\right) {}^{HH} \widetilde{\xi}_p \\
 & = -{}^{vv} \left(\left(\widehat{\nabla}_X \phi\right) Y\right) - {}^{vv} \left(\phi \widehat{\nabla}_X Y\right) + {}^{vv} \left(\phi \left(\widehat{\nabla}_X Y\right)\right) - \frac{\epsilon}{a} \sum_{p=1}^r {}^{vv} \left(\left(L_X \eta_p\right) Y\right) {}^{HH} \widetilde{\xi}_p \\
 & - \frac{\epsilon}{a} \sum_{p=1}^r {}^{vv} \left(\left(\widehat{\nabla}_X \eta_p\right) Y\right) {}^{HH} \widetilde{\xi}_p + \frac{\epsilon}{a} \sum_{p=1}^r {}^{vv} \left(\left(L_X \eta_p\right) Y\right) {}^{HH} \widetilde{\xi}_p \\
 & = -{}^{vv} \left(\left(\widehat{\nabla}_X \phi\right) Y\right) - \frac{\epsilon}{a} \sum_{p=1}^r {}^{vv} \left(\left(\widehat{\nabla}_X \eta_p\right) Y\right) {}^{HH} \widetilde{\xi}_p, \tag{3.7}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (ii) \quad & \Phi_{\widetilde{J}{}^{HH} \widetilde{Y}}{}^{HH} \widetilde{X} = -\left(L_{HH \widetilde{X}} \widetilde{J}\right) {}^{HH} \widetilde{Y} = -\left(L_{HH \widetilde{X}} \widetilde{J} {}^{HH} \widetilde{Y} - \widetilde{J} L_{HH \widetilde{X}}{}^{HH} \widetilde{Y}\right) \\
 & = -\left[{}^{HH} \widetilde{X}, {}^{HH} \left(\widetilde{\phi} Y\right) + {}^{vv} \left(\eta_p(Y) \xi_p\right)\right] + \left({}^{HH} \widetilde{\phi} + \frac{\epsilon}{a} \sum_{p=1}^r \left({}^{vv} \xi_p \otimes {}^{vv} \eta_p + {}^{HH} \widetilde{\xi}_p \otimes {}^{HH} \eta_p\right)\right) \left[{}^{HH} \widetilde{X}, {}^{HH} \widetilde{Y}\right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\overset{HH}{\left(\overline{(L_X\phi)Y}\right)} + \gamma\hat{R}(X, \phi Y) + \frac{\epsilon}{a} \sum_{p=1}^r \left( \underbrace{L_X\eta_p(Y)}_0 \right)^{vw} \xi_p \\
&- \frac{\epsilon}{a} \sum_{p=1}^r \left( (L_X\eta_p)Y \right)^{vw} \xi_p - J(\gamma\hat{R}(X, Y)) \\
&= -\overset{HH}{\left(\overline{(L_X\phi)Y}\right)} + \gamma\hat{R}(X, \phi Y) - \frac{\epsilon}{a} \sum_{p=1}^r \left( (L_X\eta_p)Y \right)^{vw} \xi_p - J(\gamma\hat{R}(X, Y)), \quad (3.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(iii) \quad \Phi_{\tilde{J}^{vw}Y}{}^{vw}X &= -(L_{v_X}\tilde{J})^{vw}Y = -\left( L_{v_X}\tilde{J}^{vw}Y - \underbrace{\tilde{J}L_{v_X}{}^{vw}Y}_0 \right) \\
&= -(L_{v_X}\tilde{J}^{vw}Y) = -\left[ {}^{vw}X, \left( \overset{HH}{\tilde{\phi}} + \frac{\epsilon}{a} \sum_{p=1}^r \left( {}^{vw}\xi_p \otimes {}^{vw}\eta_p + \overset{HH}{\tilde{\xi}}_p \otimes \overset{HH}{\eta}_p \right) \right)^{vw}Y \right] \\
&= -\left[ {}^{vw}X, \frac{\epsilon}{a} \sum_{p=1}^r \left( {}^{vw}\eta_p {}^{vw}Y \right)^{vw} \xi_p \right] - \left[ {}^{vw}X, \frac{\epsilon}{a} \sum_{p=1}^r \left( \overset{HH}{\eta}_p {}^{vw}Y \right)^{HH} \tilde{\xi}_p \right] \\
&= -\left[ {}^{vw}X, \frac{\epsilon}{a} \sum_{p=1}^r \underbrace{\left( {}^{vw}\eta_p {}^{vw}Y \right)}_0 {}^{vw} \xi_p \right] - \left[ {}^{vw}X, \frac{\epsilon}{a} \sum_{p=1}^r \underbrace{\left( \overset{HH}{\eta}_p {}^{vw}Y \right)}_{\overset{vw}{(\eta_p(Y))}} {}^{HH} \tilde{\xi}_p \right] \\
&= -\left[ {}^{vw}X, \frac{\epsilon}{a} \sum_{p=1}^r \underbrace{\left( \eta_p(Y) \right)}_0 {}^{HH} \tilde{\xi}_p \right] = 0 \quad (3.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(iv) \quad \Phi_{\tilde{J}{}^{HH}\tilde{Y}}{}^{vw}X &= -(L_{v_X}\tilde{J}){}^{HH}\tilde{Y} = -\left( L_{v_X}\tilde{J}{}^{HH}\tilde{Y} - \tilde{J}L_{v_X}{}^{HH}\tilde{Y} \right) \\
&= -{}^{vw}[X, \phi Y] + {}^{vw}(\nabla_X\phi Y) + \underbrace{\overset{HH}{\tilde{\phi}}{}^{vw}[X, Y]}_{\overset{vw}{(\phi L_X Y)}} - \underbrace{\overset{HH}{\tilde{\phi}}{}^{vw}(\nabla_X Y)}_{\overset{vw}{(\phi \nabla_X Y)}} + \frac{\epsilon}{a} \sum_{p=1}^r {}^{vw}\eta_p \left( {}^{vw}[X, Y] - {}^{vw}(\nabla_X Y) \right)^{vw} \xi_p \\
&+ \frac{\epsilon}{a} \sum_{p=1}^r \overset{HH}{\eta}_p \left( {}^{vw}[X, Y] - {}^{vw}(\nabla_X Y) \right)^{HH} \tilde{\xi}_p \\
&= -{}^{vw}\left(\overline{(L_X Y)\phi}\right) + {}^{vw}\left(\overline{(\nabla_X \phi)Y}\right) + \frac{\epsilon}{a} \sum_{p=1}^r \left( \underbrace{L_X\eta_p(Y)}_0 - (L_X\eta_p)Y \right)^{HH} \tilde{\xi}_p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\in}{a} \sum_{p=1}^r \left( \underbrace{\nabla_X \eta_p(Y)}_0 - (\nabla_X \eta_p)Y \right)^{HH} \widetilde{\xi}_p^{vv} \\
 & = -{}^{vv}((L_X Y)\phi) + {}^{vv}((\nabla_X \phi)Y) - \frac{\in}{a} \sum_{p=1}^r {}^{vv}((L_X \eta_p)Y)^{HH} \widetilde{\xi}_p + \frac{\in}{a} \sum_{p=1}^r {}^{vv}((\nabla_X \eta_p)Y)^{HH} \widetilde{\xi}_p \quad (3.10)
 \end{aligned}$$

where  $\eta_p L_X Y = L_X \eta_p(Y) - (L_X \eta_p)Y$  and  $\eta_p \nabla_X Y = \nabla_X \eta_p(Y) - (\nabla_X \eta_p)Y$ .

**Corollary 3.1.**

If we put  $Y = \xi_p$  i.e.  ${}^{HH}\eta_p \left( {}^{HH} \widetilde{\xi}_p \right) = {}^{vv}\eta_p \left( {}^{vv} \xi_p \right) = 0$ ,

${}^{HH}\eta_p \left( {}^{vv} \xi_p \right) = {}^{vv}\eta_p \left( {}^{HH} \widetilde{\xi}_p \right) = -\frac{a^2}{\in}$  then we have

$$(i) \quad \Phi_{j^{vv}\xi_p} {}^{HH} \widetilde{X} = a \sum_{p=1}^r {}^{HH} \left( \widetilde{L_{\xi_p} X} \right) - a \gamma \hat{R}(X, \xi_p) - {}^{vv}(\hat{\nabla}_X \phi) + (\hat{\nabla}_X \eta_p)^{vv} \xi_p {}^{HH} \widetilde{\xi}_p$$

$$(ii) \quad \Phi_{j^{HH}\widetilde{\xi}_p} {}^{HH} \widetilde{X} = a {}^{vv}(\hat{\nabla}_X \xi_p) - \left( (L_X \phi) \xi_p \right)^{HH} + {}^{HH} \widetilde{\phi} \gamma \hat{R}(X, \xi_p) - \frac{\in}{a} \sum_{p=1}^r {}^{vv}((L_X \eta_p) \xi_p)^{HH} \widetilde{\xi}_p$$

$$- \frac{\in}{a} \sum_{p=1}^r {}^{vv} \eta_p \gamma \hat{R}(X, \xi_p)^{vv} \xi_p - \frac{\in}{a} \sum_{p=1}^r {}^{HH} \eta_p \gamma \hat{R}(X, \xi_p)^{HH} \widetilde{\xi}_p$$

$$(iii) \quad \Phi_{j^{vv}\xi_p} {}^{vv} X = -a {}^{vv}(\hat{\nabla}_{\xi_p} X)$$

$$(iv) \quad \Phi_{j^{HH}\widetilde{\xi}_p} {}^{HH} X = -{}^{vv}((L_X \phi) \xi_p) + {}^{vv}((\nabla_X \phi) \xi_p) - \frac{\in}{a} \sum_{p=1}^r {}^{vv}((L_X \eta_p) \xi_p)^{HH} \widetilde{\xi}_p + \frac{\in}{a} \sum_{p=1}^r {}^{vv}((\nabla_X \eta_p) \xi_p)^{HH} \widetilde{\xi}_p.$$

**Acknowledgment.** This study was supported by Scientific and Technological Research Council of Turkey (TUBITAK) under the Grant Number (TBAG-1001, MFAG-122F131). The authors thank to TUBITAK for their supports.



## References

- [1] Bednarska A., On lifts of projectable-projectable classical linear connections to the cotangent bundle, *Annales Universitatis Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, Mathematica* 67 (1) (2013), 1-10.
- [2] Blair D.E., *Contact Manifolds in Riemannian Geometry*, Lecture Notes in Maths, 509, Springer Verlag, New York, 1976.
- [3] Das, Lovejoy S., Khan, M.N.I.: Almost  $r$  - contact structures on the tangent bundle, *Differential Geometry -Dynamical Systems*, 7, (2005), 34-41.
- [4] Das, Lovejoy S., *Fiberings on almost  $r$ -contact manifolds*. *Publicationes Mathematicae, Debrecen, Hungary*, 43, (1993), 161-167.
- [5] Das L.S. and Nivas R. (2006) On Certain Structures Defined on the Tangent Bundle. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 36, 1857-1866.
- [6] Das, L.S., Nivas, R. and Khan, M.N.I., On Submanifolds of Co-Dimension 2 Immersed in a Hsuquaternion Manifold. *Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyregyhziensis*, 25, (2009), 129-135.
- [7] Das L. S. and Khan M.N.I., On Tachibana and Vishnevskii Operators Associated with Certain Structures in the Tangent Bundle, *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 6, (2018),1968-1978.
- [8] Ehresmann, C., Libermann P.: Sur les structures presque hermitiennes, *C.R. Acad.Sci., Paris*, vol. 232, (1961), 1281-1283.
- [9] Goldberg, S. I., Yano K.: Polynomial structures on manifolds, *Kodai Math. Sem. Rep.* 22, (1970), 199-218
- [10] Husemoller D. *Fibre Bundles*. Springer, New York, 1994.
- [11] Lawson H.B. and Michelsohn M.L. *Spin Geometry*. Princeton University Press., Princeton, 1989.
- [12] Mikulski W. M., On the existence of prolongation of connections by bundle functors, *Extracta Math.* 22 (3) (2007), 297–314.
- [13] Oproiu V., Some remarkable structures and connexions, defined on tangent bundle, *Rendiconti di Matematica* 3 (6) (1973).
- [14] Polat M. and Yıldırım F. Complete lifts of projectable linear connection to semi-tangent bundle, *Honam Mathematical J.*, 43 (3) (2021), 483-501.
- [15] Salimov A. *Tensor Operators and Their applications*, Nova Sci. Publ., New York, 2013.
- [16] Salimov A.A. And Cayır H., Some Notes On Almost Paracontact Structures, *Comptes Rendus de l'Academie Bulgare Des Sciences*, 66 (3) (2013), 331-338.
- [17] Salimov A.A. and Kadioglu E. Lifts of Derivations to the Semi-tangent Bundle, *Turk J. Math.* 24 (2000), 259-266.

- [18] Sasaki S., On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure I, *Tohoku Math. J. (2)* 12 (1960), 459-476.
- [19] Steenrod N. *The Topology of Fibre Bundles*. Princeton University Press., Princeton, 1951.
- [20] Vanzura J., Almost R-Contact Structure. *Annali Della Scuola Normale, Superiore Di Pisa* , 26, (1970), 97-115.
- [21] Vishnevskii V., Shirokov A.P. and Shurygin V.V., *Spaces over Algebras*. Kazan. Kazan Gos. Univ. 1985 (in Russian).
- [22] Vishnevskii V. V., Integrable affin structures and their plural interpretations. *Geometry, 7.J. Math. Sci. (New York)* 108 (2) (2002), 151-187.
- [23] Walker, A.G.: *Connexions for parallel distributions in the large I,II*. *The Quart. J. Math. Oxford (2)*, vol. 6, 301-308 (1955), vol.9, 221-231 (1958)
- [24] Weil, A.: *Sur la theorie des formes differentielles attachee analytique complexe*, *Comm. Math. Helv.* 20, 110-116 (1947)
- [25] Włodzimierz M., Tomáš J., Reduction for natural operators on projectable connections, *Demonstratio Mathematica*, 42 (2) (2009), 435-439.
- [26] Yano, K.: *Differential Geometry on Complex and Almost Complex Spaces*, Oxford, Pergamon Press, New York (1965)
- [27] Yano K. and Ishihara S. *Tangent and Cotangent Bundles*. Marcel Dekker, Inc., New York, 1973.
- [28] Yıldırım F., Horizontal lifts of projectable linear connection to semi-tangent bundle, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 50 (6), (2021), 1709-1721.
- [29] Yıldırım F., Horizontal lift in the semi-tangent bundle and its applications, *Transactions of NAS of Azerbaijan*, 41 (4) (2021), 1-13.



## The Antioxidant Potential of Some Mushrooms

Şükrü Canpolat<sup>1</sup>

Elif Yürümez Canpolat<sup>2</sup>

### Abstract

The Fungi kingdom is one of the largest taxon in systematics with estimated 1.5 million species. With distinct lifestyles, including saprophytism, parasitism and symbiotism, members of Fungi are not only crucial for natural material cycles but also important for human health since they contain various bioactive components with antioxidant, antimicrobial, anti-tumor, and immunomodulating activities. These components can be obtained both from the mycelia or the fruiting bodies of a fungus. People have appreciated mushrooms (fruiting bodies of fungi) for their culinary qualities and unique medicinal properties since ancient times. In recent years, with increasing health concerns and growing interest in alternative treatment methods, the nutritional and health-beneficial properties of mushrooms have become more remarkable. In particular, mushroom species with high antioxidant activity contain pharmacologically valuable components and are thought to have various positive effects on human health. Better understanding the potential of mushrooms as natural resources and integrating this knowledge into clinical practice is important for developing new strategies to improve human health. This review is based on recent research conducted on various mushroom species. Mushrooms with high antioxidant activity are reported to contribute to pharmacological studies and their positive effects on health are discussed.

---

1 Asst. Prof., Niğde Ömer Halisdemir University, [elif.yurumez@ohu.edu.tr](mailto:elif.yurumez@ohu.edu.tr),  
ORCID 0000-0003-1470-1169

2 Dr., Niğde Ömer Halisdemir University, [sukrucanpolat@ohu.edu.tr](mailto:sukrucanpolat@ohu.edu.tr),  
ORCID 0000-0001-8223-7260

## 1. Introduction

Around the world, many communities have utilized mushrooms for a variety of purposes. They are widely found in different ecosystems. They have an important place among natural products [1]. The use of natural resources originating from regional biodiversity has surged, given the correlation between mushrooms and improved health and quality of life. For 21st century consumers, it is thought that food is not only a source of survival and energy, but also food should be considered as medicine and medicine as food, referring to the statement of Hippocrates. Many nations acknowledge the importance of including mushrooms in diets [2]. Protein, carbohydrates, vitamins, vital amino acids, and other nutrients are among their excellent nutritional values. They are also recognized as important medicinal resources [3].

In the last decade, various traditional food products have been re-evaluated and attracted the interest of consumers in terms of health benefits. Edible and medicinal mushrooms are among the food products that can support health status, therefore consuming them has grown popular [4]. Mushrooms are widely favored for their natural ingredients and as a source of microelements and bioactive metabolites, as well as their unique aromas and flavors. The use of mushrooms in popular culinary culture has been further explored and incorporated into herbal formulas, teas and health tonics [5].

Mushrooms can be utilized as components in functional foods because they have bioactive properties. This means that fungi can serve as natural matrices, i.e. they can provide a natural framework in which functional products are contained or formed. They can also serve as valuable ingredients that can be used to fortify certain food products [6]. Mushrooms are increasingly recognized as modern health food ingredients [7]. The phenolic compounds found in mushrooms, including protocatechuic acid, catechin, caffeic acid, gallic acid, myricetin and ferulic acid, are of interest to the food and pharmaceutical industries [8]. However, because of the variety of bioactive compounds found in mushrooms, researchers in the area of biotechnology have looked at how to extract useful functional molecules from industrial waste products [9]. They have a high protein content and are also a good source of vitamins, including niacin, thiamine, ascorbic acid, riboflavin, and ergosterol [10]. The amount of protein and overall carbohydrates in mushrooms may vary based on the species and cultivation process. Protein content is usually between 15% and 35%, and total carbohydrate content is usually between 35% and 70%. Furthermore, mushrooms may contain

significant amount of fiber (chitin and  $\beta$ -glucans) and are considered healthy food sources with low-fat content [11]. Also, the mushrooms are known as an excellent mineral accumulator. They contain high amounts of zinc, iron, and manganese [12]. However, edible mushrooms are generally consumed either as dried products or as fresh mushrooms with fruiting bodies. The medicinal mushrooms are typically employed in powder, loose, or liquid extract forms for biopharmaceutical applications [13]. This review reports recently investigated mushrooms with high antioxidant activity and their methods, which are thought to make a great contribution to food and clinical studies.

## 2. Mushrooms with High Antioxidant Potential

Antioxidants are one of the bioactive components of functional foods and play a key role in combating the damage caused by free radicals, which are generally defined as high-energy and unstable molecules with one or more unpaired electrons in their structure. Cell death results from the constant generation of free radicals. Numerous illnesses, including cirrhosis, diabetes, cancer, and aging, are brought on by these cell deaths and damage. In order to avoid chronic illnesses, natural antioxidants are crucial [14].

Under normal conditions, in a healthy individual, there is a balance between nitrogen (RNS; reactive nitrogen species) free radicals or oxygen (ROS; reactive oxygen species) antioxidants that occur naturally during metabolic activities in the body [15]. In addition to various extrinsic factors such as ultraviolet rays, environmental pollution, alcohol, smoking, and aging, some intrinsic factors can also trigger free radical formation. Under the influence of these factors, the amount of free radicals, which are beneficial at low concentrations, may increase and the free radical-antioxidant balance may be disturbed. Disruption of this balance leads to oxidative stress, which is associated with many diseases such as neurodegenerative diseases, diabetes, rheumatoid arthritis, cardiovascular diseases, respiratory system diseases, and cancer [16]. Mushroom phenolics are aromatic hydroxyl compounds that possess significant antioxidant capacity. Because of their ability to bind transition metal ions and act as hydrogen donors in the formation of stabilized radicals, flavonoids are the compounds that give specific antioxidant activity in polyphenolic compounds [17].



Photo 1. (A) *Entoloma sinuatum* (Fr.) P. Kumm. (1871) (B) *Agrocybe aegerita* (V. Brig.) Singer (1951) (C) *Lentinula edodes* (Berk.) Pegler (1976) (D) *Amanita caesarea* (Scop.) Pers. (1801)

***Entoloma sinuatum* (Fr.) P. Kumm. (1871):** Also referred to as leaden entoloma, lead poisoner, livid agaric, and livid pinkgill. It is a toxic mushroom that grows in North America and Europe. The outdated scientific names *Rhodophyllus sinuatus* and *Entoloma lividum* are still used in certain guidebooks. The type species of the pink spore mushroom genus *Entoloma* is also the largest mushroom [18].

***Agrocybe aegerita* (V. Brig.) Singer (1951):** It is referred to as “chestnut mushroom” and is a type of white rot fungus. Modern science also acknowledges the anti-inflammatory, antifungal, antibacterial, and anti-tumor effects of this mushroom. This mushroom is rich in minerals, vitamins, and phytochemicals. It has a particularly high concentration of copper and vitamin B5, pantothenic acid. In addition, it has selenium, potassium, riboflavin (vitamin B2), folate, biotin, niacin (vitamin B3). It is claimed to include substances that have the ability to block the cyclooxygenase enzyme, an enzyme that medications like Tylenol, Adril, and others are also attempting to suppress [19].

***Lentinula edodes* (Berk.) Pegler (1976):** *Lentinula edodes*, also known as Shiitake, is a species of edible mushroom recognized for its health benefits. Studies have revealed a relationship between the bioactive compounds of *L. edodes* and its antioxidant activity. It was stated that this relationship was

formed by phenolic compounds, terpenoids, ergosterols, and polysaccharides found in *L. edodes*. It is also reported that *L. edodes* has various pharmacological activities including anticancer, and immunomodulatory properties [20].

***Amanita caesarea* (Scop.) Pers. (1801):** *Amanita caesarea*, also known as “Caesar’s mushroom”, is a species of mushroom commonly found in Southern Europe and Asia, and has been the focus of medical research, particularly for its phenolic content and antioxidant activity. Numerous investigations on the total phenolic content and antioxidant activity of *A. caesarea* have yielded insightful data regarding its possible medical applications. A polysaccharide from *A. caesarea* has been shown in one study to have significant promise in the management of Alzheimer’s disease [21].



**Photo 2.** (A) *Clitocybe odora* (Bull.) P. Kumm. (1871) (B) *Lactarius deliciosus* (L.) Gray (1821) (Photo by Krisp H.) (C) *Russula vinosa* Lindblad (1901) (D) *Tricholoma imbricatum* (Fr.) P. Kumm. (1871)

***Clitocybe odora* (Bull.) P. Kumm. (1871):** *Clitocybe odora* (Bull.) P. Kumm (Agaricales) is a species of fungi that are abundant in forests dominated by pine trees and broadleaved forests. They have the ability to spread widely from late summer to early spring. This is an edible mushroom species. However, over consumption may lead to gastrointestinal syndromes [22].



***Lactarius deliciosus* (L.) Gray (1821):** The name *Lactarius* originates from the secretion of a milky white cellular fluid known as lactate when fruiting bodies are damaged or cut. *Lactarius deliciosus* is an ectomycorrhizal fungus of great importance for the growth of pine forests. *L. deliciosus*, also known as pine mushroom or saffron milk cap, forms a mycorrhizal association with its host and grows in acidic soil under coniferous forests [23]. The flesh of the fruiting body of *L. deliciosus* is flavourful, tender, and nutritious. As a medicinal and edible mushroom species, *L. deliciosus* is widely studied for its bioactive substances such as polysaccharides and proteins [24].

***Russula vinosa* Lindblad (1901):** *Russula vinosa* is an edible and nutritious mushroom containing a range of bioactive compounds including polysaccharides, proteins, trace elements, vitamins and amino acids. *R. vinosa* is a versatile edible fungus that is used in many different recipes due to its distinct flavor and excellent nutritional and therapeutic value. Frequently, polysaccharides in *R. vinosa* are heteropolysaccharides containing glucose, galactose, mannose and xylose which exhibit antitumour, antioxidant, immunomodulatory and hepatoprotective biological activities. Antitumor, anti-aging, and anti-inflammatory bioactivities of *R. vinosa* are promising. For *R. vinosa* species, it was reported that water-soluble and alkali-soluble polysaccharides from fruit bodies may protect the liver from CCl<sub>4</sub>-induced hepatic damage through antioxidant mechanisms [25, 26].

***Tricholoma imbricatum* (Fr.) P. Kumm. (1871):** It grows on sandy soil in pine forests, especially on acidic soils. As a result of research on *Tricholoma* species, it has been determined that these species generally contain many secondary metabolites including terpenoid derivatives. In phytochemical studies, terpenoids found in *Tricholoma* species were defined as components such as diterpenes, triterpenes, polyoxidised steroids, phenolic monoterpenoids, dieningeryl cyclohexenones and other indole derivatives with high antioxidant activities [27, 28].



Photo 3. (A) *Lycoperdon perlatum* Pers. (1795) (B) *Laetiporus sulphureus* (Bull.) Murrill (1920) (C) *Suillus collinitus* (Fr.) Kuntze (1898) (D) *Morchella esculenta* (L.) Pers. (1801) (E) *Cordyceps militaris* (L.) Fr. (1818)

***Lycoperdon perlatum* Pers. (1795):** *Lycoperdon perlatum*, also known as puff mushroom, which belongs to the family Agaricaceae, can live in almost every habitat, and can be found singly or in clusters. It has no lamellae and the cap is whitish in color. Although it is usually seen in the autumn months, it is possible to see it throughout the year. It is usually seen in forests with pine species. Studies have demonstrated that water and methanol extracts of this species have high antioxidant activity [29].

***Laetiporus sulphureus* (Bull.) Murrill (1920):** The fruiting bodies of *L. sulphureus*, also known as sulphur mushroom, have been the subject of many studies. According to reports, it can “induce diuresis, drain dampness, invigorate the spleen and calm the mind” when used in traditional Japanese and Chinese medicine [30].

***Suillus collinitus* (Fr.) Kuntze (1898):** *Suillus* is a mushroom genus from the Suillaceae family, popularly known as bear mushroom, which grows individually or in groups from summer to autumn in calcareous soils under pine. The genus *Suillus* contains a phenolic acid called “suillinin” and this phenolic substance has been proven to be a strong inducer of apoptosis in human hepatoma HepG2 cells [31]. It was also reported that the methanolic extract obtained from *S. collinitus* caused apoptosis in breast cancer cells [32].

***Morchella esculenta* (L.) Pers. (1801):** *Morchella esculenta* is one delicious mushroom distinguished for its special tastes and potent health

promoting abilities [33]. It is called the golden morel because of its golden color. It is found in pine forests in our country. It is seen in the spring season. Nutritionally, like many other edible mushrooms, the main compounds found in *M. esculenta* include polysaccharides, free amino acids, proteins, fatty acids, polyphenols, mineral substances, and alkaloids. According to the results of research conducted with this mushroom species, it has been determined that *M. esculenta* has antioxidant, antimicrobial and immunomodulatory properties [34].

***Cordyceps militaris* (L.) Fr. (1818):** *Cordyceps militaris*, one of the most important medicinal fungi belonging to the order Ascomycetes, is known as a parasite of Lepidoptera insect larvae. *C. militaris* hifleri pupaların içinde normal şekilde büyür ve ölür ve daha sonra pupaların başından, göğsünden veya karnından çıkar [35]. It is used as a traditional medicinal drug, especially in East Asia [36]. *C. militaris*'in biyoaktif bileşenleri arasında cordycepin asit, mannitol, alkaloidler, cordycepin, B1 ve B2 vitaminleri ve polisakaritler bulunur [37]. Toplam ağırlıklarının %3-8'ini oluşturan *C. militaris*'teki polisakaritler, birincil aktif bileşiklerdir ve kan şekerini düşürücü, antioksidan, bağışıklık sistemini güçlendirici, antitümör, antibakteriyel ve antiinflamatuvar etkiler gösterir [38].



**Photo 4.** (A) *Trametes versicolor* (L.) Lloyd (1920) (B) *Hericium erinaceus* (Bull.) Pers. (1797) (C) *Bjerkandera adusta* (Willd.) P. Karst. (1879) (D) *Ganoderma lucidum* (Fr.) P. Karst. (1881)

***Trametes versicolor* (L.) Lloyd (1920):** Also known as the turkey tail mushroom. It is a fungus easily found in wooded areas in Europe and China, and is the most common polypore in the oak forests of the Pacific Coast in the USA [39]. It has been observed that the *Trametes* mushroom increases the synthesis of P53 protein that provides cell death and decreases the synthesis of Bcl-2 proteins that inhibit cell death. *Trametes* mushroom accelerates the death of cancer cells by improving the defective apoptosis mechanism of cancer cells [40].

***Hericiium erinaceus* (Bull.) Pers. (1797):** Commercially grown *Hericiium erinaceus*, often known as “Lion’s Mane,” is a significant edible and medicinal mushroom species that is extensively consumed in Asian nations due to its advantageous nutritional and health properties. It has an extended history in conventional Chinese medicine as well. This species can aid in the mitigation, prevention, and even therapy of a number of grave health issues, including diabetes, cancer, depression, and neurological disorders [41]. *H. erinaceus*’s primary active ingredients are polysaccharides, steroids, alkaloids, lactones, terpenoids (particularly species-specific ones like erinacines and hericenones), and a few phenolic compounds. These substances contribute to the stimulation of neurogenesis, promote learning and memory processes, have anticancer activity, and modulate the immune system, among other functions of the nervous system [42].

***Bjerkandera adusta* (Willd.) P. Karst. (1879):** *Bjerkandera adusta* is a white rot fungi belonging to the Meruliaceae family. Like many other white rot fungi, it plays a role in lignin degradation and mineralization by secreting ligninolytic enzymes (such as manganese peroxidase, laccase and lignin peroxidase). These enzymes also contribute to the prevention of environmental pollution by providing color removal in dye and textile wastewater [43].

***Ganoderma lucidum* (Fr.) P. Karst. (1881):** *G. lucidum* is one of the medicinal mushroom species that is particularly valuable in cancer treatments due to its anti-inflammatory effect, immune-boosting properties, and toxic effect against cancer cells. *G. lucidum* polysaccharides are the main active components of the water-soluble extracts. These polysaccharides are known to prevent cancer cells from forming a new vessel and stop the development of tumour cells by showing direct cytotoxic effect [44]. Mushrooms with high antioxidant activity in studies conducted in the last four years are listed below. Methods and results are reported in Table 1.

**Table 1: Research conducted on antioxidant activities of various macrofungi by different methods.**

Mushroom Type	Extraction Solvent	Antioxidant Activity Method	Activity Result	Reference
<i>Agrocybe aegerita</i>	%60 Ethanol	ABTS radical scavenging	1981 mg TE/100 g	[45]
<i>Amanita caesarea</i>	Methanol	DPPH radical scavenging IC50 (mg/mL)	0.15±0.02	[46]
<i>Bjerkandera adusta</i>	Ethanol	DPPH radical scavenging	200 mg/mL 79.66%	[47]
<i>Clitocybe odora</i>	Ethanol	Rel Assay TAS ( $\mu\text{mol H}_2\text{O}_2$ equivalent $\text{L}^{-1}$ )	6.801±0.243 mmol/L	[48]
<i>Cordyceps militaris</i>	Methanol	DPPH radical scavenging IC50 (mg/mL)	0.97±0.08 and percentage inhibition: 45.79-91.58	[46]
<i>Coriolus versicolor</i>	Ethanol	DPPH radical scavenging ( $\mu\text{M}$ TE/g)	39,16±0,82	[49]
<i>Entoloma sinuatum</i>	Ethanol	Rel Assay TAS/TAS (mmol/L)	2,64±0,15	[50]
<i>Ganoderma lucidum</i>	Methanol	DPPH radical scavenging	Scavenging activity of 90.81%	[51]
<i>Hericium erinaceus</i>	Methanol	DPPH radical scavenging ( $\mu\text{M}$ TE/g extract)	38.88±1.59	[52]
<i>Laetiporus sulphureus</i>	Methanol	DPPH radical scavenging (IC50 $\mu\text{g}/\text{mL}$ IC50 equivalent 5.33 mg/mL)	15.83 - 61.03%	[53]
<i>Lentinus edodes</i>	Methanol	DPPH radical scavenging	984.4 mg TE/100 g	[45]
<i>Lycoperdon perlatum</i>	Aqueous extract	DPPH radical scavenging	60.3% scavenging activity	[54]
<i>Macrolepiota procera</i>	Methanol	DPPH radical scavenging IC50 $\mu\text{g}/\text{mL}$	215.03±5.63	[55]

<i>Morchella esculenta</i>	Methanol	DPPH radical scavenging	82.25 µg/mL-40.8% scavenging activity	[56]
<i>Russula vinosa</i>	polyphenol-rich extract (80% methanol)	DPPH radical scavenging	90% and above scavenging activity	[57]
<i>Suillus collinitus</i>	Ethanol	Rel Assay TAS/TAS (mmol/L)	2.467 ± 0.145 mmol/L	[58]
<i>Suillus luteus</i>	%60 ethanol	ABTS radical scavenging	2211 mg TE/100 g	[45]
<i>Tricholoma imbricatum</i>	Ethanol	Rel Assay TAS/TAS (mmol/L)	3.474±0.049	[59]

Table 1 shows that the results obtained from various studies differed. The reasons for the different results may include the cultivation methods, development of the mushrooms under different environmental conditions, developmental stages during harvesting and genetic diversity among species. Some other examples about the antioxidant activity of various mushroom species are mentioned below to support this statement.

According to a study, *Russula virescens* ethanol and aqueous extracts demonstrated dose-dependent DPPH radical scavenging ability. Hasnat et al. [60] reported that the ethanol extract had the most scavenging activity at 52.62%, whereas the aqueous extract had the highest activity at 81.13%. In another study investigating the DPPH scavenging activity of *Ganoderma lucidum*, the scavenging activity of 200 mg/mL mushroom extract against 0.1 mM DPPH solution was determined as 90.81%. This value is quite high compared to other medicinal mushrooms. The DPPH scavenging activity determined in this study is consistent with other studies conducted with *Ganoderma* species [51].

According to Kalyoncu et al. [61] the ethanol extract of *Morchella esculenta* var. *rigida* shown a scavenging activity of 87.07% against ABTS+ radicals, but the ethanol extract of *Omphalotus olearius* demonstrated a considerably high scavenging activity of 88.01% against the same radicals at a concentration of 1 mg/mL. The methanol extract of *Morchella conica* (40 µg/mL) showed 78.66% scavenging activity against ABTS+ radicals [62]. The methanol extract of *Amanita cesarea* at 0.14 mg/mL concentration showed 92.0% scavenging activity against ABTS+ radicals [63]. Keleş et al. [64] reported that the methanolic extract of *Suillus luteus* at a concentration of 25 mg/mL showed the highest (97.96%) scavenging potential in a

study reporting the scavenging potential of some fungal species. Ethanol extract of *Bjerkandera adusta* showed 79.66% scavenging activity against 0.1 mM DPPH solution [47]. In a study examining the DPPH radical scavenging activities of *Clitocybe geotropa*, *Amanita caesarea*, *Lentinula edodes* and *Cordyceps militaris* it was found that *A. caesarea* and *C. militaris* showed higher antioxidant activity [46]. This study serves as a resource for the potential use of these mushroom species in alternative medicine.

### 3. Conclusion

This review highlights the great potential of mushrooms for health and shows the importance of 20 different mushroom species with high antioxidant activity. Antioxidants reduce oxidative stress and protect cellular health by neutralizing the harmful effects of free radicals in the body. These antioxidant properties in mushrooms offer an important contribution to health. These wild mushrooms, which are used both as food and medicine and constitute an important source of antioxidant compounds, may have medicinal value due to their antioxidant activity.

In particular, the antioxidant activities of a wide range of mushroom species from *Agrocybe aegerita* to *Cordyceps militaris*, *Lentinula edodes* to *Tricholoma imbricatum* have been studied. Many of these species are also known to be used in traditional medicine and are supported by modern research. The antioxidant properties of mushrooms are especially important in combating oxidative stress, which increase due to the stress of modern life, environmental factors and poor dietary habits. Therefore, this study highlights the positive effects of mushrooms on health and points the way for future research. Future research is needed to better understand the biological effects of these mushrooms and to evaluate their potential therapeutic uses. This study may open new avenues for the utilization of antioxidant-rich mushrooms in the health industry and nutrition.

## References

1. Sevindik, M. & Bal, C. (2021). Antioxidant, antimicrobial, and antiproliferative activities of wild mushroom, *Laeticutis cristata* (Agaricomycetes), from Turkey. *International Journal of Medicinal Mushrooms* 23(11), 85-90.
2. Gürgeç, A., Sevindik, M., Yıldız, S. & Akgül, H. (2021). Determination of antioxidant and oxidant potentials of *Pleurotus citrinopileatus* mushroom cultivated on various substrates. *KSÜ Tarım ve Doğa Dergisi* 23(3), 586-591.
3. Torres-Gómez, M., Garibay-Orijel, R., Pérez-Salicrup, D. R., Casas, A. & Guevara, M. (2022). Wild edible mushroom knowledge and use in five forest communities in central México. *Canadian Journal of Forest Research* 53(1), 25-37.
4. Abdelshafy, A.M., Belwal, T., Liang, Z., Wang, L., Li, D., Luo, Z. & Li, L. (2022). A comprehensive review on phenolic compounds from edible mushrooms: Occurrence, biological activity, application and future prospective, *Critical Reviews in Food Science and Nutrition*, 62:22, 6204-6224.
5. Maity, P., Sen, I.K., Chakraborty, I., Mondal, S., Bar, H., Bhanja, S.K., Mandal, S. & Maity, G.N. (2021). Biologically active polysaccharide from edible mushrooms: A review. *International Journal of Biological Macromolecules*, 172, 408-417.
6. Reis, F. S., Martins, A., Vasconcelos, M. H., Morales, P., & Ferreira, I. C. (2017). Functional foods based on extracts or compounds derived from mushrooms. *Trends in Food Science & Technology*, 66, 48-62.
7. Das, A.K., Nanda, P.K., Dandapat, P., Bandyopadhyay, S., Gullón, P., Sivaraman, G.K., McClements, D.J., Gullón, B., & Lorenzo, J.M. (2021). Edible mushrooms as functional ingredients for development of healthier and more sustainable muscle foods: A flexitarian approach. *Molecules*, 26(9), 2463.
8. Pérez-Montes, A., Rangel-Vargas, E., Lorenzo, J.M., Romero, L. & Santos, E.M. (2021). Edible mushrooms as a novel trend in the development of healthier meat products. *Current Opinion In Food Science*, 37, 118-124.
9. Ramos, M., Burgos, N., Barnard, A., Evans, G., Preece, J., Graz, M., Ruthes, A.C., Jiménez-Quero, A., Martínez-Abad, A., Vilaplana, F., Ngoc, L.P., Brouwer, A., van der Burg, B., Garrigós, M.D.C. & Jiménez, A. (2019). *Agaricus bisporus* and its by-products as a source of valuable extracts and bioactive compounds. *Food Chemistry*, 292, 176-187.
10. Sevindik, M. (2018). Investigation of oxidant and antioxidant status of edible mushroom *Clavariadelphus truncatus*. *Mantar Dergisi/The Journal of Fungus*, 9(2), 165-168.



11. Wu, J., Yang, Z., Yang, X., Chen, X., Zhang, H. & Zhan, X. (2021). Synthesis of branched  $\beta$ -1,3- glucan oligosaccharide with narrow degree of polymerization by fungi co-cultivation. *Carbohydrate Polymers*, 273, 118582.
12. Ghahremani-Majd, H., Dashti, F. (2015). Chemical composition and antioxidant properties of cultivated button mushrooms (*Agaricus bisporus*). *Horticulture, Environment, and Biotechnology*, 56(3), 376-382.
13. Elkhateeb, W.A., Daba, G.M., Thomas, P.W. & Wen, T.-C. (2019). Medicinal Mushrooms as a Source of Natural Therapeutic Bioactive Compounds. *Egyptian Pharmaceutical Journal*, 18, 145-155.
14. Chandra P, Sharma RK, Arora DS 2020. Antioxidant compounds from microbial sources: A review. *Food Research International* 129: 108849.
15. Karabulut, H., Gülay, M. Ş. (2016). Serbest radikaller. *Mehmet Akif Ersoy University Journal of Health Sciences Institute*, 4(1), 50-59.
16. Altınar, A., Atalay, H., Bilal, T. (2018). Serbest radikaller ve stres ile ilişkisi. *Balıkesir Sağlık Bilimleri Dergisi*, 7(1), 51-55.
17. Raseta, M., Popovic, M., Knezevic, P., Sibul, F., Kaisarevic, S. & Karaman, M. (2020). Bioactive Phenolic Compounds of Two Medicinal Mushroom Species *Trametes versicolor* and *Stereum subtomentosum* as Antioxidant and Antiproliferative Agents. *Chemistry and Biodiversity*, 17.
18. Zeitelmayr L 1976. *Wild Mushrooms: An Illustrated Handbook*. Hertfordshire, UK: Garden City Press. p. 80.
19. Yıldırım A., 2018., "Agrocybe Aegerita (kestane) mantarı faydaları yan etkileri kullanım şekli", <https://www.devazen.com/2018/10/agrocybe-aegerita-kestane-mantar.html>, Erişim tarihi: 31. 03. 24.
20. Wu, F., Wang, H., Chen, Q., Pang, X., Hao, J., Yin, L., Zhang, X. (2023). Lignin promotes mycelial growth and accumulation of polyphenols and ergosterol in *Lentinula edodes*. *Journal of Fungi*, 9(2), 237.
21. Hu, W., Li, Z., Wang, W., Song, M., Dong, R., Zhou, Y., Li, Y., Wang, D. (2021). Structural characterization of polysaccharide purified from *Amanita caesarea* and its pharmacological basis for application in Alzheimer's disease: endoplasmic reticulum stress. *Food & Function*, 12(21), 11009-11023.
22. Sahin, E., Keskin, E. & Akata, I. (2021). Molecular characterization of the complete genome of a novel partitivirus hosted by the saprobic mushroom *Leucocybe candicans*. *Archives of Microbiology* 203(9), 5825-5830.
23. Dospatliev, L. (2017). Macroelement contents and chemical composition of *Lactarius deliciosus* (L.) collected from Batak Mountain in Bulgaria. *Applied Researches in Technics, Technologies and Education*, 5(3), 165-170.

24. Su, S., Ding, X., Fu, L., & Hou, Y. (2019). Structural characterization and immune regulation of a novel polysaccharide from maerkang *Lactarius deliciosus* Gray. *International Journal of Molecular Medicine*, 44(2), 713–724.
25. Liu Q, Tian G, Yan H, Geng X, Cao Q, Wang H, et al. Characterization of polysaccharides with antioxidant and hepatoprotective activities from the wild edible mushroom *Russula vinosa* Lindblad. *J Agric Food Chem.* (2014) 62:8858–66.
26. Zhang, H., Li, C. C., Lai, P. F. H., Chen, J. S., Xie, F., Xia, Y. J., et al. (2021). Fractionation, chemical characterization and immunostimulatory activity of betaglucan and galactoglucan from *Russula vinosa* Lindblad. *Carbohydrate Polymers*, 256.
27. Solak, M.H. Işıloğlu, M. Kalmış, E. ve Allı, H. (2007) *Macrofungi of Turkey, Checklist Vol. I* Bornova, İzmir: Genç Üniversiteler Ofset. p: 254.
28. Çavdar H. Bazı *Tricholoma* Türlerinin Besinsel Özelliklerinin İncelenmesi. Yüksek Lisans Tezi, Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Muğla, 2013: 4-48.
29. Sarıkürkcü, C., Semiz, D. K., Solak, M. H., Üniv, O. M., (2006). *M. Lycoperdon perlatum* Pers., *Agaricus bisporus* (Lge.) Imbach ve *Gomphus clavatus* SF Gray. Mantarlarının Çeşitli Çözücü Özütlelerinin in vitro Antioksidan Aktivitelerinin Belirlenmesi. Türkiye 9. Gıda Kongresi, 24-26 Mayıs, Bolu.
30. Kobira, S., Atsumi, T., Kakiuchi, N., & Mikage, M. (2012). Difference in cultivation characteristics and genetic polymorphism between Chinese and Japanese strains of *Wolfiporia cocos* Ryvarden et Gilbertson (*Poria cocos* Wolf). *Journal of natural medicines*, 66, 493-499.
31. Liu F Y, Luo K W, Yu Z M, Co N N, Wu S H, Wu P W, et al. Suillin from the mushroom *Suillus placidus* as potent apoptosis inducer in human hepatoma HepG2 cells. *Chem Bio Interact.* 2009; 181: 168–174.
32. Vaz J A, Ferreira I C F R, Tavares C, Almeida G M, Martins A, Vasconcelos H M. *Suillus collinitus* methanolic extract increases p53 expression and causes cell cycle arrest and apoptosis in a breast cancer cell line, *Food Chem.* 2012; 135(2): 596–602.
33. Tietel, Z., & Masaphy, S. (2017). True Morels (*Morchella*) – Nutritional and phytochemical composition, health benefits and favor: A review. *Critical Reviews in Food Science and Nutrition*, 58(11), 1888–1901.
34. Heleno, S. A., Stojković, D., Barros, L., Glamoclija, J., Soković, M., Martins, A., ... & Ferreira, I. C., (2013). A comparative study of chemical composition, antioxidant and antimicrobial properties of *Morchella esculenta* (L.) Pers. from Portugal and Serbia. *Food Research International*, 51(1), 236-243.

35. Zhang, S., Hao, A. J., Zhao, Y. X., Zhang, X. Y., & Zhang, Y. J. (2017). Comparative mitochondrial genomics toward exploring molecular markers in the medicinal fungus *Cordyceps militaris*. *Scientific Reports*, 7(1), 40219.
36. Holliday, J.C., Cleaver, M. 2008. Medicinal value of the caterpillar fungi species of the genus *Cordyceps* (Fr.) Link (Ascomycetes). *International Journal of Medicinal Mushrooms*, 10(3): 219-234.
37. Zhou, X., Gong, Z., Su, Y., Lin, J., & Tang, K. (2009). *Cordyceps* fungi: natural products, pharmacological functions and developmental products. *Journal of Pharmacy and Pharmacology*, 61(3), 279-291.
38. Chanjula, P., & Cherdthong, A. (2018). Effects of spent mushroom *Cordyceps militaris* supplementation on apparent digestibility, rumen fermentation, and blood metabolite parameters of goats. *Journal of Animal Science*, 96(3), 1150-1158.
39. Harhaji Lj, Mijatović S, Maksimović-Ivanić D, Stojanović I, Momčilović M, Maksimović V, Tufegdžić S, Marjanović Z, Mostarica-Stojković M, Vucinić Z, Stosić-Grujčić S. Anti-tumor effect of *Coriolus versicolor* methanol extract against mouse B16 melanoma cells: in vitro and in vivo study. *Food Chem Toxicol*. 2008 May;46(5):1825-33.
40. Ho CY, Kim CE, Leung KN, Fung KP, Tse TF, Chan H, Lau CB. Differential anti-tumor activity of *coriolus versicolor* (Yunzhi) extract through p53- and/or Bcl-2-dependent apoptotic pathway in human breast cancer cells. *Cancer Biol Ther*. 2005 Jun;4(6):638-44.
41. Friedman, M. (2015). Chemistry, Nutrition, and Health-Promoting Properties of *Herichium erinaceus* (Lion's Mane) Mushroom Fruiting Bodies and Mycelia and Their Bioactive Compounds. *Journal of Agricultural and Food Chemistry*, 63, 7108–7123.
42. Tachabenjarong, N., Rungsardthong, V., Ruktanonchi, U., Poodchakarn, S., Thumthanaruk, B., Vatanyoopaisarn, S., ... & Uttapap, D. (2022). Bioactive compounds and antioxidant activity of Lion's Mane mushroom (*Herichium erinaceus*) from different growth periods. In *E3S Web of Conferences* (Vol. 355, p. 02016). EDP Sciences.
43. Westphalen, M. C., Tomsovsky, M., Kout, J., & Gugliotta, A. M. (2015). *Bjerkandera* in the Neotropics: phylogenetic and morphological relations of *Tyromyces atroalbus* and description of a new species. *Mycological Progress*, 14(2015), 1-8.
44. Xu, Z., Chen, X., Zhong, Z., Chen, L., Wang, Y. (2011). *Ganoderma lucidum* polysaccharides: immunomodulation and potential anti-tumor activities. *The American Journal of Chinese Medicine*, 39(1), 15-27.
45. Kaya, M., Berktaş, S., Adanacıoğlu, N., Çam, M.. (2021). Kayseri bölgesinde doğal olarak yetişen ve kültüre edilen tıbbi mantarların toplam fenolik

- madde içeriklerinin, antioksidan aktivitelerinin ve eritadenin bileşiğinin belirlenmesi. *GIDA* (2021) 46(2) 376-395.
46. Karadeniz M., Bakır T., Ünal S., “Investigation of the Phenolic Contents and Antioxidant Activities of Some Natural Edible Mushroom Species”, *Journal of Bartın Faculty of Forestry* 2024, 26(1): 7–12.
  47. Ildız, E., Canpolat, Şükürü, İşlek, C., Yürümez Canpolat, E., İşlek, Y. ve Akata, I. (2022). Niğde’den Toplanan Bjerkandera adusta: Toplam Fenolik Bileşik, Antioksidan ve Antimikrobiyal Özelliklerin Analizi. *Türk Tarım Dergisi - Gıda Bilimi ve Teknolojisi* , 10 (sp2), 2996–3000.
  48. Sevindik, M, (2023) Total Phenolic, Total Flavonoid Contents and Antioxidant Potential of The Wild Edible Mushroom *Clitocybe odora*. *KSÜ Tarım ve Doğa Derg* 27 (1), 75-81.
  49. Altıntaş, Ö. E., & Çelik, P. A. Comparative Assessment of Nutritional Composition, Polyphenol Content and Antioxidative Properties of Edible and Medicinal Mushroom: *Coriolus versicolor*. *Journal of Anatolian Environmental and Animal Sciences*, 8(4), 626-634.
  50. Bal, C., Baba, H., Akata, I., Sevindik, M., Selamoglu, Z., & Akgül, H., (2022). Biological Activities Of Wild Poisonous Mushroom *Entoloma Sinuatum* (Bull.) P. Kumm (Boletales). *Ksu Tarım Ve Doga Dergisi-Ksu Journal Of Agriculture And Nature* , Vol.25, No.1, 83-87.
  51. Canpolat, Ş. ve Canpolat, E. Y., “Antioxidant and Antimicrobial Activity of a Medicinal Mushroom, *Ganoderma lucidum*”, *Journal of Advances in Biology & Biotechnology* Volume 26, Issue 11, Page 60-67, 2023.
  52. Altıntaş, Ö. E. 2023. ve Tıbbi Mantar *Hericium erinaceus*’ un Besin Bileşimi, Antioksidan Aktiviteleri ve Anti-kanser Etkisinin Değerlendirilmesi. *Journal of the Institute of Science and Technology*, 13(4), 2622-2633.
  53. Bulam, S., Karadeniz, M., Bakır, T. K., & Ünal, S. (2022). Assessment of total phenolic, total flavonoid, metal contents and antioxidant activities of *Trametes versicolor* and *Lactiporus sulphureus*. *Acta Scientiarum Polonorum Hortorum Cultus*, 21(5), 39-47.
  54. Nowakowski, P., Markiewicz-Żukowska, R., Gromkowska-Kępka, K., Naliwajko, S. K., Moskwa, J., Bielecka, J., Socha, K. (2021). Mushrooms as potential therapeutic agents in the treatment of cancer: Evaluation of anti-glioma effects of *Coprinus comatus*, *Cantharellus cibarius*, *Lycoperdon perlatum* and *Lactarius deliciosus* extracts. *Biomed Pharmacother*, 133: 111090.
  55. Dinçer, E., (2022), “Çeşitli Yenilebilir Mantarların Antioksidan Aktivitesi”, Sivas Cumhuriyet Üniversitesi, Sağlık Bilimleri Fakültesi, Beslenme ve Diyetetik Bölümü Sivas, Türkiye, Konferans: 7. Uluslararası Mardin Artuklu Bilimsel Araştırmalar Kongresi.

56. Canpolat, Şükrü, Akata, İ., İşlek, Y., Canpolat, E. ve İşlek, C. (2021). Niğde'den Toplanan Bazı Yenilebilir Ascomycota'ların Toplam Fenolikleri, Antioksidatif ve Antimikrobiyal Aktiviteleri. *Türk Tarım Dergisi - Gıda Bilimi ve Teknolojisi*, 9 (10), 1915–1920.
57. Chen, H., Zhou, H., She, Z., Lu, H., Wen, M., Wang, X., Wei, Z., Yang, S., Guan, X., Tong, Y., Qin, Q., Zhu, P., Nong, Y., & Zhang, Q. (2024). Phytochemical and medicinal profiling of *Russula vinosa* Lindbl (RVL) using multiomics techniques. *LWT*, 192, 115723.
58. Bal, C., 2021(b). *Suillus collinitus*'ün Antioksidan Aktivitesi ve Element İçeriği. *Türk Tarım Dergisi - Gıda Bilimi ve Teknolojisi*, 9 (2), 352–355.
59. Bal C., 2021(a). Antioxidant Potential and Element Content of Wild Mushroom *Tricholoma imbricatum*. *KSU J. Agric Nat* 24 (1): 196-199.
60. Hasnat, M.A., Pervin, M., Debnath, T. and Lim, B.O., “DNA protection, total phenolics and antioxidant potential of the mushroom *Russula virescens*”, *Journal of Food Biochemistry*, 38(1), 6-17, 2014.
61. Kalyoncu, F., Oskay, M. and Kalmış, E., Bazı yabani makrofungus misellerinin antimikrobiyal aktivitelerinin belirlenmesi, *Mantar Dergisi*, 1(1), 1-8, 2010.
62. Gursoy, N., Sarikurkcu, C., Cengiz, M., & Solak, M. H. (2009). Antioxidant activities, metal contents, total phenolics and flavonoids of seven *Morchella* species. *Food and Chemical Toxicology*, 47(9), 2381-2388.
63. Kozarski, M., Klaus, A., Niksic, M., Jakovljevic, D., Helsper, J. P., & Van Griensven, L. J. (2011). Antioxidative and immunomodulating activities of polysaccharide extracts of the medicinal mushrooms *Agaricus bisporus*, *Agaricus brasiliensis*, *Ganoderma lucidum* and *Phellinus linteus*. *Food chemistry*, 129(4), 1667-1675.
64. Keleş, A., Koca, I. and Genççelep, H., “Antioxidant properties of wild edible mushrooms”, *Journal of Food Processing & Technology*, 2(6), 2-6, 2011.

## Dual Birim Küre ve Study Dönüşümü

Bülent Karakaş<sup>1</sup>

Şenay Baydaş<sup>2</sup>

### Özet

$\mathbb{R}^3$  uzayının elemanları üzerinde kurulan yapıya göre isimlendirilir.  $\mathbb{R}^3$  uzayı afin yapıyla ele alındığında noktalar cümlesi, vektör uzayı yapıyla ele alındığında vektörler cümlesi, projektif yapıyla ele alındığında yönlü doğrular cümlesi olarak ele alınabilir. Her farklı durum için  $\mathbb{R}^3$  uzayının izomorfik olduğu yapılar farklılık gösterir. Birebir eşlemlerden biri  $\mathbb{R}^3$  ün yönlü doğrularının birebir eşlendiği birim dual küredir.

Birim dual kürenin temelinde olan dual sayılar, Clifford [1,2] tarafından tanımlanmış olan sıfırdan farklı ancak kendisiyle dual çarpımı sıfır olan dual birimle tanımlanan sayılardır.

Birim dual küre [3,4] form olarak küre konseptine sahip, dual çarpımı ve dual iç çarpımı kullanarak tanımlanan küredir. Birim dual kürenin yönlü doğrularla [4] birebir eşlemesi sonucu olarak  $\mathbb{R}^3$  uzayındaki regle yüzeyler birim dual kürenin eğrileriyle eşlenir ve incelemeler senkronize olarak ele alınabilir.

### 1. DUAL SAYILAR

$\mathbb{R}$  reel sayılar cümlesini gösterebilir.

$$*: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (a, b) * (c, d) = (ac, ad + bc)$$

olarak tanımlanan işleme dual çarpım işlemi denir [4].

$(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, *)$  ikilisi  $\mathfrak{D}$  ile gösterilsin.  $\mathfrak{D}$  üzerinde toplama işlemi

$$\mathfrak{D} \times \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D} (a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$$

olarak tanımlansın.  $(\mathfrak{D}, \oplus, *)$  üçlüsü birimli ve değişimli bir halkadır. Yani aşağıdaki şartlar sağlanır.

1 Bartın Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü, Bartın, bk@bartin.edu.tr,

2 Van Yüzcüncü Yıl Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, sbaydas@yyu.edu.tr

1.  $(\mathfrak{D}, \oplus)$  değişmeli bir gruptur,
2.  $\mathfrak{D}$  de  $*$  işlemi birleşme özelliğine sahiptir,
3.  $\mathfrak{D}$  de  $*$  işlemi  $\oplus$  işlemi üzerine soldan ve sağdan dağılma özelliğine sahiptir.

$(\mathfrak{D}, \oplus, *)$  birimli ve değişimli halkasına *dual sayılar cümlesi* denir.

Bir  $d = (a, b) \in \mathfrak{D}$  dual sayısı

$$\begin{aligned} d &= (a, b) \\ &= (a, 0) + (0, b) \\ &= a(0, 1) + b(0, 1) \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Bu yazılışla birlikte  $(0, 1)$  dual sayısına  $d$  nin reel birimi ve  $(0, 1)$  dual sayısına da  $d$  nin dual birimi adı verilir.

Dual birimi  $\varepsilon$  ile gösterilsin.  $\varepsilon$  nin kendisiyle dual çarpımı klasik dual sayı tanımına götüren bir özelliğe sahiptir.

Çarpma işlemi yapılırsa

$$\begin{aligned} \varepsilon * \varepsilon &= (0, 1) * (0, 1) \\ &= (0.0, 0.1 + 1.0) \\ &= (0, 0) \end{aligned}$$

ve  $\{(a, 0) | (a, 0) \in \mathfrak{D}\} \rightarrow \mathbb{R}$  birebir eşlemesinden dolayı  $\varepsilon^2 = 0$  elde edilir. Bu son eşitlik dual sayıların klasik tanımındaki ön şarttır.

$\{(a, 0) | (a, 0) \in \mathfrak{D}\} \rightarrow \mathbb{R}$  ve  $\{(0, b) | (0, b) \in \mathfrak{D}\} \rightarrow \mathbb{R}$  bire bir eşlemeleri kullanılarak bir

$d = (a, b) \in \mathfrak{D}$  dual sayısı dual birimin  $\varepsilon$  ile gösterimi de kullanılarak

$$\bar{d} = a + \varepsilon b$$

şeklinde veya yaygın kullanımıyla  $d = a + \varepsilon a^*$  yazılabilir.  $d = a + \varepsilon a^*$  dual sayısının eşleniği ise  $d = a - \varepsilon a^*$  olarak tanımlıdır.

## 2. Birim Dual Küre

$\mathfrak{D}$  dual sayılar cümlesini gösterebilir.

$$\mathfrak{D}^3 = \mathfrak{D} \times \mathfrak{D} \times \mathfrak{D}$$

olarak tanımlanan cümle üzerinde toplama ve skaler ile çarpma işlemleri aşağıdaki gibi tanımlansın.

$\forall A \in \mathfrak{D}^3$ ,  $A = (A_1, A_2, A_3)$ ,  $A = (a_1 + \varepsilon a_1^*, a_2 + \varepsilon a_2^*, a_3 + \varepsilon a_3^*)$ ,  
 $a_i, a_i^* \in \mathbb{R}$  olmak üzere,  $\forall A, B \in \mathfrak{D}^3$  ve  $\forall \lambda \in \mathfrak{D}$  için

**Toplama işlemi:**

$$\oplus : \mathfrak{D}^3 \times \mathfrak{D}^3 \rightarrow \mathfrak{D}^3, A + B = (A_1 + B_1, A_2 + B_2, A_3 + B_3)$$

**Skaler ile çarpma işlemi:** ,  $\lambda \odot A = (\lambda A_1, \lambda A_2, \lambda A_3)$

şeklinde tanımlıdır.  $(\mathfrak{D}^3, \oplus)$   $\mathfrak{D}$  üzerinde bir modüldür.

**Tanım.2.1:**  $\mathfrak{D}^3$  modülünün her elemanına dual vektör denir.

$\mathfrak{D}^3$  ün bir  $A = (A_1, A_2, A_3)$  elemanı reel ve dual olarak şöyle de yazılabilir.

$$\begin{aligned} A &= (a_1 + \varepsilon a_1^*, a_2 + \varepsilon a_2^*, a_3 + \varepsilon a_3^*) \\ &= (a_1, a_2, a_3) + \varepsilon (a_1^*, a_2^*, a_3^*) \\ &= \bar{a} + \varepsilon \bar{a}^*, \bar{a}, \bar{a}^* \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

$\mathfrak{D}^3$  üzerinde dual iç çarpım:  $\forall A, B \in \mathfrak{D}^3$

$$\begin{aligned} \langle A, B \rangle &= \langle \bar{a} + \varepsilon \bar{a}^*, \bar{b} + \varepsilon \bar{b}^* \rangle \\ &= \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle + \varepsilon \langle \bar{a}, \bar{b}^* \rangle + \langle \bar{a}^*, \bar{b} \rangle \\ &= \bar{c} + \varepsilon \bar{c}^* \end{aligned}$$

Tanımlanan dual iç çarpıma bağlı olarak bir dual vektörün normu tanımı şöyledir.

**Tanım 2.2:** Bir  $A \in \mathfrak{D}^3$   $A = \bar{a} + \varepsilon \bar{a}^*$  için,  $\bar{a} \neq 0$  olmak üzere,  $A$  nın normu

$$\|A\| = (\|\bar{a}\|, \frac{\langle \bar{a}, \bar{a}^* \rangle}{\|\bar{a}\|})$$

olarak belli olan dual sayıdır.

**Tanım 2.3:**  $\|A\| = (1, 0)$  olan  $A$  dual vektörüne birim dual vektör adı verilir.

$A$  birim dual vektör ise  $a$  nın reel ve dual kısımları için  $\|\bar{a}\| = 1$  ve  $\langle \bar{a}, \bar{a}^* \rangle = 0$  dir.

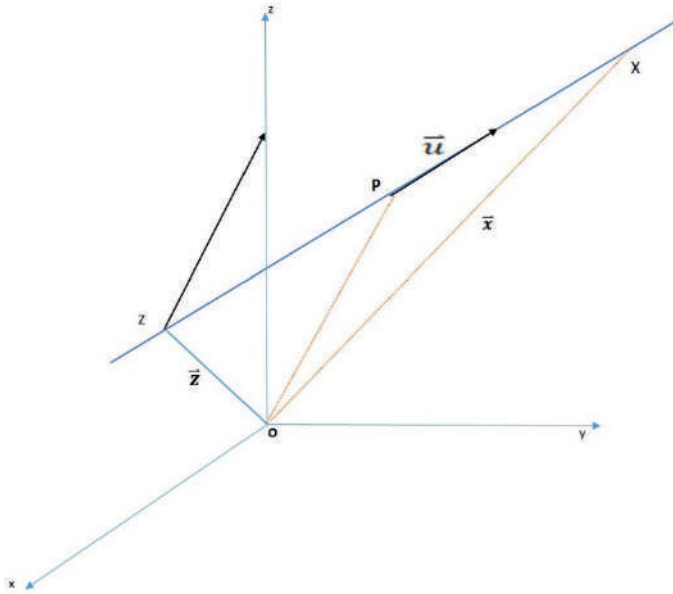


Dual sayılar ve dual vektör için buraya kadar aktarılanlar birim dual küre için gerekli olan bilgilerdi. Study dönüşümü ve ilgili teori için temel olan birim dual küre tanımı ile devam edilecektir.

**Tanım 2.4:**  $DS = \{ \bar{A} = \bar{a} + \varepsilon \bar{a}^* / \|A\| = (1, 0) \} \subset \mathfrak{D}^3$  cümlesine birim dual küre denir.

**Teorem 2.5.** Birim dual kürenin noktaları  $\mathbb{R}^3$  uzayındaki yönlü doğrular ile birebir eşlenir.

**İspat:** İspat için  $\mathbb{R}^3$  deki her yönlü doğrunun bir tek birim dual vektör tanımladığını ve her birim dual vektörün  $\mathbb{R}^3$  uzayında bir tek yönlü doğru tanımladığını göstermek yeter.



Şekil 2.1

Şekil 2.1'deki notasyonlarla  $\mathbb{R}^3$  deki bir doğrunun vektörel denklemi

$$(\bar{x} - \bar{p}) \times \bar{u} = 0$$

olarak yazılır. Vektörel denklemde  $\|\bar{u}\| = 1$  almak genelliği bozmaz.

$$\bar{x} \times \bar{u} = \bar{u}^*$$

vektörüne  $\bar{u}$  vektörünün O noktasına göre *vektörel momenti* denir.  $\bar{u}^*$  vektörü, X noktasının doğru üzerindeki seçilişinden bağımsızdır, şöyle ki; doğru üzerinde X den başka bir Y noktası seçilmiş olsaydı,

$$\begin{aligned}(\bar{y} - \bar{p}) \times \bar{u} &= 0 \\ \Rightarrow \bar{y} \times \bar{u} - \bar{p} \times \bar{u} &= 0 \\ \Rightarrow \bar{y} \times \bar{u} = \bar{p} \times \bar{u} = \bar{u}^*\end{aligned}$$

elde edilir ki bu da iddiayı doğrular. Böylece doğru üzerindeki temsilci nokta olarak X yerine O noktasının doğru üzerindeki dikme ayağı olan Z noktası alınabilir.

$\bar{u}^* = \overline{OZ}$  olup  $\|\bar{u}^*\|$  doğrunun O noktasına olan uzaklığıdır ve  $\langle \bar{u}, \bar{u}^* \rangle = 0$  dır. Böylece  $(\bar{u}, \bar{u}^*)$  vektör çifti

$$\begin{aligned}\|\bar{u}\| &= 1 \\ \langle \bar{u}, \bar{u}^* \rangle &= 0\end{aligned}$$

özelliklerini gerçekleyen bir vektör çiftidir ve  $\bar{u} + \varepsilon \bar{u}^*$  dual vektörü için

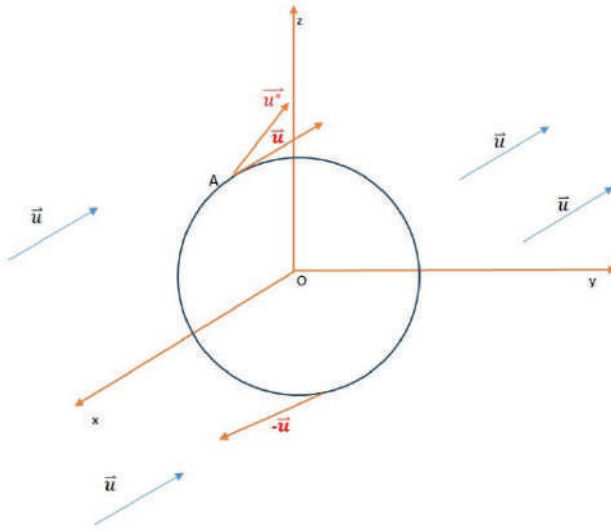
$$\|\bar{u} + \varepsilon \bar{u}^*\| = 1$$

dir. Sonuç olarak

$$\bar{u} + \varepsilon \bar{u}^* \in \mathcal{D}^3$$

yani  $\mathbb{R}^3$  de bir yönlü doğru verildiğinde tek türlü tanımlı bir  $\bar{u} + \varepsilon \bar{u}^*$  dual vektörü elde edilir.

İspatın ikinci kısmı:  $\bar{u} + \varepsilon \bar{u}^* \in DS$  verilsin.  $\|\bar{u}\| = 1$  ve  $\langle \bar{u}, \bar{u}^* \rangle = 0$  dır. Şekil 2.1 deki gösterimlerle devam edilecektir.



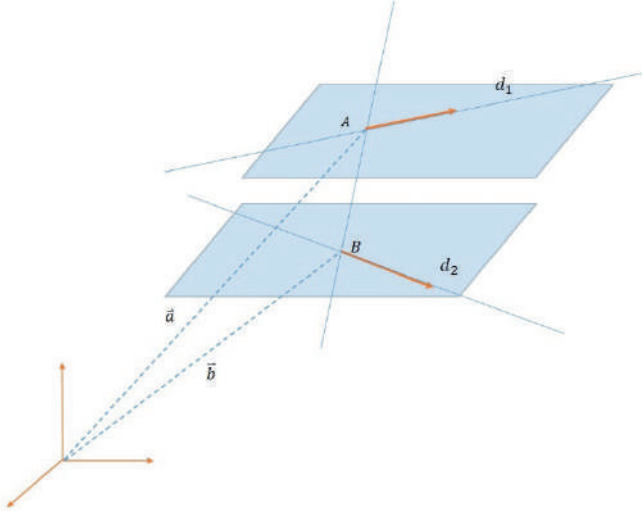
Şekil 2.2

Orijinden geçen  $\underline{u}$  ve  $\overline{u^*}$  vektörüne dik olan düzlem E ile gösterilsin. O merkezli ve  $\|\underline{u^*}\| = r$  yarıçaplı çember çizilsin. Bu çemberin teğet vektörlerinin  $\underline{u}$  ve  $-\underline{u}$  vektörleri ile çakışığı noktalardaki doğrular, A ve B noktalarından geçen,  $\underline{u}$  ve  $-\underline{u}$  vektörlerini doğrultman vektörü kabul eden iki doğrudur.  $\underline{u}$  vektörünün belirlediği yöne sahip olan doğru  $(\underline{u}, \overline{u^*})$  ikilisi ile belli olan doğrudur.

### 3. SD üzerindeki iç çarpımın yorumu

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}^3 \text{ deki iki } D_1 &= \underline{u} + \varepsilon \overline{u^*} \text{ ve } D_2 = \underline{v} + \varepsilon \overline{v^*} \text{ dual vektörlerinin iç çarpımı} \\ \langle D_1, D_2 \rangle &= \langle \underline{u} + \varepsilon \overline{u^*}, \underline{v} + \varepsilon \overline{v^*} \rangle \\ &= \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle + \varepsilon (\langle \underline{u}, \overline{v^*} \rangle + \langle \overline{u^*}, \underline{v} \rangle) \end{aligned}$$

dir.  $D_1, D_2 \in DS$  ve  $D_1$  ile belli olan doğru  $d_1$  ve  $D_2$  ile belli olan doğru  $d_2$  olsun.  $d_1$  için doğrultman vektörü  $\underline{u}$ , vektörel momenti  $\overline{u^*}$ ,  $d_2$  için doğrultman vektörü  $\underline{v}$ , vektörel momenti  $\overline{v^*}$  dir.  $d_1$  ve  $d_2$  doğrularının ortak dikme ayakları A ve B olsun.



Şekil 2.3

$\bar{a} \times \bar{u} = \bar{u}^*$ ,  $\bar{b} \times \bar{v} = \bar{v}^*$  dir.  $\bar{u} \times \bar{v}$  vektörü her iki doğruya da diktir ve  $\bar{u} \times \bar{v} \parallel \overline{AB}$ ,  $\overline{AB} = \bar{a} - \bar{b}$  olup,  $d_1$  ve  $d_2$  doğruları arasındaki uzaklık  $\theta^*$  ise

$$\bar{a} - \bar{b} = \frac{\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle}{\|\bar{u} \times \bar{v}\|} \theta^*$$

dir.  $\langle D_1, D_2 \rangle$  iç çarpımının reel kısmı

$$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = \|\bar{u}\| \|\bar{v}\| \cos \theta, \quad \theta = \angle(\bar{u}, \bar{v})$$

olarak elde edilir. Dual kısım için hesaplama şöyledir:

$$\begin{aligned} \langle \bar{u}, \bar{v}^* \rangle + \langle \bar{u}^*, \bar{v} \rangle &= \langle \bar{u}, \bar{b} \times \bar{v} \rangle + \langle \bar{a} \times \bar{u}, \bar{v} \rangle \\ &= (\bar{u}, \bar{b}, \bar{v}) + (\bar{a}, \bar{u}, \bar{v}) \\ &= \|\bar{u} \times \bar{v}\| \theta^* \\ &= \|\bar{u}\| \|\bar{v}\| \sin \theta \cdot \theta^* \end{aligned}$$

dolayısıyla sonuç olarak

$$\begin{aligned} \langle D_1, D_2 \rangle &= \cos \theta + \varepsilon \sin \theta \cdot \theta^* \\ &= \cos(\theta + \varepsilon \theta^*) \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\cos(\theta + \varepsilon\theta^*) = \cos\theta \cdot \cos(\varepsilon\theta^*) - \sin\theta \cdot \sin(\varepsilon\theta^*) \quad (*)$$

Taylor açılımı uygulanırsa,

$$\cos(\varepsilon\theta^*) = 1 - \frac{\varepsilon^2\theta^{*2}}{2!} + \frac{\varepsilon^4\theta^{*4}}{4!} - \dots = 1$$

$$\sin(\varepsilon\theta^*) = \varepsilon\theta^* - \frac{\varepsilon^3\theta^{*3}}{3!} + \frac{\varepsilon^5\theta^{*5}}{5!} - \dots = \varepsilon\theta^*$$

bu açılımlar (\*) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\cos(\theta \mp \varepsilon\theta^*) = \cos\theta \mp \varepsilon\theta^* \sin\theta$$

elde edilir.

$\theta + \varepsilon\theta^*$  değerine dual açı denir.  $\theta$  değeri iki doğru arasındaki açı ve  $\theta^*$  değeri ise iki doğru arasındaki en kısa uzaklıktır.

## Kaynaklar

1. Clifford, William Kingdon, Mathematical Papers, , Edited by Robert Tucker, Macmillan and Co., London,1882
2. Snygg, John A New Approach to Differential Geometry Using Clifford's Geometric Algebra, , Springer New York Dordrecht Heidelberg London, 2012
3. Study, E., A New Branch of Geometry, "Ein neue Zweig der Geometrie," Jahresber. d. deutsch. Math.-Ver. XI, Heft 3 (1901), 97-123.
4. Guggenheimer, H.W., Differential Geometry. McGraw-Hill, New York, (1963)



# Cesàro Fonksiyon Uzayı Üzerinde Genelleştirilmiş Hausdorff Operatörünün Sınırlılığı

Ferit Gürbüz<sup>1</sup>

## Özet

Banach uzayları fonksiyonel analizde önemli bir rol oynar ve özellikle uzayların normları doğrusal operatörler ve p-integrallenebilir normlar tarafından üretildiğinden çok sayıda uygulamaya öncülük eder. Bu bağlamda, genelleştirilmiş Hausdorff operatörünün analizdeki çeşitli problemlerle derin bir ilişkisi vardır. Uygun çekirdekler için; Hausdorff operatörü, Hardy operatörü, Cesàro operatörü, Riemann-Liouville kesirli integrali ve diğer bazı operatörler gibi klasik operatörlerden başka bir şey değildir. Bu çalışmada Cesàro fonksiyon uzayı üzerinde genelleştirilmiş Hausdorff operatörünün davranışını inceledik ve bu operatörün bu uzayda sınırlı olması için  $\varphi$  ve  $a$  koşullarını belirledik.

## 1. Giriş

Son yıllarda Hausdorff matrislerinin dizi uzayları ve çeşitli fonksiyon uzayları üzerinde toplanabilme yöntemlerinden operatör teorisine kadar incelenmesi, esas olarak operatörlerin sınırlılığı üzerine yapılmıştır. Ayrıca, Hausdorff matrisleri, Cesàro, Riesz, Nörlund matrislerini vb. içerdiğinden, toplanabilme yöntemleri teorisinde çok önemli bir rol oynar. Başlangıçta, Siskakis [1] analitik fonksiyon uzaylarında Cesàro operatörünün özelliklerini inceledi ve Cesàro operatörünün  $H^p$  normunu, bu operatörü bileşke operatörünün bir yarı grubuna ilişkilendirerek elde etti. Georgakis [2],  $\varphi$  çekirdeği ile tanımlanan

$$\mathcal{H}_\varphi(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(t)}{|t|} f\left(\frac{x}{t}\right) dt$$

1 Prof. Dr., Kırklareli Üniversitesi Matematik Bölümü, feritgurbuz@klu.edu.tr, 0000-0003-3049-688X



klasik Hausdorff operatörünü inceledi ve bu operatörün  $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$  için  $L^1(\mathbb{R})$  de sınırlı olduğunu gösterdi. Burada dikkat edilirse  $\chi_{(0,1)}(t)$ ,  $(0,1)$  üzerinde bir karakteristik fonksiyon olmak üzere eğer  $\varphi(t) = a(1-t)^{a-1} \chi_{(0,1)}(t)$  ise bu durumda  $\mathcal{H}_\varphi$  Hausdorff operatörü  $a$  mertebesindeki Cesàro operatöründen başka bir şey değildir. Ayrıca, uygun  $\varphi$  çekirdeği için, Hausdorff operatörünün özel bir hali olarak Calderón maksimal operatörü elde edilebilir. 2001 de Xiao [3],  $L^p(\mathbb{R}^n)$  ve  $BMO(\mathbb{R}^n)$  üzerindeki  $\mathcal{H}_\varphi$  operatörünün karakterizasyonunu inceledi. Ayrıca, yazar bu makalesinde  $\mathcal{H}_\varphi$  operatörünün  $L^p(\mathbb{R}^n)$  üzerinde sınırlı olması için ancak ve ancak  $\int_0^1 t^{-\frac{n}{p}} \varphi(t) dt < \infty$  olması gerektiğini gösterdi ve operatörün normunun eşitliğini elde etti. 2014 de, Kuang [7],  $\mathbb{R}^n$  üzerinde  $\varphi$  çekirdeği ve  $a$  pozitif monoton fonksiyonu tarafından üretilen

$$\mathcal{H}_{\varphi,a}(f)(x) = \int_0^\infty \varphi(t) f\left(\frac{x}{a(t)}\right) dt \quad (1.1)$$

genelleştirilmiş Hausdorff operatörünü tanıttı ve bu operatörün ağırlıklı Herz uzaylarında sınırlılığını inceledi. Burada,  $a$  fonksiyonu  $(0, \infty)$  aralığı üzerinde ve  $\varphi$  fonksiyonu ise  $[0, \infty[$  aralığı üzerinde ölçülebilir fonksiyondur.

Diğer taraftan Cesàro fonksiyon uzayı, fonksiyon uzaylarının en önemli örneklerinden biridir ve Cesàro dizi uzaylarının  $[0, \infty[$  'a kadar olan bir genişlemesidir. Cesàro dizi uzayları ise 1968 yılında Hollanda Matematik Derneği'nin bu uzayların dualitelerini bulma problemini yayınlamasıyla açıkça ortaya çıktı [4, s. 14]. Ayrıca, Cesàro fonksiyon uzaylarının temel yapı özelliği Astashkin ve Maligranda [4] tarafından incelenmiştir. Cesàro fonksiyon uzaylarının tanımı göz önüne alındığında, Cesàro fonksiyon uzaylarındaki Hardy eşitsizliği, Lebesgue uzaylarındaki Hardy eşitsizliğinin bir sonucudur. Bu durum bizi Cesàro fonksiyon uzaylarındaki diğer ünlü eşitsizliğin, örneğin Hilbert eşitsizliğinin geçerliliğini araştırmaya teşvik eder. Bu bağlamda, 2022 de Ho [5] Cesàro fonksiyon uzaylarındaki bazı integral operatörlerin sınırlılığını inceledi. Biz de [5] deki çalışmadan esinlenerek, Cesàro fonksiyon uzaylarındaki (1.1) ile verilen genelleştirilmiş Hausdorff operatörlerinin sınırlılığı için, Cesàro fonksiyon uzaylarındaki Minkowski eşitsizlikleri ile genel bir sonuç oluşturacağız. Yani, genelleştirilmiş Hausdorff

operatörlerin sınırlılığını  $[0, \infty[$  aralığı üzerindeki Cesàro fonksiyon uzaylarına genişleteceğiz.

Son olarak, Cesàro fonksiyon uzaylarının genel tanımını verip bu bölümü kapatalım.

Öncelikle  $[0, \infty[ = \mathbb{R}^+$  aralığı üzerinde ölçülebilir fonksiyonlar ailesi  $\mathfrak{M}$  olsun. Bu durumda, Cesàro fonksiyon uzayları aşağıdaki gibi tanımlanır.

**Tanım:**  $f, \mathbb{R}^+$  üzerinde pozitif ölçülebilir bir fonksiyon ve  $p \in \mathbb{R}^+$  olsun.

$$\|f\|_{Ces_p(\mathbb{R}^+)} = \left( \int_0^\infty \left( \frac{1}{x} \int_0^\infty |f(t)| dt \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

olmak üzere bütün  $f \in \mathfrak{M}$  fonksiyonlarının uzayı Cesàro fonksiyon uzayı olarak tanımlanır ve  $Ces_p(\mathbb{R}^+)$  ile gösterilir.

## 2 Ana Sonuç

Bu bölümde, genelleştirilmiş Hausdorff operatörü için Cesàro fonksiyon uzayı üzerinde bazı sonuçlar verilecektir.

Aşağıdaki teorem,  $\mathbb{R}^+$  üzerindeki  $\varphi$  çekirdeğinin davranışı ile Hausdorff operatörünün Cesàro fonksiyon uzayı üzerindeki sınırlılığını verir.

**Teorem.**

$a, \mathbb{R}^+$  üzerinde ölçülebilir bir fonksiyon ve  $p \in \mathbb{R}^+$  olsun. Eğer

$$\int_0^\infty |\varphi(y)| |a(y)|^{\frac{1}{p}} dy < \infty \text{ ise, bu durumda}$$

$$\|\mathcal{H}_{\varphi,a}(f)\|_{Ces_p(\mathbb{R}^+)} \leq \|f\|_{Ces_p(\mathbb{R}^+)} \int_0^\infty |\varphi(y)| |a(y)|^{\frac{1}{p}} dy$$

gerçeklenir.

**İspat.**

$f \in Ces_p(\mathbb{R}^+)$  olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{H}_{\varphi,a}(f)\|_{Ces_p(\mathbb{R}^+)} &\leq \left( \int_0^\infty \left( \int_0^\infty \frac{1}{x} \int_0^x |\varphi(y)f\left(\frac{t}{a(y)}\right)| dt dy \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \int_0^\infty |\varphi(y)| \left( \int_0^\infty \left( \frac{1}{x} \int_0^{\frac{x}{a(y)}} |f(z)||a(y)| dz \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} dy \\ &\leq \|f\|_{Ces_p(\mathbb{R}^+)} \int_0^\infty |\varphi(y)||a(y)|^{\frac{1}{p}} dy \end{aligned}$$

olur. Buradan, norma geçiş integraller için Minkowski eşitsizliğini kullanırsak [6, (6.19)],

$$\begin{aligned} \|\mathcal{H}_{\varphi,a}(f)\|_{Ces_p(\mathbb{R}^+)} &\leq \left( \int_0^\infty \left( \int_0^\infty \frac{1}{x} \int_0^x |\varphi(y)f\left(\frac{t}{a(y)}\right)| dt dy \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \int_0^\infty |\varphi(y)| \left( \int_0^\infty \left( \frac{1}{x} \int_0^{\frac{x}{a(y)}} |f(z)||a(y)| dz \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} dy \\ &\leq \|f\|_{Ces_p(\mathbb{R}^+)} \int_0^\infty |\varphi(y)||a(y)|^{\frac{1}{p}} dy \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu da ispatı tamamlar.

Yukarıdaki teoremden aşağıdaki sonuçları elde edebiliriz.

**Sonuçlar.**

1-  $a(t) = \frac{1}{t}$  ve  $\varphi(t) = \chi_{(0,1)}(t)$  olsun. Bu durumda, (1.1) ile verilen  $\mathcal{H}_{\varphi,a}$  operatörü klasik Cesàro operatörüne dönüşür. Buradan, Cesàro operatörü  $\|\mathcal{H}_{\varphi,a}(f)\|_{Ces_p(\mathbb{R}^+)} = \frac{p}{p-1}$  normlu Cesàro fonksiyon uzayında sınırlıdır.

2-  $a(t) = t$  ve  $\alpha > -1$  için  $\varphi(t) = \alpha(1-t)^{\alpha-1} \chi_{(0,1)}(t)$  olsun. Bu durumda,  $p \geq 1$  için (1.1) ile verilen  $\mathcal{H}_{\varphi,a}$  operatörü Cesàro fonksiyon uzayında sınırlıdır.

3-  $k > 0$  için  $a(t) = e^{kt}$  ve  $\varphi(t) = e^{-t^2}$  olsun. Bu durumda,  $p > 0$  için (1.1) ile verilen  $\mathcal{H}_{\varphi,a}$  operatörü Cesàro fonksiyon uzayında sınırlıdır.

### 3 Kaynakça

- [1] A. G. Siskakis, Composition semigroups and the Cesàro operator on  $H^p$ , J. London Math. Soc. 36 (1987), no. 2, 153–164.
- [2] C. Georgakis, The Hausdorff mean of a Fourier-Stieltjes transform, Proc. Amer. Math. Soc. 116 (1992), 465–471.
- [3] J. Xiao,  $L^p$  and  $BMO$  bounds of weighted Hardy-Littlewood averages, J. Math. Anal. Appl. 128 (2001), 660–660.
- [4] S. V. Astashkin and L. Maligranda, Structure of Cesàro function spaces, Indag. Math. (N.S.) 20 (2009), no. 3, 329–379.
- [5] K.-P. Ho, Integral operators on Cesàro function spaces, Bull. Korean Math. Soc. 59 (2022), no. 4, 905–915.
- [6] G. B. Folland, Real Analysis: modern techniques and their applications, John Wiley & Sons, 1984.



# Mühendislik Fakültesi Öğrencilerinin Türev ve İntegral Konularındaki Kavramsal Bilgi Düzeyleri

Aya Alebo<sup>1</sup>

Çiğdem İnci Kuzu<sup>2</sup>

## Özet

Bir mühendisin, kavramsal bilgiye sahip olması ve uygulama bilgilerinin tümüne hâkim olması gerektiği bilinmektedir. Bir bakıma türev alma işleminin tersi olan integral alma işlemi, fen ve mühendisliğin en çok ihtiyaç duyduğu konuların başında gelir. Çalışmada, geleceğin mühendisleri olan mühendislik fakültesi öğrencilerinin türev ve integral konularındaki kavramsal, bilgi düzeyleri ve yanlışları belirlenmeye çalışılmıştır. Çalışmanın katılımcılarını, Batı Karadeniz’de bir Üniversitenin Mühendislik Fakültesi’nin bilgisayar, makine ve elektronik mühendisliği bölümlerinde öğrenim görmekte olan 50 ikinci sınıf öğrencisi oluşturmaktadır. Çalışmadaki veriler, mühendislik fakültesi öğrencilerine sorulan 2 sorudan elde edilmiştir. Veri toplama aracı, mühendislik fakültesinde okutulan genel matematik ders içeriğinde yer alan temel analiz konularında edindikleri temel bilgilerden yola çıkılarak hazırlanmıştır. Araştırma bulguları, mühendis adaylarının türev ve integral kavramları ile ilgili yeterli düzeyde bilgiye sahip olmadıklarını ve kavramların tanımlarına tam anlamıyla hâkim olmadıklarını göstermiştir.

## 1. Giriş

Matematik, ardışık ve yığılmalı bir bilim alanı olmasından dolayı, temel kavramlar tam olarak kavratılmadan diğer konulara geçilmemelidir (Altun, 2002). Matematik dersinde öğrencilerin öğrenme eksikliklerini belirleyip bu eksiklikleri gidermek öğretmenin sorumluluğu altındadır. Yapılan araştırmalar, öğretmenin matematik alan bilgisinin eğitim ve öğretimle ilişkili olduğunu

1 Karabük Üniversitesi, kaanyusuf629@gmail.com, 0009-0008-9242-5650

2 Karabük Üniversitesi, cigdemkuzu@karabuk.edu.tr, 0000-0003-0143-2473

göstermiştir (Gökçek ve Açıkyıldız, 2016). Alan bilgisi, etkili bir öğrenme-öğretme ortamı oluşturmak için tek başına yeterli olmasa da öğrenme ortamının ana bileşenlerinden birisidir. Öğrencilerin yeni edindikleri bilgilerin, önceden edindikleri bilgilerle çakışması önemli bir sorundur. Bireyler matematik dersini günlük yaşamlarında, okul sonrası iş yaşamlarında ve kararlarında etkin bir şekilde kullanabilmelidirler. Günümüzde matematiği seven, takdir eden ve matematiksel düşünebilen; matematik ile modelleme yapabilen ve problem çözebilen bireylere ihtiyaç duyulmaktadır. Bu bağlamda, öğrencilerin gerçek hayat problemlerinde kullanacakları bazı kavram ve ilişkileri incelemek fayda sağlayacaktır (Yalçınkaya, 2018). İnsanlar, problemleri çözerken biçimsel tanımlardan ziyade, zihinlerinde oluşturdukları kavramların görüntülerini kullanırlar. Bu nedenle bir kişinin doğru görüntüleri alamaması, başka bir bireyin sorunlar karşısında hata yapmasına neden olabilmektedir (Sağlam ve Dost, 2014). Matematik, günlük hayatın her alanında kullanılmaktadır. Fakat kazanılan matematiksel bilgilerin nerede ne zaman ve ne için kullanılacağı bilinmemektedir (Altun, 2002). Değişim ve gelişim her alanda olduğu gibi eğitimde de kaçınılmazdır. Yapılan çalışmalarda, öğrencilerin bilişsel becerilerini geliştirmede matematiğin rolünün olumlu olduğunu fakat öğrencilerin etkileşimli çalışma materyallerini kullanarak bu yeteneği geliştirmek için istekli olmadıkları belirlenmiştir (Zeidmane ve Sergejeva, 2013).

Matematiğin mühendislikteki dolaylı etkisinin faktörlerini belirlemek, matematik çalışmalarının eğitimde olduğu kadar öğrenci değerlendirmelerinde de önemli olduğunu belirtmektedir (Zeidmane ve Sergejeva, 2013). Matematik, mühendislik eğitim programlarında her zaman güçlü bir bileşen olmakta ve bir dizi uygulamalı mühendislik konusu için gerekli bir temel olarak hizmet etmektedir (Kashef-Haghighi, Shao ve Ghoshal, 2015). Öğrenciler, matematikte bir konu hakkındaki tüm açıklamaları anlamadıkça, konuyu tam olarak öğrenmeleri kolay olmayacaktır. Matematik çalışmaları, mühendisler için hem doğrudan hem de dolaylı olarak önem arz etmektedir (Zeidmane ve Sergejeva, 2013). Matematik bölümü ve mühendislik fakültesindeki bölümlerinin; öğrencilere ve öğretim üyelerine resmi matematiksel becerileri ve kaynakları sunması gerekmektedir (Willcox ve Bounova, 2004).

Mühendislik, matematiğin uygulama alanlarından biri olup; matematiği, teknik bilimleri ve sosyal bilimleri kullanarak yeni ürünler oluşturmaya yönelik bir uygulama süreci olarak değerlendirilmektedir. Bununla birlikte, tüm bu alanları bir araya getiren, gerçek hayat problemlerini çözen ve hayatı kolaylaştıran matematik temelli bir meslek olarak tanımlanabilmektedir. Aynı zamanda mühendislik, gerçek yaşam problemlerini çözmek ve yeni ürünler tasarlayabilmek için teknoloji, bilim ve matematiğin

kombinasyonu olarak da tanımlanabilir (Atmans ve diğerler, 2007). Mühendisleri; teknolojiyi, matematiği ve bilimi iyi bilen, bu bilgileri hayatta önlerine çıkan problemleri çözmek için kullanabilen bireyler olarak tanımlamak mümkündür. Mühendisliğin dili olarak tanımlanan matematik, üniversitelerdeki mühendislik fakültesi ders içeriklerinin ilk olarak kalkülüs, lineer cebir, ayrık matematik, diferansiyel denklemler gibi derslerde yer almaktadır. Matematğin, mühendislik uygulamalarını destekleyen birçok teknolojik yeniliği mevcuttur. Bu teknolojik yeniliklerin mükemmelliği, mühendisliğin birçok alanında iyi derecede sahip olunan matematiksel bilgi ve beceriye dayanmaktadır. Matematik ve mühendislik arasındaki bağ o kadar iyi kurulmuştur ki, mühendislik alanındaki herhangi bir gelişme, yeni matematiksel teorilerin keşfedilmesi gerektiğini belirtmektedir (Baki ve Güveli, 2008). Mühendislik okulları için matematik müfredatının içerik açısından yetersiz olduğu, öğrencilerinin ihtiyaç duydukları becerileri nerede ve nasıl öğreneceklerini çoğu zaman bilemedikleri, matematik öğretmenlerinin mühendislik fakültesindeki derslerinde matematiksel kavramları nasıl uygulayacakları konusunda sınırlı bir anlayışa sahip oldukları görülebilmektedir (Willcox ve Bounova, 2004). Mühendislik fakültesi öğrencilerinin problem çözme stratejilerini öğrendikleri, matematik ve mühendislik dersleri üzerinde olumlu duygu ve görüşlere sahip oldukları belirlenmiştir. Bunun sonucunda, mühendislik fakültesi öğrencilerine yönelik matematik eğitiminin mühendislik alanıyla ilişkili hale getirilmesi için mühendislere danışılması önerilmiştir. Mühendislik fakültelerindeki matematik derslerinin işbirlikçi bir ortamda öğretilmesinin, öğrencileri birbirleriyle bağlantı kurmaya teşvik ettiği bildirilmiştir. İkinci ve dördüncü sınıf mühendislik fakültesi öğrencileri için mühendislik konularında ve mühendislik tasarımlarında, kavramsal matematiksel yaklaşımın işlemsel yaklaşımdan daha önemli olduğu belirtilmektedir. Bir mühendisin, kavramsal bilgiye sahip olması ve uygulama bilgilerinin tümüne hâkim olması gerektiği belirtilmektedir (Atman ve diğerleri, 2007).

Bu çalışmada, sadece matematiğin kendisinde değil, bilim ve mühendisliğin ilgili alanlarında da öğrenilmesi ve öğretilmesi açısından büyük önem taşıyan analiz kavramları ele alınacaktır. Analiz, birçok disiplin için önemli bir alandır. Analiz dersinin amacı; öğrencileri teoremlerle tanıştırmak, öğrencilerin yaratıcı mantıklı düşünme yeteneğini ve hayal gücünü geliştirmek, matematiksel sembol ve kavramları öğretmektir. Üniversiteye giriş sınavları sonrasında fen ve matematik bölümlerini tercih edecek olan öğrenciler için analiz konuları ve analiz kavramları bir anahtar niteliği taşımaktadır. Buna ek olarak; fen ve matematik dersleri matematik, fen ve mühendislik bölümlerinde eğitim görececek öğrenciler için önemli bir yere sahiptir (Baki ve



Güvenli, 2008). Analiz denilince akla dört temel kavram gelir: limit, süreklilik, türev ve integral. Bu kavramlar sadece matematik alanında değil, bilim ve mühendislik alanlarında da büyük önem taşımaktadır. Limit, süreklilik, türev, integral konuları analizin en önemli konularındandır. Bu konular üniversite matematiğinin değişik alanlardaki kavramlarının anlaşılması için gerekli bir unsur haline gelmiştir. Türev, bir miktarın başka bir niceliğe göre değişim oranı ve temel başlangıç noktasıdır. Türev kavramı, limit yardımıyla tanımlanır. Dolayısıyla limit, türevin önceki kavramlarından biridir ve yapılan araştırmalara göre, öğrencilerin limit kavramını yorumlamada ve anlamada zorluk yaşadıkları ve kavram yanılgılarına sahip oldukları belirlenmiştir (Gökçek ve Açıkyıldız, 2016). İntegral konusu, gerçek hayatta ve mühendislik problemlerinin çözümünde önemli bir yer tutmaktadır. Onu anlamak için kavramsal ve uygulamalı bilgilerin iyi organize edilmesi gerekmektedir (Baki ve Kartal 2004). Araştırmacılara göre integral kavramı analiz dersinin anlaşılması zor olan konularından biri olarak kabul edilmiştir. Bir kavramı öğrenme süreci içerisindeki, kavramın tanımını bilmek kadar önemli olan bir diğer konu ise, o kavramın etrafında zengin bağlantılar kurmaktır. Analiz dersi üzerine çeşitli bilimsel alanlar inşa edilmektedir. Matematik, fizik ve kimya bölümlerinde; tüm mühendislik ve mimarlık fakültelerinde temel teşkil eden analiz dersi, iktisadi ve idari bilimler, psikoloji gibi ilgili diğer alanlarda da okutulmaktadır (Aktümen ve Kaçar, 2008). Sonuç olarak, limit, süreklilik, türev ve integral konuları, neredeyse tüm sayısal bölümler için temel görev görmekte ve diğer bazı bölümlerin büyümesine yardımcı olmaktadır. Bu nedenle lise döneminde limit, süreklilik türev ve integral konuları ile ilgili bilgi edinmek çok önemlidir. Tüm dünyada, ortaöğretim ve yükseköğretimde, kalkülüs; yani limit, süreklilik türev ve integral konularının öğretilmesini gerektirir. Kalkülüs, matematik ders içeriklerinin bir parçasıdır türev ve integral konularında çok sayıda çalışma yaptırılarak öğretilmektedir Öğrencilerin bu kavramların öğrenmelerine yardımcı olmak için birçok yöntem bulunmaktadır; bu yöntemler hem ortaöğretim hem de yükseköğretimde önemli bir yere sahiptir (Gür ve Barak, 2007).

Bu araştırmada, geleceğin mühendisleri olan mühendislik fakültesi öğrencilerinin türev ve integral kavram bilgilerine odaklanılmıştır. Bu bağlamda çalışmada mühendislik fakültesi öğrencilerinin limit, süreklilik, türev ve integral kavramlarını nasıl anladıkları ve bu kavramlarla ilgili sorularda ne tür hatalar yaptıkları incelemek amaçlanmıştır.

## 2. Yöntem

### 2.1. Araştırmanın Modeli

Mühendislik fakültesi öğrencilerinin türev ve integral kavramlarını tanımlayabilme seviyelerini ortaya koymayı amaçlayan bu çalışma, bir durum çalışmasıdır. Durum çalışması Chmiliar (2017)'a göre, kısıtlı bir sistemin nasıl yürüdüğü ve işlediği üzerine sistemli veriler elde etmek amacıyla çoklu veri toplama işleminden yararlanılarak sistemin derinlemesine incelenmesini sağlayan bilimle ilgili bir yöntemdir. Farklı bir deyişle durum çalışmasını; gerçek durumlarda izlenimleri görmede ve neden-sonuç adı altındaki izlenimleri kararlaştırmada etkili bir sistem olarak belirtmektedirler (Cohen, Manion ve Morrison 2007).

Çalışmada veriler; mühendislik fakültesi öğrencilerine uygulanan 3 soruluk yazılı sınavdan elde edilmiştir. Uygulanan yazılı sınav soruları, iki matematik eğitimi uzmanı ve alanında uzman iki öğretim üyesi tarafından incelenmiş ve onaylanmıştır. Sınav, mühendislik fakültelerinin 2. sınıf matematik ders içeriklerinde yer alan limit konusundaki en temel bilgilerden yola çıkılarak hazırlanmıştır. Çalışmaya, öğrencilerin kısa süre içerisinde hızlı bir şekilde yanıtlayamayacakları, yorumlama ve düşünme yeteneği gerektiren sorular dâhil edilmiştir.

### 2.2. Çalışma Grubu

Çalışmanın katılımcılarını Batı Karadeniz'de bir Üniversitenin Mühendislik Fakültesi'nin bilgisayar, makine ve elektronik bölümlerinde öğrenim görmekte olan (50) 2. Sınıf öğrencisi oluşturmaktadır. Çalışmanın katılımcılarının belirlenmesinde, amaçlı örnekleme yöntemlerinden biri olan ölçüt örnekleme yönteminden yararlanılmıştır. Gönüllü olarak katılan öğrencilerin isimleri gizli tutulup, Ö1, Ö2.... Ö50 şeklindeki kodlarla belirtilmiştir. Çalışma içerisinde, mühendislikteki farklı bölümlerden öğrencilerin tercih edilmesiyle, çalışma örneklerine çeşitlilik katılması planlanmıştır. Araştırmaya katılan öğrencilerin 20'si makine mühendisliği, 15'i bilgisayar mühendisliği ve 15'i elektronik mühendisliği bölümü öğrencisidir.

### 2.3. Veri Toplama Araçları

Çalışmada veriler; mühendislik fakültesi öğrencilerine uygulanan 2 soruluk yazılı sınavdan elde edilmiştir. Araştırma sorularının amaçları Tablo 1'de verilmiştir.

**Tablo 1. Araştırmanın veri toplama aracındaki soruların amaçları**

<i>Soru</i>	<i>Amaç</i>
<i>1.soru</i>	<i>Türevin matematiksel olarak verilen tanımı ile türev hakkında ifade edilen kavramlar (eğim gibi) arasındaki farkı ayırt edip etmediğini ölçmek.</i>
<i>2.soru</i>	<i>İntegralin matematiksel olarak verilen tanımı ile integral hakkında ifade edilen kavramlar (Alan gibi) arasındaki farkı ayırt edip etmediğini ölçmek.</i>

## 2.4. Verilerin Toplanması

Uygulama, mühendislik fakültesinin 3 farklı bölümünden (makine, bilgisayar ve elektronik mühendisliği bölümleri) 50 öğrenciyle 2021-2022 öğretim yılı güz döneminde yapılmıştır. Uygulama esnasında öğrencilerden sadece sonuç yazanlara sonucu neye göre buldukları sorulmuş verilen cevaplar not edilmiştir.

## 2.5. Yazılı Sınavların Analizi

Sınavlardan elde edilen veriler öncelikle “Cevabı doğru olanlar”, “Cevabı kısmen doğru olanlar”, “Cevabı yanlış olanlar” ve “Cevabı boş bırakanlar” şeklinde dört temel kategoride sınıflandırılmıştır. Bu sınıflandırmaya ilişkin ayrıntılar aşağıda yer almaktadır.

*Doğru Cevaplar:* Geçerli cevabın tüm bileşenlerini içeren cevaplar.

*Kısmen Doğru Cevaplar:* Geçerli yanıtın bileşenlerinden en az birini içeren, hepsini içermeyen cevaplar.

*Yanlış Cevaplar:* Konu ile ilgili ya da ilgisiz, yanlış bilgi içeren; kavram yanlışlığı olduğunu gösteren veya mantıksız cevaplar.

*Boş Bırakanlar:* Boş bırakılan cevaplar.

Yazılı sınavdaki sorular teker teker analiz edilmiştir. Öğrencilerin her bir soruya verdiği cevaplar yukarıdaki kategori tanımları dikkate alınarak sınıflandırılmıştır. Bu sınıflandırma işlemi, araştırmacı tarafından farklı zamanlarda tekrar edilmiştir. Genel olarak yapılan sınıflandırmanın uygun olup olmadığı ve araştırmacı tarafından nasıl sınıflandırılacağı konusunda karşılaşılan şüpheli durumlarda, alanında uzman 2 öğretim üyesinin görüşlerine başvurulmuştur. Her bir kategorideki cevap frekans ve yüzdelerle ifade edilmiştir. Yazılı sınavlara ait analizin ikinci kısmında sadece öğrencilerin yanlış cevaplarına odaklanılmıştır. Öğrenciler tarafından verilen yanlış cevaplar, kendi içlerindeki benzerlik ve farklılıklara göre gruplandırılmıştır.

Bu şekilde öğrenciler tarafından üretilen yanlış tipler ortaya koyulmuştur. Her bir gruba düşen cevap frekans ve yüzdeleri ifade edilmiştir.

### 3. Bulgular

Araştırmanın birinci sorusu olan “Türevin matematikteki karşılığı nedir ?” sorusuna ait bulgular aşağıda sunulmuştur.

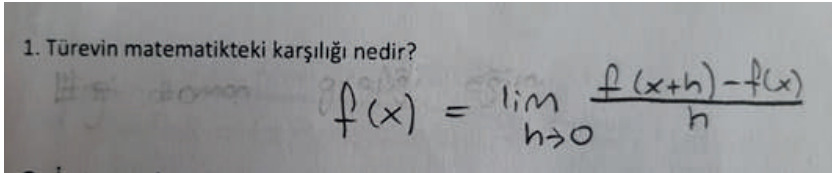
Mühendislik fakültesi öğrencilerinin, araştırmanın 1. sorusuna verdikleri doğru cevapların dağılımları Tablo 1’de verilmiştir.

*Tablo 2. Mühendislik fakültesi öğrencilerinin araştırmanın 1. Sorusuna verdikleri doğru cevapların frekans ve yüzdeleri*

<i>Doğru Cevap Kodları</i>	<i>Doğru Cevap Veren Öğrenciler</i>	<i>f</i>	<i>%</i>
$f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$	Ö1, Ö2, Ö12, Ö47	4	8

Tablo 2. incelendiğinde araştırmanın 1. Sorusuna öğrencilerin çok az bir kısmının sadece %8’inin (f=4) doğru cevap verdiği görülmektedir.

“Türevin matematiksel karşılığı nedir?” sorusuna doğru cevap veren Ö2 kodlu öğrencinin örnek cevabı aşağıda sunulmuştur.



*Şekil 1. Ö2 kodlu öğrencinin cevabı*

Ö2 kodlu öğrenci, türevin tanımından yararlanmıştır. Yukardaki şekil incelendiğinde Ö2 kodlu mühendislik fakültesi öğrencisi, türevin matematikteki karşılığını  $f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  şeklinde ifade ederek soruya doğru cevap vermiştir.

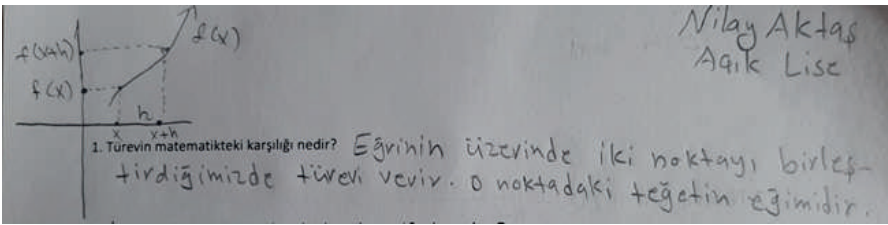
Mühendislik fakültesi öğrencilerinin, araştırmanın 1. sorusuna verdikleri kısmen doğru cevapların öğrencilere göre dağılımları Tablo 3’te verilmiştir.

Tablo 3. Mühendislik fakültesi öğrencilerinin, 1.soruya verdikleri kısmen doğru cevapların dağılımı

Kısmen Doğru Cevap Kodları	Kısmen Doğru Cevap Veren Öğrenciler	f	%
Teğetin eğimidir.	Ö41, Ö7, Ö15, Ö25, Ö31, Ö36, Ö44, Ö45, Ö46, Ö5, Ö9, Ö8	12	24
Herhangi bir teğetin herhangi bir eğriye $x$ eksenineyle yaptığı pozitif yönlü açının tan değeridir.	Ö3, Ö6, Ö13, Ö26, Ö27,	5	10
Değişim miktarıdır.	Ö21, Ö10, Ö11, Ö35, Ö37, Ö38, Ö39, Ö40, Ö43	9	18
Pozitif yönlü tanjant eğimi.	Ö20, Ö19, Ö16	3	6

Tablo 3 incelendiğinde 12 mühendislik fakültesi öğrencisinin türevin matematiksel karşılığı olarak “Teğetin eğimidir.” şeklinde tanımlama yaptığı, 5 öğrencinin “Herhangi bir teğetin herhangi bir eğriye  $x$  eksenineyle yaptığı pozitif yönlü açının tan değeridir.” şeklinde tanımlama yaptığı, 9 öğrencinin “Değişim miktarıdır.” şeklinde ve 3 öğrencinin de “Pozitif yönlü tanjant eğimi.” şeklinde tanımlama yaptığı görülmektedir.

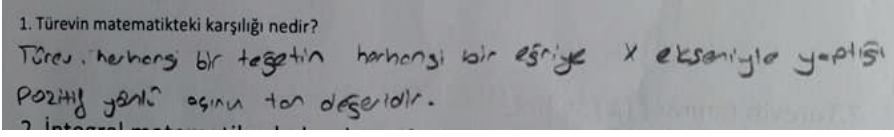
“Türevin matematiksel karşılığı nedir?” sorusuna kısmen doğru cevap veren öğrencilerden birkaçının örnek cevabı aşağıda sunulmuştur.



Şekil 2. Ö41 kodlu öğrencinin cevabı

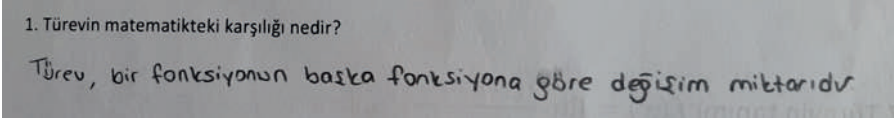
Yukardaki şekil incelendiğinde Ö41 kodlu mühendislik öğrencisi, çizilen bir fonksiyonun iki noktasının birleştirilmesiyle elde edilen kiris o noktadaki teğetin eğimini verir. Öğrenci bu cevabı verirken türevin geometrik yorumunda öğrendiği “Bir eğri üzerindeki bir noktadan çizilen teğetin eğimi o noktadaki

türevi verir.” ifadesinde geçen “teğetin eğimi” kavramı ile türev tanımının aynı olduğunu düşündüğü görülmektedir.



Şekil 3. Ö3 kodlu öğrencinin cevabı

Yukardaki şekil incelendiğinde Ö3 kodlu mühendislik fakültesi öğrencisi, türevin matematiksel karşılığını “Herhangi bir teğetin herhangi bir eğriye  $x$  eksenineyle yaptığı pozitif yönlü açının tan değeridir” şeklinde belirtmiştir. Öğrenci bu cevabı verirken türevin geometrik yorumunda öğrendiği “Bir eğri üzerindeki bir noktadan çizilen teğetin eğimi o noktadaki türevi verir.” tanımını kullanmıştır. Sonuç ile türev tanımını ayırt edememiş, türevi sadece eğim olarak düşünmüş ve eğimi de  $x$  eksenine ile pozitif yönde yaptığı açının tanjantı ile ilişkilendirmiştir.

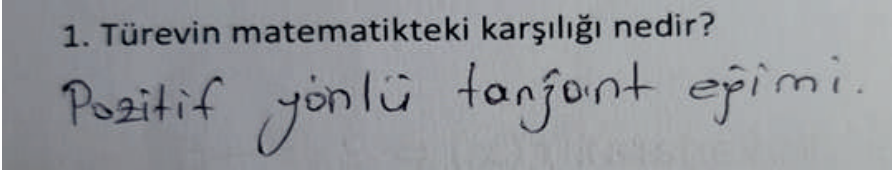


Şekil 4. Ö21 kodlu öğrencinin cevabı

Yukardaki şekilde Ö21 kodlu mühendislik fakültesi öğrencisinin soruya, “Türev, bir fonksiyonun başka fonksiyona göre değişim miktarıdır” şeklinde verdiği cevap yer almaktadır. Öğrenci, türevin tanımı verilirken ifade edilen

“Fonksiyonda meydana gelen değişimin ( $\Delta y = f(x+h) - f(x)$ ), değişkende meydana gelen değişime ( $\Delta x = x+h - x = h$ ) oranı olan  $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Newton Oranının  $h \rightarrow 0$  için limiti mevcut ise limit değerine fonksiyonun türevi denir.” tanımıyla, değişim oranının direkt türeve karşılık geldiği düşüncesiyle bu cevabı vermiştir.



Şekil 5. Ö20 kodlu öğrencinin cevabı

Yulardaki şekilde, Ö20 kodlu mühendislik fakültesi öğrencisinin türevi, pozitif yönlü tanjant eğimi olarak tanımlamasıyla soruyu yanlış cevapladığı görülmektedir. Görüldüğü gibi diğer öğrencilerden farklı olarak türev kavramını tek bir açıdan değil, farklı şekillerde de ele alarak ifade etmeye çalışmıştır.

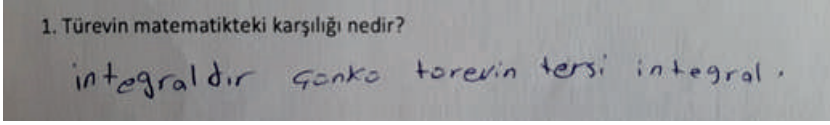
Mühendislik fakültesi öğrencilerinin, araştırmanın 1. sorusuna verdikleri yanlış cevapların dağılımları Tablo 4'te verilmiştir.

Tablo 4. Mühendislik fakültesi öğrencilerinin 1.sorusuna verdikleri yanlış cevapların dağılımı

Yanlış Cevap Kodları	Yanlış Cevap Veren Öğrenciler	f	%
İntegraldir.	Ö4, Ö14, Ö42, Ö48	4	8
Teğetin değişim oranıdır.	Ö18, Ö24	2	4
$\tan \theta = \text{eğim.}$	Ö23, Ö33	2	4
Bir sayının üstel değerini alıp baş kat sayı yaparken üstünü bir azaltma.	Ö28, Ö22, Ö17, Ö29, Ö30, Ö32, Ö34, Ö49, Ö50	9	18

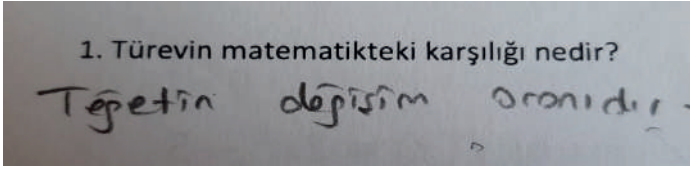
Tablo incelendiğinde, 4 mühendislik fakültesi öğrencisinin türevin matematiksel karşılığı olarak “İntegraldir.” şeklinde tanım yaptığı, 2 öğrencinin “Teğetin değişim oranıdır.” şeklinde tanım yaptığı, 2 öğrencinin “ $\tan \theta = \text{eğim.}$ ” şeklinde tanım yaptığı ve 9 öğrencinin de “Bir sayının üstel değerini alıp baş kat sayı yaparken üstünü bir azaltma.” şeklinde tanım yaptığı görülmektedir.

“Türevin matematiksel karşılığı nedir?” sorusuna yanlış cevap veren öğrencilerden birkaçının örnek cevabı aşağıda sunulmuştur.



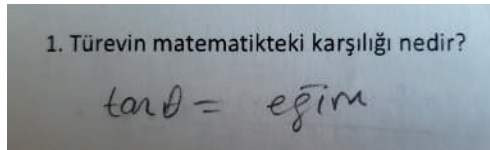
Şekil 6. Ö48 kodlu öğrencinin cevabı

Yukardaki şekilde cevabı yanlış olarak sınıflandırılan Ö48 kodlu mühendislik fakültesi öğrencisinin soruya, “türev integraldir çünkü türevin tersi integral” olarak verdiği cevap yer almaktadır. Burada öğrencilerin, türev ile integral konularını karıştırdıklarını söyleyebiliriz. Öğrenci, verdiği cevapta belirsiz bir integral tanımı verirken, “fonksiyonun türevinin alınmamış hali” ifadesini kullanmıştır.



Şekil 7. Ö18 kodlu öğrencinin cevabı

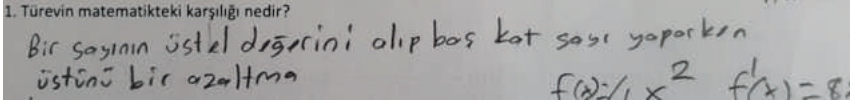
Yukardaki şekilde Ö18 kodlu mühendislik fakültesi öğrencisi türevi, “teğetin değişim oranıdır.” şeklinde tanımlamıştır. Öğrenci, türevin uygulamalarında bahsedilen teğetin değişimi kavramını ve Newton Oranında bahsedilen değişim oranı kavramını karıştırmış; bu sebeple soruyu yanlış cevaplamıştır.



Şekil 8. Ö23 kodlu öğrencinin cevabı

Yukardaki şekilde Ö23 kodlu mühendislik fakültesi öğrencisi türevi, “tan  $\theta$  = eğim” şeklinde tanımlamıştır. Öğrenci verdiği cevapla eğimi, eğrinin x eksenine ile yaptığı pozitif yönlü açının tanjantı olarak ifade etmiştir. Öğrencinin cevabının türevle hiçbir ilgisi bulunmamaktadır.





Şekil 9. Ö28 kodlu öğrencinin cevabı

Yukardaki şekilde Ö28 kodlu mühendislik fakültesi öğrencisi türevi, “bir sayının üstel değerini alıp baş kat sayı yaparken üstünü bir azaltma” şeklinde ifade etmiştir. Öğrenci, verdiği cevap içerisinde türev tanımının kullanımıyla elde edilen  $f(x) = x^n$  ise  $f'(x) = nx^{n-1}$  kuralını açıklamıştır. Türevin tanımı ile hiçbir ilgisi bulunmamaktadır.

**Araştırmanın ikinci sorusu olan “İntegral matematiksel olarak ne ifade eder?” sorusuna ait bulgular aşağıda sunulmuştur.**

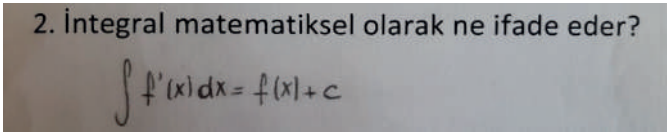
Mühendislik fakültesi öğrencilerinin, araştırmanın 2. sorusuna verdikleri doğru cevapların dağılımları Tablo 5’te verilmiştir.

*Tablo 5. Mühendislik fakültesi öğrencilerinin, araştırmanın 2. Sorusuna verdikleri doğru cevapların frekans ve yüzdeleri*

Doğru Cevap Kodu	Doğru Cevap Veren Öğrenciler	f	%
$\int f'(x) dx = f(x) + c$	Ö1, Ö12, Ö47, Ö50	4	8

Tablo 5 incelendiğinde araştırmanın 2. Sorusuna öğrencilerin çok az bir kısmının, sadece %8’inin (f=4) doğru cevap verdiği görülmektedir.

“İntegral matematiksel olarak ne ifade eder?” sorusuna doğru cevap veren Ö1 kodlu öğrencinin örnek cevabı aşağıda sunulmuştur.



Şekil 10. Ö1 kodlu öğrencinin cevabı

Yukardaki şekil incelendiğinde Ö1 kodlu mühendislik fakültesi öğrencisi, integralin matematiksel olarak ne ifade ettiği sorusunu  $\int f'(x) dx = f(x) + c$  ifadesi ile doğru cevaplamıştır.

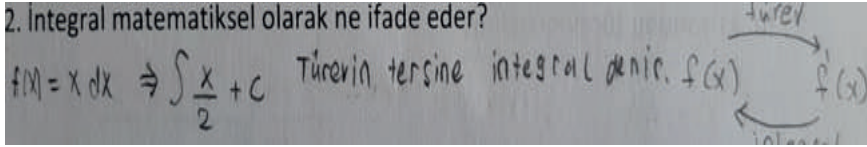
Mühendislik fakültesi öğrencilerinin, araştırmanın 2. sorusuna verdikleri kısmen doğru cevapların dağılımları Tablo 6'da verilmiştir.

*Tablo 6. Mühendislik fakültesi öğrencilerinin 2.soruya verdikleri kısmen doğru cevapların dağılımı*

<i>Kısmen Doğru Cevap Kodları</i>	<i>Kısmen Doğru Cevap Veren Öğrenciler</i>	<i>f</i>	<i>%</i>
<i>Türevin tersi</i>	Ö22, Ö6, Ö14, Ö15, Ö18, Ö21, Ö19, Ö2, Ö23, Ö46, Ö28, Ö29, Ö30, Ö34, Ö37, Ö43, Ö45, Ö49	18	36
<i>Alan</i>	Ö11, Ö5, Ö8, Ö4, Ö16, Ö44, Ö24, Ö26, Ö33, Ö31, Ö32, Ö39, Ö41, Ö3, Ö13, Ö40, Ö36, Ö27, Ö7, Ö25, Ö9	21	42
<i>Hacim hesaplamak</i>	Ö48	1	2
<i>Toplam değişimi</i>	Ö38, Ö10, Ö17, Ö20	4	8

Tablo 6 incelendiğinde 18 mühendislik fakültesi öğrencisinin integrali, matematiksel olarak “Türevin tersi” şeklinde tanımladığı, 21 öğrencinin “Alan” şeklinde tanımladığı, 1 öğrencinin “Hacim hesaplamak.” Şeklinde tanımladığı ve 4 öğrencinin de “Toplam değişimi.” şeklinde tanımladığı görülmektedir.

“İntegral matematiksel olarak ne ifade eder?” sorusuna kısmen doğru cevap veren öğrencilerden birkaçının örnek cevabı aşağıda sunulmuştur.



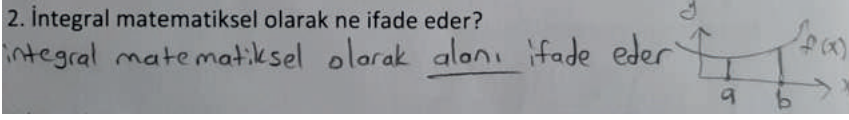
*Şekil 11. Ö22 kodlu öğrencinin cevabı*

Öğrenci bu soruda, türev ile integral konularını karıştırmıştır. Yukardaki şekilde Ö22 kodlu mühendislik fakültesi öğrencisi “türevin tersi integraldir” ifadesi ile soruyu kısmen doğru olarak cevaplamıştır. Öğrenci, verdiği

$f(x) = x dx \rightarrow \int \frac{x}{2} + c$  cevabı ile integralini aldığı fonksiyonun türevinin

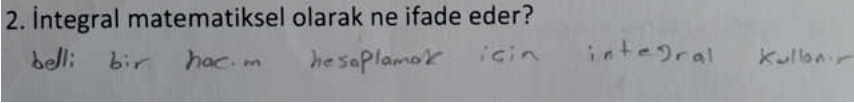
$f(x) = x$  olduğunu göstermek istemiştir. Ana fikir doğrudur fakat integral yanlış alınmıştır. Öğrenci, belirsiz integral tanımı yaparken “ $F'(x) = f(x)$ ” olmak üzere  $\mathbb{R}$  için  $\int f(x) dx = F(x) + c$  ifadesine  $f(x)$  fonksiyonun

belirsiz integrali (anti-türevi, ilkeli) denir.” tanımında kullanılan anti-türev ifadesinden dolayı türevinin alınmamış hali ifadesini kullanmıştır.



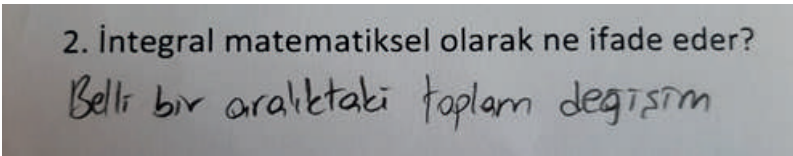
Şekil 12. Ö11 kodlu öğrencinin cevabı

Şekilde, Ö11 kodlu mühendislik fakültesi öğrencisinin “integral matematiksel olarak alanı ifade eder.” tanımı yer almaktadır. Öğrenci, belirli integralin uygulamalarında “ $f(x) > 0$  eğrisi  $x = a, x = b$  doğruları ve  $x$ -ekseni ile sınırlı bölgenin alanı  $\int_a^b f(x) dx$  dir.” şeklinde verilen alan tanımı ile belirsiz integral kavramlarının aynı anlama geldiğini düşünerek bu cevabı vermiştir. Bundan dolayı cevabı kısmen doğru sayılmıştır.



Şekil 13. Ö48 kodlu öğrencinin cevabı

Şekildeki Ö48 kodlu mühendislik fakültesi öğrencisi “belli bir hacim hesaplamak için integral kullanılır” şeklinde bir ifade kullanmıştır. Bilindiği gibi dönele cisimlerin hacmi, belirli integral yardımıyla hesaplanmaktadır. Öğrencinin verdiği cevapta ifade ettiği hacim hesabı, integral matematiksel olarak ne ifade eder sorusuna doğru bir cevap olarak görülmemektedir.



Şekil 14. Ö38 kodlu öğrencinin cevabı

Şekildeki Ö38 kodlu mühendislik fakültesi öğrencisinin soruya, “belli bir aralıktaki toplam değişim” şeklindeki cevabı yer almaktadır. Öğrenci, belirli integralde bir fonksiyonun bir aralıktaki Riemann anlamında integrelenebilir olması için düzgün bir  $P$  parçalanışına göre alt ve üst Riemann toplamalarının

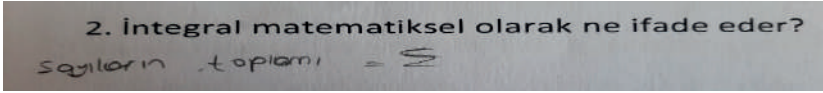
eşitliği gösterilirken kullanılan toplam durumunu belirsiz integral olarak değerlendirmiştir.

Mühendislik fakültesi öğrencilerinin, araştırmanın 2. sorusuna verdikleri yanlış cevapların öğrencilere göre dağılımları Tablo 7’de verilmiştir.

*Tablo 7. Mühendislik fakültesi öğrencilerinin 2.sorusuna verdikleri yanlış cevapların dağılımı*

<i>Yanlış Cevaplar Kodu</i>	<i>Yanlış Cevap Veren Öğrenciler</i>	<i>f</i>	<i>%</i>
<i>Sayıların toplamı <math>\Sigma</math></i>	<i>Ö42</i>	<i>1</i>	<i>2</i>

Tablo incelendiğinde 1 mühendislik fakültesi öğrencisinin, integral matematiksel olarak “Sayıların toplamı  $\Sigma$ .” şeklinde belirtme yaptığı görülmektedir. “İntegral matematiksel olarak ne ifade eder?” sorusuna yanlış cevap veren Ö42 kodlu öğrencinin örnek cevabı aşağıda sunulmuştur.



*Şekil 15. Ö42 kodlu öğrencinin cevabı*

Şekildeki Ö42 kodlu mühendislik fakültesi öğrencisi, “Sayıların toplamı  $\Sigma$ ” şeklinde bir ifade kullanmıştır. Öğrencinin cevabının integral konusuyla hiçbir ilgisi bulunmamaktadır.

Mühendislik fakültesi öğrencilerinden, araştırmanın 2. Sorusunu boş bırakan 2 öğrenci belirlenmiştir.

#### **4. Sonuç ve Öneri**

Mühendislik fakültesi öğrencilerinin türev ve integral konusundaki kavramsal düzeylerini ortaya koymaya yönelik veri toplama aracından elde edilen bulgular, genel olarak mühendislik fakültesi öğrencilerinin bu konular hakkında ya yüzeysel olarak bilgi sahibi olduklarını ya da hiçbir bilgiye hâkim olmadıklarını göstermektedir. Öğrencilerin, kavramlar arası ilişkileri açıklamaya veya ifade etmeye çalışırken zorlandıkları ve bu ilişkilerin doğası hakkında fazla fikir sahibi olmadıkları belirlenmiştir. Benzer şekilde Ubuz’un (1999) öğrencilerin hatalarını kategorize ettiği çalışmasında, “tanımların içeriğini anlayamama” ve “verilen tanımın bir bütün olarak anlaşılmasından kaynaklanmaktadır.” ifadesini kullanmıştır.

İlk olarak, birinci sorudan elde edilen verilerine göre; mühendislik fakültesi öğrencilerinin “Türevin matematikteki karşılığı nedir?” sorusunu formüle etmeye çalıştıkları sırada, bu formülün arkasındaki kavramsal yapıyı açıklamakta güçlük çektikleri görülmektedir. Daha önce yapılan “Park 2011” çalışmasında, öğrencilerin bir fonksiyonun türevini bulmak için cebirsel gösterimini bulmaya yöneldiklerini ortaya çıkarmıştır. Mühendislik öğrencileri, farklılaşma ilkelerine bağlı hesaplama becerilerine sahiptirler fakat değişim oranı fikrini türevlerle ilişkilendirmekte zorlanmaktadırlar. Türevi daha derinden anlamak için, bu fikri sağlam bir şekilde kavramak çok önemlidir (Park, 2011). Thompson (1994), öğrencilere analizde türev kavramını ve teoremleri anlamalarına yardımcı olacak önerilerde bulunmuş ancak öğrencilerden hiçbirinin yeterince başarılı olamadığını belirtmiştir.

İntegral konusuyla ilgili sorunun bulgularına göre mühendislik fakültesi öğrencilerinin bu konu hakkında eksik bilgiye sahip olduğu belirlenmiştir. Bu durum, öğrencilerin lisans matematik eğitimi içerisinde yeterli değerlendirme ve integral oluşturma sorusuyla karşılaşmış ve karşılaşmadıklarını ortaya koymuştur. Literatür incelendiğinde integralin, anlaşılması en zor kavramlardan biri olduğu anlaşılmaktadır (Ubuz, 1999).

Mühendislik fakültesi öğrencilerine yapılan yazılı uygulamanın tanım sorularına verilen yanıtları incelerken, çoğu öğrencinin kavramların tanımlarını bile bilmemeleri çok ilginç bir durum olarak yorumlanmıştır. Türev ve integral kavramları doğası gereği anlaşılması zor kavramlardır. Öğrenciler, türev kavramını tam olarak anlamasalar bile, formülleri ve yönergeleri izleyerek bununla ilgili çok sayıda soruyu yanıtlayabilirler. Öğrenciler bu durumda, türev kavramını anladıklarına inanabilmektedirler. Ancak araştırmanın bulguları bunun tersini göstermektedir. Mühendislik fakültesi öğrencilerinin türev kavramına ilişkin kavramsal bilgilerini ölçmeye yönelik araştırma sorularının başarı oranı nispeten düşüktür. Bu bağlamda çalışma, mühendislik fakültesi öğrencilerinin konuyu ezber yoluyla öğrenmeye çalıştıkları veya işlem gücü sorularına öncelik verdikleri ortaya çıkmıştır.

Özellikle son yıllarda kavramsal anlamayı ön plana çıkaran ve bunu hedef olarak gören öğretim programlarının işlevselliğini etkileyecek etmenlerden biri, kavramsal bilgi olarak yeter duruma gelmeye bağlıdır. Araştırmanın sonuçlarına göre, mühendislik fakültesi öğrencilerinin türev ve integral konusunda kavramsal anlama boyutunda güçlük yaşadıklarını ortaya koymuştur.

Sonuç olarak; mühendislik öğrencilerinin türev, integral, süreklilik ve limit kavramlarını anlamakta ve ilişkilendirmekte zorlandıkları tespit edilmiştir. Öğrencilerin karşılaştıkları bazı zorluklar ve yaptıkları hatalar:

1. Öğrencilerin, kavramların tanımları veya ayrıntıları hakkında yetersiz bilgiye sahip olması
2. Ezber yöntemiyle öğrenilen bilgilerin yönetimi
3. Belirli kavramların birbiriyle olan ilişkilerinin yanlış anlaşılması
4. Sayısal veya grafikli türev problemlerini ele alırken cebirsel notasyonu kullanma eğilimi
5. Türev ve integral kavramlarının mühendislik fakültesi öğrencileri tarafından yetersiz anlaşılması
6. Mühendislik fakültesi öğrencilerin kavramsal anlama yerine, işlemsel anlamaya yönelmesi
7. Öğrencilerin, türevin tanımını kullanarak bir fonksiyonun türevinin değerini bulmakla ilgili yeterli bilgiye sahip olmamaları
8. Öğrencilerin, tanım ile tanımın uygulamalarını birbirine karıştırdığı
9. Öğrencilerin soruyu çözerken hangi küme üzerinde işlem yaptığına dikkat etmediği şeklindedir.

Yanılgılar ve eksiklikler ile ilgili bu tür araştırmalar, ileri matematiğin bütün konularında ve daha geniş öğrenci kitlesi üzerinde yapılabilir. Çalışma sonuçları, öğrencilerin hatırlama basamağı hakkında bazı bilgilere sahip olduğunu göstermektedir. Ancak, eksik ve yanlış bilgilerin tamamlanıp düzeltilmesi gerektiği düşüncesini de desteklemektedir.

## Kaynakça

- Aktümen, M., & Kaçar, A., “Bilgisayar cebiri sistemlerinin matematiğe yönelik tutuma etkisi”, *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 35(35), 13-26 (2008).
- Altun, Murat. “İlköğretim ikinci kademede (6, 7 ve 8. sınıflarda) matematik öğretimi.” *Alfa Basım Yayın Dağıtım*, İstanbul (2002).
- Atman, C. J., Adams, R. S., Cardella, M. E., Turns, J., Mosborg, S., & Saleem, J., “Engineering design processes: A comparison of students and expert practitioners”, *Journal of engineering education*, 96(4), 359-379 (2007).
- Baki, A., & Güveli, E., “Evaluation of a web based mathematics teaching material on the subject of functions”, *Computers & Education*, 51(2), 854-863 (2008).
- Baki, A., & Kartal, T., “Kavramsal ve işlemsel bilgi bağlamında lise öğrencilerinin cebir bilgilerinin karakterizasyonu”, *Türk eğitim bilimleri dergisi*, 2(1), 27-46 (2004).
- Chmiliar, L., “Improving learning outcomes: the iPad and preschool children with disabilities”, *Frontiers in psychology*, 8, 660(2017).
- Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K., “Research methods in education”, (Sixth). *Oxon: Routledge*. (2007).
- Gökçek, T., & Açıkyıldız, G., “Matematik öğretmeni adaylarının türev kavramıyla ilgili yaptıkları hatalar”, *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT)*, 7(1), 112-141 (2016).
- Gökçek, T., & Açıkyıldız, G., “Matematik öğretmeni adaylarının türev kavramıyla ilgili yaptıkları hatalar”, *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT)*, 7(1), 112-141 (2016).
- Gür, H., & Barak, B., “Ortaöğretim 11. sınıf öğrencilerinin türev konusundaki hata örnekleri”, *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri*, 7(1), 453-480, (2007).
- Kashef-Haghighi, S., Shao, Y., & Ghoshal, S., “Mathematical modeling of CO<sub>2</sub> uptake by concrete during accelerated carbonation curing”, *Cement and concrete research*, 67, 1-10 (2015).
- Park, J., “Calculus instructors’ and students’ discourses on the derivative”, *Unpublished doctoral dissertation, Michigan State University* (2011).
- Sağlam, Y., & Dost, S., “Preservice science and mathematics teachers’ beliefs about mathematical problem solving”, *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 116, 303-306 (2014).
- Thompson, P.W., “Students, functions, and the undergraduate curriculum”, *Research in Collegiate Mathematics Education*, 1, 21-44 (1994).
- Ubuz, B., “Genel matematikte (Calculus) öğrenci hataları”, *Matematik Dünyası*, 5, 9-11. (1999).

- Willcox, K., & Bounova, G., “Mathematics in engineering: Identifying, enhancing, and linking the implicit mathematics curriculum”, *In 2004 Annual Conference* (pp. 9-896). (2004).
- Willcox, K., & Bounova, G., “Mathematics in engineering: Identifying, enhancing, and linking the implicit mathematics curriculum”, *In 2004 Annual Conference* (pp. 9-896). (2004).
- Yalçınkaya, Y., “Yenilenen 9. sınıf matematik dersi öğretim programı hakkında öğretmen görüşleri”, *Eğitim Kuram ve Uygulama Araştırmaları Dergisi*, 4(3), 100-110 (2018).
- Zeidmane, A., & Sergejeva, N., “Indirect impact of mathematics in engineering education”, *In Proceedings of 12th International Scientific Conference Engineering for rural development* (pp. 611-615) (2013).





## Mühendislik Fakültesi Öğrencilerinin Limit Konusundaki Temel Bilgi Düzeyleri

Aya Alebo<sup>1</sup>

Çiğdem İnci Kuzu<sup>2</sup>

### Özet

Mühendislik, matematiğin uygulama alanlarından biri olup; matematiği, teknik bilimleri ve sosyal bilimleri kullanarak yeni ürünler oluşturmaya yönelik bir uygulama süreci olarak değerlendirilmektedir. Bu çalışmanın amacı, mühendislik fakültesi öğrencilerinin soyut buldukları ve anlamakta güçlük çektikleri analizin temel konularından biri olan limit konusundaki kavram yanılgıları limit hakkındaki bilgi düzeylerini derinlemesine inmeden genel olarak incelemektir. Çalışmanın katılımcılarını, Batı Karadeniz’de bir Üniversitenin Mühendislik Fakültesi’nin bilgisayar, makine ve elektronik mühendisliği bölümlerinde öğrenim görmekte olan 50 ikinci sınıf öğrencisi oluşturmaktadır. Çalışmadaki veriler, mühendislik fakültesi öğrencilerine sorulan 3 sorudan elde edilmiştir. Veri toplama aracı, mühendislik fakültesinde okutulan genel matematik ders içeriğinde yer alan temel analiz konularında edindikleri temel bilgilerden yola çıkılarak hazırlanmıştır. Çalışma nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışmasıdır. Çalışma bulgularına göre, mühendislik fakültesi öğrencilerinin limit kavramını yalnızca üstünlük bir şekilde kavradıklarını ve tanımların içeriğini tam anlamıyla bütünleştiremediklerini göstermiştir. Bu nedenle türev, limit ve süreklilik kavramları arasındaki ilişkileri yorumlamaya çalışırken zorlandıkları ve bu ilişkilerin doğası hakkında çok fazla bilgiye sahip olmadıkları belirlenmiştir.

### 1. Giriş

Matematik eğitiminin amaçlarından biri, öğrencilerin matematiksel kavramları öğrenmeyi en üst düzeyde gerçekleştirmeleridir. Fakat bunu gerçekleştirebilen öğrenci sayısının az olmasıyla birlikte öğrencilerin büyük

1 Karabük Üniversitesi, kaanyusuf629@gmail.com, 0009-0008-9242-5650

2 Karabük Üniversitesi, cigdemkuzu@karabuk.edu.tr, 0000-0003-0143-2473

bir çoğunluğunun matematiği zor olarak algılaması, yaşamın bir gerçeği olarak görülmektedir (Tall & Razali, 1993). Matematiksel kavramların soyut yapısı düşünüldüğünde, kavramların tam anlamıyla öğrenilemediği görülmektedir. Matematiksel kavramların öğrenimi sırasında yaşanan güçlükler, matematik öğrenimi ve öğretiminin zor olarak algılanmasına sebep olmaktadır. Bu yönüyle öğrencilerin matematik alanındaki öğrenme güçlüklerinin tespit edilip giderilmesi gerekmektedir (Suraweera, 2002). Matematik alanında, kavramayı geliştirmenin önemli fakat güç bir hedef olduğunu ifade ederek; öğrencilerin matematikteki öğrenme güçlüklerini ve bu güçlüklerin kaynağını bilmenin, onları gidermek için öğretim yöntemi tasarlanmasının, bu hedefe ulaşmada önemli bir adım olduğunu belirtmek gerekir (Pape, Bell, & Yetkin, 2003). Herhangi bir konuda öğrenme güçlüğü yaşayan bir öğrencinin, gelecek konularda başarıya ulaşması zordur (Dikici & İşleyen, 2004). Matematik konuları, diğer derslere göre daha güçlü ve sıralı bir yapıya sahip olduğu için herhangi bir kavram, matematiğin ön şartı durumundaki diğer kavramlar kavranmadan tam olarak kavranamaz (Altun, 2003).

Analiz, matematiksel olarak anlaşılması ve anlamlandırılması zor olan konulardan oluşan ve öğrenciler için yüksek düşünme becerileri gerektiren alanların başında gelmektedir. Analiz alan olarak, birçok ülkede olduğu gibi Türkiye’de de ilk olarak lise öğrencilerinin karşısına çıkmaktadır (Bingolbalı & Monaghan, 2008). Konu olarak matematiğin değişen hızlarla ilgili bölümünü ele alan, genel matematik dersleri içerisinde bulunan analiz; mühendislik, tıp, ekonomi, iktisat, fen bilimleri ve matematik bölümlerinde okutulan derslerden biridir (Işık & Bekdemir, 1998). Türkiye’de ve birçok ülkede ortaöğretim öğrencilerine yönelik matematik programlarında matematiksel olarak anlaşılması ve işlenmesi güç olarak algılanan, öğrencilerde büyük düşünme becerisi gerektiren kavramlardan oluşan analiz dersi işlenmektedir (Yapıcıoğlu Ulaş, 2019). Matematik, fen ve mühendislikte büyük önem taşıyan analiz konusu; ileri matematikte ilk adım olarak karşımıza çıkmaktadır. Matematik, mühendisliğin dili olarak tanımlanır ve mühendislik fakültelerindeki bölümlerinin ilk yıllarında genel matematik, diferansiyel denklemler, lineer cebir gibi dersler programlarda yer almaktadırlar. Mühendisler, matematiği, teknolojiyi ve bilimi iyi bilen; bu bilgileri, hayatta önlerine çıkan problemlere çözüm üretmek amacıyla kullanabilen kişiler olarak tanımlanabilmektedirler. Mühendislik eğitiminde matematiğin önemli bir yeri olduğu kabul görürken, nasıl ve ne kadar öğretilmesi gerektiği ile ilgili tartışmalar yıllardır devam ederken belli bir kesim tarafından, mühendislik fakültesi öğrencilerinin matematik bilgilerinin yeterli olmadığını düşünmektedir (Güner & Çomak, 2011). Limit kavramı

türev, integral, süreklilik gibi pek çok önemli kavramla ilişkisi nedeniyle analizin en temel kavramları arasında yer almaktadır (Cornu, 1991). Genel matematik ders içeriğinde limit konusundan sonra süreklilik, türev ve integral kavramları mevcuttur. Limit kavramı; Matematğin birçok kavramı gibi hayatla içinden ve diğer alanlarla sıkı ilişki içerisindedir. Bu bağlamda limitin öğrenciler tarafından kavranması önem taşımaktadır (Alkan ve Güven, 2018).

## 2. Limit Kavramı

Limit, değişik nicelikler arasındaki fonksiyonel bağıntının belli olduğu durumlarda, birbirine bağlı büyüklüklerden birinin belli bir değere yaklaşması halinde, diğerinin hangi değere yaklaşacağını incelenmesi durumudur. Kısacası limit, “bir fonksiyondaki değişkenin yaklaştığı bir değere karşılık, fonksiyonun yaklaşabildiği değer olarak” tanımlanmaktadır. Limit kavramı informal ve formal ( $\epsilon$ - $\delta$ ) olmak üzere iki farklı şekilde tanımlanabilir;

*“Limitin informal tanımı:  $f$  fonksiyonu  $x$ 'in  $a$  komşuluğunda tanımlı bir fonksiyonu olmak üzere,  $x$  sağdan ve soldan  $a$ 'ya yaklaşırken  $f(x)$  de  $b$  gibi bir sayıya yaklaşıyorsa “ $x$ ,  $a$ 'ya yaklaşıyorken  $f(x)$ 'in limiti  $b$ 'dir denir ve  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  şeklinde gösterilir.”*

*“Limitin formal tanımı: Verilen her  $\forall \epsilon > 0$  sayısı için öyle bir  $\delta > 0$  sayısı bulunabilirse ki  $0 < |x - a| < \delta$  olduğunda  $|f(x) - b| < \epsilon$  oluyorsa,  $f$  fonksiyonunun  $a$  noktasındaki limiti  $b$ 'dir denir.” (Karadüz, 2009).*

Literatüre bakıldığında limit kavramıyla ilgili birçok araştırma yapıldığı görülmektedir. Ünver, Çelik ve Güzel (2020), çalışmalarında; limitte sınır gerektiren durumlarla baş etme mekanizmalarını değerlendirmeyi ve yanlış anlamaları belirlemeyi amaçlamışlardır. Öğrencilerin limit kavramını yanlış anlamalar veya alan bilgisi eksiklikleri nedeniyle, hata yaptıklarını belirlemişlerdir. Yitmez, Yılmaz ve Dinçer (2022), çalışmalarında; öğretmen adaylarının, çok değişkenli fonksiyonların limit ve sürekliliğine ilişkin kavram yanlışlarını incelemişlerdir. Araştırmanın bulgularına dayanarak “Tek değişkenli fonksiyonlarda limit ve süreklilik ile, çok değişkenli fonksiyonlarda limit ve süreklilik konularını birleştirerek kavramlar arasında bağlantı kurmak ve ders aşamasında çeşitli konu temsillerine yer vermek konunun, farklı öğrenme becerilerine sahip öğrenciler tarafından daha net anlaşılmasını sağlayacaktır.” önerilerinde bulunmuşlardır. Turan (2016); çalışmasında, 2014-2015 yılı matematik öğretmeni adaylarının limit, süreklilik ve türev ile ilgili kavramsal yapı anlayışlarını incelemiştir. Çalışmadaki genel bulgular dikkate alındığında; limit, süreklilik ve türev konularının her birinin öncelikle

kendi içindeki kavramlarla ilişkilendirildiği, daha sonrasında birbirleriyle ilişkilendirildiği görülmüştür.

Araştırmanın problem cümlesi; “Mühendislik fakültesi öğrencilerine Genel Matematik I dersi içeriğinde verilen limit kavramının en genel haliyle mühendis adayları tarafından anlaşılma düzeyleri nedir?” olarak belirlenmiştir. Bu amaç doğrultusunda mühendis adaylarına limit konusuna ilişkin genel 3 soru sorulmuştur.

### 3. Yöntem

Mühendislik fakültesi öğrencilerinin analizin temel konularından biri olan limit hakkındaki kavram yanlışlarını ortaya koymayı amaçlayan bu çalışma, bir durum çalışmasıdır. Cohen, Manion ve Morrison (2007) durum çalışmasını; gerçek durumlarda izlenimleri görmede ve neden-sonuç adı altındaki izlenimleri kararlaştırmada etkili bir sistem olarak belirtmektedirler. Çalışmanın katılımcılarını Batı Karadeniz’de bir Üniversitenin Mühendislik Fakültesi’nin bilgisayar, makine ve elektronik bölümlerinde öğrenim görmekte olan (50) 2. Sınıf öğrencisi oluşturmaktadır. Araştırmada katılımcıların limit konusundaki bilgi birikim süreçlerinin değerlendirilmesi amaçlanmıştır. Çalışmaya gönüllü olarak katılan öğrencilerin isimleri gizli tutulup, Ö1, Ö2.... Ö50 şeklindeki kodlarla belirtilmiştir. Çalışma içerisinde, mühendislik adı altında farklı bölümlerden öğrencilerin tercih edilmesiyle, çalışma örneklerine çeşitlilik katılması planlanmıştır. Araştırmaya katılan öğrencilerin 20’si makine mühendisliği, 15’i bilgisayar mühendisliği ve 15’i elektronik mühendisliği bölümü öğrencisidir.

Çalışmada veriler; mühendislik fakültesi öğrencilerine uygulanan 3 soruluk yazılı sınavdan elde edilmiştir. Uygulanan yazılı sınav soruları, iki matematik eğitimi uzmanı ve alanında uzman iki öğretim üyesi tarafından incelenmiş ve onaylanmıştır. Sınav, mühendislik fakültelerinin 2. sınıf matematik ders içeriklerinde yer alan limit konusundaki en temel bilgilerden yola çıkılarak hazırlanmıştır. Çalışmaya, öğrencilerin kısa süre içerisinde hızlı bir şekilde yanıtlayamayacakları, yorumlama ve düşünme yeteneği gerektiren sorular dâhil edilmiştir.

**Tablo 1. Veri toplama aracındaki soruların amaçları**

Soru	Amaç
1.soru	Öğrencilerin limit ile süreklilik arasındaki geçişe dikkat edip etmediklerini ölçmek. “Sürekli her fonksiyon o noktada limite sahip iken tersinin geçerli olmadığı” bilgisini ölçmek.
2.soru	Burada paydası 0 olan limitlerde sonucun reel sayı olabilmesi için 0/0 belirsizliği gereği payında 0 alınması gerektiğinin bilincinde olup olmadığını ölçmek.
3.soru	Öğrencinin limitteki ince detaylar hakkındaki bilgisini ölçmek.

Yazılı sınavlardan elde edilen veriler; cevabı doğru olanlar, cevabı kısmen doğru olanlar, cevabı yanlış olanlar ve cevabı boş bırakanlar şeklinde dört temel kategoride sınıflandırılmıştır.

**Tablo 2. Yazılı sınav değerlendirme kategorileri**

<b>Cevabı doğru olanlar</b>	Geçerli cevabın tüm elementlerini içeren cevaplar verener.
<b>Cevabı kısmen doğru olanlar</b>	Geçerli cevabın elementlerinden en az birini içeren fakat hepsini içermeyen cevaplar verener.
<b>Cevabı yanlış olanlar</b>	Geçerli cevapla alakasız bilgiler içeren, yanlış ya da mantıksız cevap verener.
<b>Cevabı boş bırakanlar</b>	Cevabı boş bırakanlar.

#### 4. Bulgular

Araştırmanın Birinci sorusu olan “Limit ile süreklilik arasında bağlantı var mı? yorumlayınız.” sorusuna ait bulgular aşağıda sunulmuştur.

Mühendislik fakültesi öğrencilerinin araştırmanın 1. sorusuna verdikleri doğru cevapların öğrencilere göre dağılımları Tabloda verilmiştir.

Tablo incelendiğinde 17 mühendislik fakültesi öğrencisinin limit ile süreklilik arasında bağlantı olduğunu “Sürekliyse mutlaka limit vardır.” şeklinde bir açıklama yaptığı, 7 öğrencinin “Limit olmadan süreklilik aranmaz.” şeklinde bir açıklama yaptığı, 5 öğrencinin “Her limit sürekli olmak zorunda değil.” şeklinde bir açıklama yaptığı, 3 öğrencinin “ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ ” şeklinde bir açıklama yaptığı, 2 öğrencinin “Süreklilik limite yaklaşımı ifade eder.” şeklinde bir açıklama yaptığı ve 2 öğrencinin de “Limit varsa sürekli olmak zorunda değil.” şeklinde bir açıklama yaptığı görülmektedir. Süreklilik ile limit arasındaki ilişki(bağlantı) aşağıdaki gibidir.

“Her fonksiyonun, sürekli olduğu noktada limiti vardır fakat limitin olduğu noktada süreklilik olmayabilir.” (1)

“Limit ile süreklilik arasında bağlantı var mıdır yorumlayınız?” sorusuna doğru cevap veren öğrencilerden birkaçının örnek cevabı aşağıda sunulmuştur. Öğrencilerin verdiği cevaplar, (1) bağlantısındaki açıklamaya denktir.

Tablo 3. Mühendislik fakültesi öğrencilerinin araştırmanın 1. sorusuna verdikleri doğru cevapların frekans ve yüzdeleri

Doğru Cevap Kodu	Doğru Cevap Veren Öğrenciler	f	%
Sürekliyse mutlaka limit vardır.	Ö21, Ö9, Ö12, Ö15, Ö16, Ö3, Ö24, Ö2, Ö19, Ö20, Ö27, Ö28, Ö35, Ö37, Ö38, Ö39, Ö41	17	34
Limit olmadan süreklilik aranmaz.	Ö31, Ö22, Ö23, Ö26, Ö40, Ö44, Ö45	7	14
Her limit sürekli olmak zorunda değil.	Ö5, Ö43, Ö46, Ö47, Ö50	5	10
$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$	Ö4, Ö29, Ö1	3	6
Süreklilik limite Yaklaşımı ifade eder.	Ö7, Ö30	2	4
Limit varsa sürekli olmak Zorunda değil.	Ö13, Ö36	2	4

limit ile süreklilik arasında bağlantı var mı yorumlayınız?  
 Bir fonksiyon sürekliyse kesinlikle Limit vardır. Ancak limiti olan fonksiyon daima sürekli olmayabilir

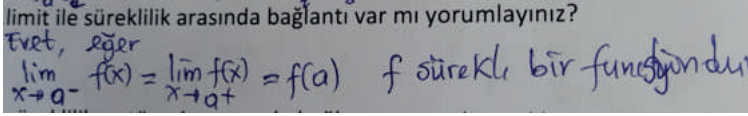
Şekil 1. Ö21 kodlu öğrencinin cevabı

limit ile süreklilik arasında bağlantı var mı yorumlayınız?  
 Evet vardır. Limiti olmayan bir fonksiyonda süreklilik aranmaz.

Şekil 2. Ö31 kodlu öğrencinin cevabı

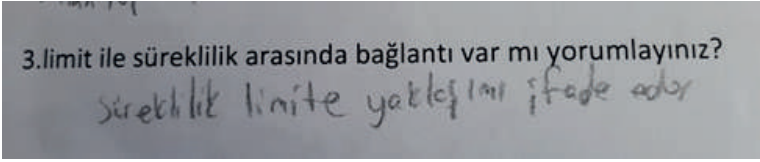
limit ile süreklilik arasında bağlantı var mı yorumlayınız?  
 vardır. fakat her limit sürekli olmak zorunda değildir

Şekil 3. Ö5 kodlu öğrencinin cevabı

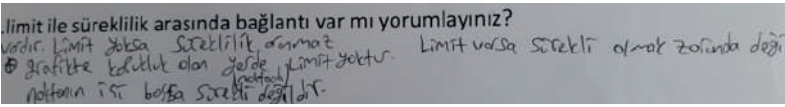


Şekil 4. Ö4 kodlu öğrencinin cevabı

Şekildeki Ö4 kodlu mühendislik fakültesi öğrencisi,  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$  şeklinde bir ifade kullanmıştır.



Şekil 5. Ö7 kodlu öğrencinin cevabı



Şekil 6. Ö13 kodlu öğrencinin cevabı

Mühendislik fakültesi öğrencilerinin, araştırmanın 1. sorusuna verdikleri kısmen doğru cevapların öğrencilere göre dağılımları Tabloda verilmiştir.

**Tablo 4. Mühendislik fakültesi öğrencilerinin 1.sorusuna verdikleri kısmen doğru cevapların dağılımı.**

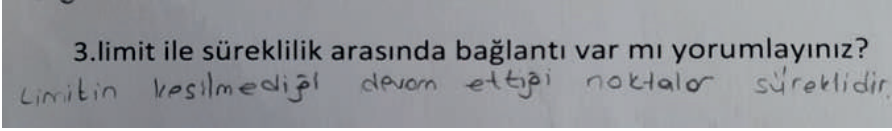
Kısmen Doğru Cevap Kodları	Kısmen Doğru Cevap Veren Öğrenciler	f	%
Limit devam ettiği noktalar süreklidir.	Ö42	1	2
Limite tanımsızlık önemli değil, süreklilik tanımlı olmalı.	Ö48	1	2
Var (açıklama yapılmamış)	Ö3	1	2

Tablo incelendiğinde, 1 mühendislik fakültesi öğrencisinin limit ile süreklilik arasındaki bağlantıyı “Limit devam ettiği noktalar süreklidir.” şeklinde ifade ettiği, 1 öğrencinin, sorunun cevabını sadece “var” şeklinde ifade edip herhangi bir açıklama yapmadığı ve 1 öğrencinin de “Limitin

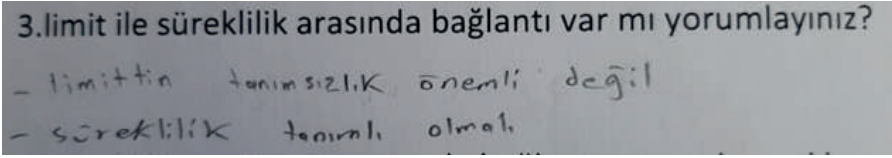


tanımsızlık önemli değil süreklilik tanımlı olmalı.” şeklinde bir açıklama yaptığı görülmektedir.

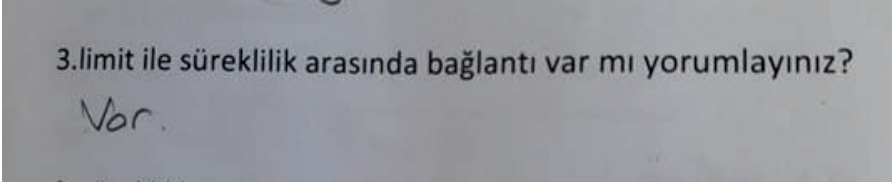
“Limit ile süreklilik arasında bağlantı var mı yorumlayınız?” sorusuna kısmen doğru cevap veren öğrencilerden birkaçının örnek cevabı aşağıda sunulmuştur.



Şekil 7. Ö42 kodlu öğrencinin cevabı



Şekil 8. Ö48 kodlu öğrencinin cevabı



Şekil 9. Ö3 kodlu öğrencinin cevabı

Şekildeki Ö3 kodlu mühendislik fakültesi öğrencisi, “var” şeklinde bir ifade kullanmıştır. Öğrenci bir bağlantı olduğunu duymuş ama ne olduğunu hatırlayamamıştır. Dolayısıyla herhangi bir açıklama yapmamıştır.

Mühendislik fakültesi öğrencilerinin, araştırmanın 3. sorusuna verdikleri yanlış cevapların öğrencilere göre dağılımları Tabloda verilmiştir.

**Tablo 5. Mühendislik fakültesi öğrencilerinin 1.soruya verdikleri yanlış cevapların dağılımı**

Yanlış Cevap Kodları	Yanlış Cevap Veren Öğrenciler	f	%
Bağlantı yoktur.	Ö14, Ö10, Ö17, Ö32, Ö49	5	10
Limit varsa süreklidir.	Ö6, Ö11, Ö18, Ö33	4	8
Süreklilik yoksa limit yoktur.	Ö34	1	2
Limit ve süreklilik eğim bulmak için kullanılıyor.	Ö8	1	2

Tablo incelendiğinde; 5 mühendislik fakültesi öğrencisi limit ile süreklilik arasında bir bağlantı olmadığını “Bağlantı yoktur.” şeklinde ifade ettiği, 4 öğrencinin “Limit varsa süreklidir.” şeklinde bir açıklama yaptığı, 1 öğrencinin “Süreklilik yoksa limit yoktur.” şeklinde bir açıklama yaptığı ve 1 öğrencinin de “Limit ve süreklilik eğim bulmak için kullanılıyor.” şeklinde bir açıklama yaptığı görülmektedir.

“Limit ile süreklilik arasında bağlantı var mı yorumlayınız?” sorusuna yanlış cevap veren öğrencilerden birkaçının örnek cevabı aşağıda sunulmuştur.

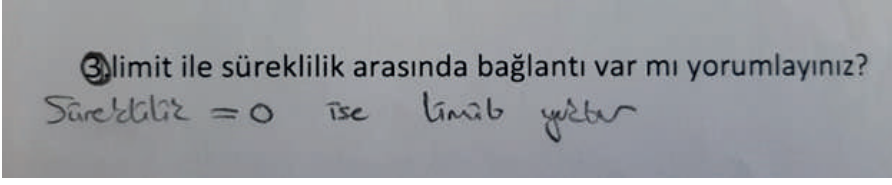
limit ile süreklilik arasında bağlantı var mı yorumlayınız?  
 Limit ile süreklilik arasında bağlantı yoktur. Limitin olduğu yerde sürekli olması zorunda değil.

Şekil 10. Ö14 kodlu öğrencinin cevabı

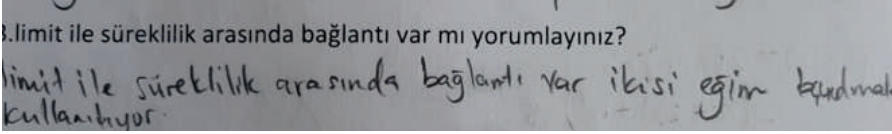
3. limit ile süreklilik arasında bağlantı var mı yorumlayınız?  
 integral  
 Sağ-sol limitleri ve 0 noktadaki değeri eşit ise limit vardır ve sürekli olur.

Şekil 11. Ö6 kodlu öğrencinin cevabı

Şekildeki Ö6 kodlu mühendislik fakültesi öğrencisi, “sağ ve sol limitleri ve 0 noktadaki değeri eşit ise limit vardır ve sürekli olur.” şeklinde bir ifade kullanmıştır.



Şekil 12. Ö34 kodlu öğrencinin cevabı



Şekil 13. Ö8 kodlu öğrencinin cevabı

Şekildeki Ö8 kodlu mühendislik fakültesi öğrencisi, “Limit ve süreklilik eğim bulmak için kullanılıyor.” şeklinde bir ifade kullanmıştır.

Araştırmanın ikinci sorusu olan “ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + ax + 5}{x - 3} = b$ ,  $b \in \mathbb{R}$  ise a değeri ne olmalıdır? sebebini açıklayınız.” sorusuna ait bulgular aşağıda sunulmuştur.

Mühendislik fakültesi öğrencilerinin, araştırmanın 2. sorusuna verdikleri doğru cevapların öğrencilere göre dağılımları Tabloda verilmiştir.

*Tablo 6. Mühendislik fakültesi öğrencilerinin, araştırmanın 2. sorusuna verdikleri doğru cevapların frekans ve yüzdeleri*

Doğru Cevap Kodları	Doğru Cevap Veren Öğrenciler	f	%
İstenilen sebebi açıklamamış ama a değerini doğru bulmuştur.	Ö37, Ö6, Ö15, Ö16, Ö29, Ö21, Ö35, Ö50, Ö7, Ö10, Ö13, Ö14, Ö26, Ö28, Ö36, Ö38, Ö41, Ö45	18	36
Çarpanlara ayırma metodu ile çözüme ulaşmış.	Ö39, Ö9, Ö31, Ö32, Ö2, Ö4, Ö46	7	14

Tablo incelendiğinde, araştırmanın 2. Sorusuna öğrencilerin %50’sinin ( $f=25$ ) doğru cevap verdiği görülmektedir. Bunlardan 18’i a değerini bulmuş fakat sebebini açıklayamamıştır. 14’ü ise çarpanlara ayırma metodu ile doğru çözüme ulaşmıştır.

“ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + ax + 5}{x - 3} = b, b \in \mathbb{R}$  İse a değeri ne olmalıdır sebebini açıklayınız?”

sorusuna doğru cevap veren Ö37 kodlu öğrencinin örnek cevabı aşağıda sunulmuştur.

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + ax + 5}{x - 3} = b, b \in \mathbb{R}$  İse a değeri ne olmalıdır sebebini açıklayınız?  
 $\frac{0}{0} = \frac{0}{0}$  belirsizliği  
 $x^2 + ax + 5 = 0$   
 $9 + 3a + 5 = 0$   
 $3a = -14$   
 $a = -14/3$

Şekil 14. Ö37 kodlu öğrencinin cevabı

Yukardaki şekilde Ö37 kodlu mühendislik fakültesi öğrencisi, “a” değerini direkt olarak bulmuştur. Öğrenci  $\frac{0}{0}$  belirsizliği durumunda reel sayı sonucuna ulaşılacağı bilgisine sahiptir ve payı 0 eşitleyerek a değerini bulmuştur.

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + ax + 5}{x - 3} = b, b \in \mathbb{R}$  İse a değeri ne olmalıdır sebebini açıklayınız?  
 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3) \cdot (x-\frac{5}{3})}{x-3}$   
 $x^2 + ax + 5 = x(x-3) + (x-\frac{5}{3})$   
 $a = -3 - \frac{5}{3} = -\frac{14}{3}$

Şekil 15. Ö39 kodlu öğrencinin cevabı

Yukardaki şekilde Ö39 kodlu mühendislik fakültesi öğrencisi, çarpanları ayırma metodu ile çözüme ulaşmıştır.

Mühendislik fakültesi öğrencilerinin, araştırmanın 2. sorusuna verdikleri yanlış cevapların öğrencilere göre dağılımları tabloda verilmiştir.

Tablo 7. Mühendislik fakültesi öğrencilerinin 2. soruya verdikleri yanlış cevapların dağılımı

Yanlış Cevaplar Kodları	Yanlış Cevap Veren Öğrenciler	f	%
$-\infty$	Ö34, Ö20, Ö44	3	6
Türevi almış.	Ö23, Ö40, Ö24, Ö48, Ö43, Ö11, Ö49, Ö42, Ö5, Ö17, Ö18, Ö19, Ö27, Ö30, Ö33	15	30
Çarpanlara ayırma metodunu kullanmış fakat çözüm yanlış.	Ö47, Ö1, Ö22, Ö12	4	8
A için bir aralık tahmini yapmış.	Ö25	1	2
İkinci dereceden ayırma yapmış	Ö8	1	2

Tablo incelendiğinde, 3 mühendislik fakültesi öğrencisinin  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + ax + 5}{x - 3}$   
 $= b$ ,  $b \in R$  ise a değeri ne olmalıdır sebebini açıklayınız? Sorusuna “ $-\infty$   
 .” şeklinde bir tanımlama yaptığı, 15 öğrencinin türevi aldığı, 4 öğrencinin çarpanlara ayırma metodunu kullandığı fakat yanlış çözüme ulaştığı, 1 öğrencinin “a” için bir aralık tahmini yapmış olduğu ve 1 öğrencinin de ikinci dereceden bir ayırma yaptığı görülmektedir.

“ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + ax + 5}{x - 3} = b$ ,  $b \in R$  ise a değeri ne olmalıdır? Sebebini açıklayınız.” sorusuna yanlış cevap veren öğrencilerden birkaçının örnek cevabı aşağıda sunulmuştur.

8.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + ax + 5}{x - 3} = b$ ,  $b \in R$  ise a değeri ne olmalıdır sebebini açıklayınız?

$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 20x + 5}{x - 3} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 + ax + 5}{x - 3} = -\infty$   $a = -\infty$

Şekil 16. Ö34 kodlu öğrencinin cevabı

Yukardaki şekilde Ö34 kodlu mühendislik fakültesi öğrencisi,  $-\infty$  şeklinde bir ifade kullanmıştır. Öğrenci soruyu tamamen yanlış anlamış ve yanlış çözümlenmiştir.

8.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+ax+5}{x-3} = b, b \in \mathbb{R}$  İse a değeri ne olmalıdır sebebini açıklayınız?

$2x+a=0$   
 $2 \cdot 3+a=0$   
 $6+a=0$   $a=-6$

$\frac{0}{0}$  belirsizliğini kaldırmak için türev al.

Şekil 17. Ö23 kodlu öğrencinin cevabı

Yukardaki şekilde Ö23 kodlu mühendislik fakültesi öğrencisi, türevi alarak sifıra eşitlemiştir. Bu cevabın sorunun çözümü ile hiçbir ilgisi yoktur.

8.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+ax+5}{x-3} = b, b \in \mathbb{R}$  İse a değeri ne olmalıdır sebebini açıklayınız?

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3) \cdot A}{x-3} \quad (x-3) \cdot A = x^2+ax+5$   
 $x^2+ax+5 = b \cdot (x-3)$

Şekil 18. Ö47 kodlu öğrencinin cevabı

Yukardaki şekilde Ö47 kodlu mühendislik fakültesi öğrencisi, çarpanları ayırma metodunu kullanmayı denemiş fakat herhangi ilerleme göstermemiştir.

8.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+ax+5}{x-3} = b, b \in \mathbb{R}$  İse a değeri ne olmalıdır sebebini açıklayınız?

Eğer  $D < 0$  ise  
 $D = a^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 < 0$   
 $a^2 < 20$

$x=3$  e sahip veya soldan yaklaşırsa  
 $-25 \leq a \leq 25$   
 $-4/12 \leq a \leq 4/12$   
 aralıkta olmalı.  
 Bu aralıktaki herhangi bir  $b \in \mathbb{R}$  sınırları sağlayacaktır.

Şekil 19. Ö25 kodlu öğrencinin cevabı

Yukardaki şekilde Ö25 kodlu mühendislik fakültesi öğrencisi, ikinci derece denklemin deltası yardımıyla a için bir aralık tahmini yapmıştır. Bunun çözüm ile hiçbir alakası yoktur.

18.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+ax+5}{x-3} = b, b \in R$  ise  $a$  değeri ne olmalıdır sebebini açıklayınız?

$$\frac{x^2-ax+5}{x-2} = b$$

$$x^2-ax+5 = b(x-2)$$

$$x^2+ax+5 = x-3$$

$$x^2+ax = x-8$$

$$x^2+ax+x-8=0$$

$$x^2+2ax-8=0$$

$$+4-2$$

$$2ax = -4$$

$$a = -4/2$$

$$a = 2$$

ikinci dereceden ayırma yapılar ondan sonra sonuç çıkarılır.

Şekil 20. Ö8 kodlu öğrencinin cevabı

Yukardaki şekilde Ö8 kodlu mühendislik fakültesi öğrencisi, ikinci dereceden denklemi çarpanlarına ayırmaya çalışmış fakat yanlış sonuca ulaşmıştır.

Mühendislik fakültesi öğrencilerinden, araştırmanın 2. sorusunu boş bırakan 1 öğrenci belirlenmiştir.

Tablo 8. Mühendislik fakültesi öğrencilerinin araştırmanın 3. sorusunun I kısmına verdikleri doğru ve yanlış cevapların frekans ve yüzdeleri

3.soru I. Kısım	Verilen Cevap Kodu	Doğru ve Yanlış Cevap Veren Öğrenciler	f	%
Limit değerinin her zaman fonksiyon değerine eşit olmadığını biliyor (doğru)	√ İşareti Koyan Önermeyi Doğru Kabul Edenler (Cevabı Doğru Olanlar)	Ö31, Ö2, Ö20, Ö29, Ö44, Ö5, Ö8, Ö18, Ö46, Ö48, Ö27, Ö43, Ö21, Ö16, Ö45, Ö3, Ö28, Ö9, Ö25, Ö4, Ö19,	21	42
Limit değeri ile fonksiyon değerinin her zaman aynı olması gerektiğini sanıyor (yanlış)	× İşareti Koyan Önermeyi Doğru Kabul Edenler (Cevabı Yanlış Olanlar)	Ö1, Ö15, Ö49, Ö11, Ö32, Ö24, Ö13, Ö33, Ö39, Ö40, Ö35, Ö50, Ö6, Ö37, Ö47, Ö26, Ö22, Ö38, Ö10, Ö7, Ö17, Ö36, Ö14, Ö41, 23, 34, 42, 30, 12,	29	48

Araştırmanın üçüncü sorusu olan “ $L$  bir gerçel sayı olmak üzere, gerçel sayıların kümesi üzerinde tanımlı  $f$  ve  $g$  fonksiyonları için  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = L$  eşitliği sağlamıyor. Buna

göre, I –  $f(2) = g(2)$

II –  $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) - g(x)) = 0$

III –  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

Seçeneklerden hangisi her zaman doğrudur? Açıklayınız.” sorusuna ait bulgular aşağıda sunulmuştur.

Mühendislik fakültesi öğrencilerinin, araştırmanın 3. sorusunun É kısmına verdikleri doğru ve yanlış cevapların öğrencilere göre dağılımları Tablo 8’de verilmiştir.

Tablo incelendiğinde öğrencilerin yarısından fazlasının 3. sorunun I. kısmını yanlış cevapladıkları görülmektedir. Öğrencilerin %42’si limit değerinin her zaman fonksiyon değerine eşit olmadığını bildiği, %48’inin limit değeri ile fonksiyon değerinin her zaman aynı olması gerektiğini sandığı belirlenmiştir.

Soruyla ilgili bazı öğrenci cevapları aşağıda sunulmuştur.

I. doğru değil sebebi fonksiyonun eşit olduğu değer limite eşit olmayabilir. X

Şekil 21. Ö31 kodlu öğrencinin cevabı

Yukardaki şekilde Ö31 kodlu mühendislik fakültesi öğrencisi soruya doğru cevap vermiştir. Verilen hipotezde limitlerin eşitliği verilmiştir. Limit değeri fonksiyon değerinden bağımsızdır ve eşit olmak zorunda değildir. Hatta fonksiyon o noktada tanımlı olmadığı halde bile limit mevcut olabilir. Bundan dolayı, hipotezdeki limitlerin eşitliği, fonksiyon değerlerinin 2 noktasında eşit olmasını gerektirmez. Öğrencinin cevabı doğrudur.

hangileri her zaman doğrudur, açıklayınız?  
I)  $f(2)$  ve  $g(2)$  nin fonksiyondaki değerlerini bilmiyoruz. sadece limit değeri validiğinde  $-f(2) = g(2)$  doğru

Şekil 22. Ö1 kodlu öğrencinin cevabı



Yukardaki şekilde Ö1 kodlu mühendislik fakültesi öğrencisi soruya yanlış cevap vermiştir. Bir önceki öğrencinin verdiği cevabın işlemesinde olduğu gibi limitlerin eşitliği, fonksiyon değerlerinin eşit olmasını gerektirmez. Bundan dolayı öğrencinin cevabı yanlıştır.

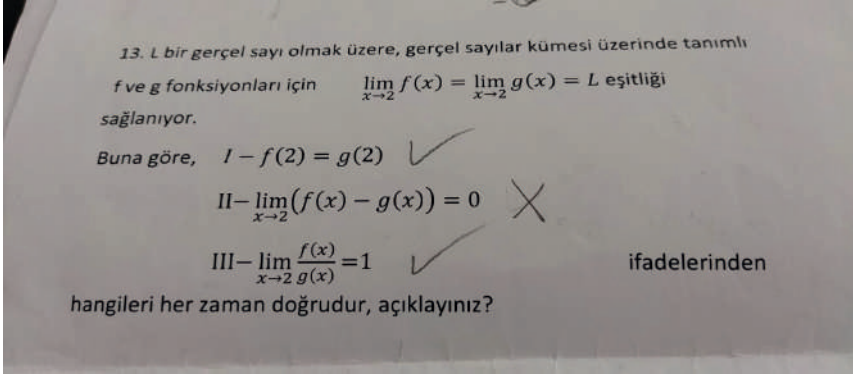
Mühendislik fakültesi öğrencilerinin, araştırmanın 3. Sorusunun II. kısmına verdikleri doğru ve yanlış cevapların öğrencilere göre dağılımları Tablo 9'da verilmiştir.

*Tablo 9. Mühendislik fakültesi öğrencilerinin araştırmanın 3. sorusunun II. kısmına verdikleri doğru ve yanlış cevapların frekans ve yüzdeleri*

3.soru II. Kısım	Verilen Cevap Kodu	Doğru ve Yanlış Cevap Veren Öğrenciler	f	%
$\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) - g(x)) = 0$ , her $L \in \mathbb{R}$ için doğru	$\times$ İşareti Koyan Önermeyi Doğru Kabul Edenler (Cevabı Yanlış Olanlar)	Ö16, Ö25, Ö8, Ö13, Ö39, Ö28, Ö35, Ö50, Ö26, Ö38, Ö7, Ö14, Ö41, Ö49, Ö34, Ö19, Ö32, Ö24, Ö33, Ö5, Ö18, Ö30	22	44
	$\sqrt{\quad}$ İşareti Koyan Önermeyi (Doğru Kabul Edenler) (Cevabı Doğru Olanlar)	Ö31, Ö12, Ö40, Ö23, Ö37, Ö1, Ö2, Ö46, Ö15, Ö4, Ö48, Ö27, Ö43, Ö45, Ö3, Ö9, Ö6, Ö47, Ö22, Ö10, Ö17, Ö36, Ö42, Ö29, Ö11, Ö44, Ö21, Ö20	28	56

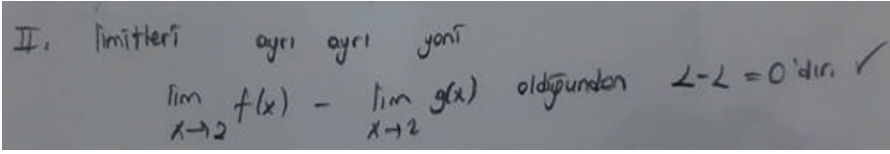
Tablo incelendiğinde öğrencilerin yarısından fazlasının 3. sorunun II. kısmını doğru cevapladıkları görülmektedir.

Soruyla ilgili bazı öğrenci cevapları aşağıda sunulmuştur.



Şekil 23. Ö7 kodlu öğrencinin cevabı

Yukardaki şekilde Ö7 kodlu mühendislik fakültesi öğrencisi, soruya yanlış cevap vermiştir.



Şekil 24. Ö31 kodlu öğrencinin cevabı

Yukardaki şekilde Ö31 kodlu mühendislik fakültesi öğrencisi, soruya doğru cevap vermiştir. Hipotezde limitin var olduğu belirtildiğinden, II. önerme her zaman geçerlidir. Bu durumda öğrencinin cevabı doğrudur.

Mühendislik fakültesi öğrencilerinin, araştırmanın 3. Sorusunun 0 . kısmına verdikleri doğru ve yanlış cevapların öğrencilere göre dağılımları Tablo 10'da verilmiştir.

Tablo 10. Mühendislik fakültesi öğrencilerinin araştırmanın 3. Sorusunun III. kısmına verdikleri doğru ve yanlış cevapların frekans ve yüzdeleri.

3. Soru III. Kısım	Verilen Cevap Kodları	Doğru ve Yanlış Cevap Veren Öğrenciler	f	%
$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$	√ İşareti Koyan Önermeyi Doğru Kabul Edenler  (Cevabı Doğru Olanlar)	Ö2, Ö19, Ö42, Ö25, Ö9, Ö28, Ö3, Ö32, Ö24, Ö13, Ö44, Ö15	12	24
	Yanlış Kabul Edenler  (Cevabı Yanlış Olanlar)	Ö12, Ö35, Ö5, Ö31, Ö46, Ö1, Ö37, Ö23, Ö8, Ö30, Ö34, Ö49, Ö41, Ö14, Ö36, Ö17, Ö7, Ö10, Ö38, Ö22, Ö26, Ö47, Ö6, Ö50, Ö45, Ö43, Ö27, Ö4, Ö33, Ö39, Ö18, Ö16, Ö40, Ö20, Ö29, Ö48, Ö11, Ö21	38	76

Tablo incelendiğinde öğrencilerin neredeyse tamamına yakını 3. sorunun II. kısmını yanlış cevapladıkları görülmektedir. Mühendislik fakültesi öğrencileri;

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

$L \neq 0$  ise her zaman doğru

$L = 0$  ise doğru olmayabilir

$L = 0$  da  $\frac{0}{0}$  belirsizliği oluştuğunu görememişlerdir.

## 5. Tartışma ve Sonuç

Türev kavramının bir bileşeni olan limit kavramını anlamak son derece önemlidir. Mühendislik fakültesi öğrencilerine Genel Matematik I dersi çerçevesinde verilen limit kavramının mühendis adayları tarafından en genel

haliyle anlaşılma durumunu belirlemek amacı ile yapılan bu çalışmanın bulgularına göre mühendis adaylarının büyük bir kısmının limit kavramına dair yanlış birikimler edindiği belirlenmiştir. Sorular yazılı şekilde olup çoktan seçmeli olmadığından şans faktörünün neredeyse hiç etki etmediği söylenebilir. Sonuçlar Mühendis adaylarının tanımı ezberlemenin yanı sıra tanım üzerinde yapılan işlemleri de ezberlediklerini göstermiştir. Bu sonuç farklı çalışmalar ile de paralellik içindedir (Barak, 2007). Mühendislik fakültesi öğrencilerinin sağ ve sol limit kavramlarının sezgisel olarak ne anlama geldiğini anlayabildikleri; ancak bazı öğrencilerin bu kavramlar hakkında kavram yanlışlarına sahip oldukları belirlenmiştir. Benzer şekilde Baki ve Çekmez (2012) çalışmalarında limit kavramının öğrenciler tarafından ezberlendiğini belirtmişlerdir. Mühendislik fakültesi öğrencileri limit ve türev arasındaki ilişkiyi, “türev bir limittir” şeklinde ifade etmektedirler ve soruların çözümünde bu ilişkiyi derinlemesine inceleyemedikleri görülmektedir. Limit ve sürekliliğin en temel anlayışı, fonksiyonun o noktada tanımlanmış olması ve limit değerinin fonksiyonun görüntüsüne eşit olması koşuluyla, fonksiyonun o anda tanımlanması gerekmeksizin bir noktada limitinin olabileceğidir. Öğretmen adayları ile yapılan çalışmalarda da limit ve süreklilik kavramlarına ilişkin öğretmen adaylarının da çeşitli hatalı düşüncelere sahip olabildikleri görülmektedir. Bir fonksiyonun limiti olduğu yerde tanımlı ve sürekli olması gerektiği fikrine ilişkin bulgulardan biri, öğretmen adaylarının limitin alındığı yerde fonksiyonun sürekli olması ve belirtilmesi gerektiğine inandıkları şeklindedir (Baştürk, & Dönmez, 2011). Ayrıca çalışma; süreklilik ve limit arasındaki ilişkilerin tam olarak kurulamadığını ve öğrencilerin bu konuda yanlış fikirlere sahip olduklarını göstermiştir. Limit ve süreklilik fikirleri ile türev kavramı arasındaki ilişki genellikle tanımlar düzeyinde anlaşılmalıdır. Ancak, bu tanımların detayları tam olarak anlayamamıştır. Mühendislik fakültesi öğrencileri, kavramlar arasındaki ilişkileri doğru bir şekilde belirleyemedikleri için limit konusunu anlamakta zorlanmışlardır.

Sonuç olarak; mühendislik öğrencilerinin limit kavramlarını anlamakta ve ilişkilendirmekte zorlandıkları tespit edilmiştir.

Mühendis adaylarının karşılaştıkları bazı zorluklar ve yaptıkları hatalar:

1. Öğrencilerin, kavramların tanımları veya ayrıntıları hakkında yetersiz bilgiye sahip olması
2. Ezber yöntemiyle öğrenilen bilgilerin yönetimi
3. Belirli kavramların birbiriyle olan ilişkilerinin yanlış anlaşılması

4. Limit kavramlarının mühendislik fakültesi öğrencileri tarafından yetersiz anlaşılması
5. Mühendislik fakültesi öğrencilerin kavramsal anlama yerine, işlemsel anlamaya yönelmesi
6. Öğrencilerin soruyu çözerken hangi küme üzerinde işlem yaptığına dikkat etmediği şeklindedir.

Yanılgılar ve eksiklikler ile ilgili bu tür araştırmalar, ileri matematiğin bütün konularında ve daha geniş öğrenci kitlesi üzerinde yapılabilir. Çalışmaya, öğrencilerin kısa süre içerisinde hızlı bir şekilde yanıtlayamayacakları, yorumlama ve düşünme yeteneği gerektiren sorular dâhil edilmiştir. Çalışma sonuçları, öğrencilerin hatırlama basamağı hakkında bazı bilgilere sahip olduğunu göstermektedir. Ancak, eksik ve yanlış bilgilerin tamamlanıp düzeltilmesi gerektiği düşüncesini de desteklemektedir.

## Kaynakça

- Alkan, S., & Güven, B., “Ders kitaplarında kullanılan örnek türlerinin analizi: Limit konusu”, *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT)*, 9(1), 147-169 (2018).
- Altun, I., “The perceived problem solving ability and values of student nurses and midwives”, *Nurse education today*, 23(8), 575-584 (2003).
- Baki, M., & Çekmez, E., “İlköğretim matematik öğretmenleri adaylarının limit kavramının formal tanımına yönelik anlamalarının incelenmesi”, *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT)*, 3(2), 81-98 (2012).
- Barak, B., “Limit konusundaki kavram yanlışlarının belirlenmesi”, (*Master's thesis, Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*) (2007).
- Basturk, S., Baştürk, S., & Dönmez, G., “Matematik öğretmen adaylarının limit ve süreklilik konusuyla ilgili kavram yanlışları”, *Necati Bey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 5(1), 225-249 (2011).
- Bingolbali, E., & Monaghan, J., “Cognition and institutional setting”, *In New directions for situated cognition in mathematics education Springer*, Boston, MA. (pp. 233-259) (2008).
- Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K., “Research methods in education”, (*Sixth*). *Oxon: Routledge*. (2007).
- Cornu, B. “Limits”, In Tall, D. (Ed.) *Advanced mathematical thinking* (pp.153-166). **Boston: Kluwer** (1991).
- Karadüz, A., “Türkçe öğretmenlerinin ölçme ve değerlendirme uygulamalarının “yapılandırmacı öğrenme kavramı bağlamında eleştirisi”, *Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 22(1), 189-210 (2009).
- Pape, S. J., Bell, C. V., & Yetkin, İ. E., “Developing mathematical thinking and self-regulated learning: A teaching experiment in a seventh-grade mathematics classroom”, *Educational Studies in Mathematics*, 53(3), 179-202 (2003).
- Suraweera, F. (2002). Enhancing the quality of learning and understanding of first-year mathematics for computer science related majors. *ACM SIGCSE Bulletin*, 34(4), 117-120.
- Tall, D., & Razali, M. R., “Diagnosing students' difficulties in learning mathematics”, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 24(2), 209-222 (1993).
- Turan, S. B., “Matematik öğretmen adaylarının limit, süreklilik ve türev ile ilgili kavramsal yapıları”, (*Master's thesis, Necmettin Erbakan Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü*) (2016).

- Ünver, S. K., Çelik, A. Ö., & Guzel, E. B., “Öğrenci Hata ve Yanılgıları ile Başa Çıkma Yolları: Limit Örneği”, *Batı Anadolu Eğitim Bilimleri Dergisi*, 11(2), 528-551 (2020).
- Yitmez, B. G., Yılmaz, S., & Dinçer, B., “İlköğretim Matematik Öğretmenliği Lisans Öğrencilerinin Çok Değişkenli Fonksiyonların Limiti ve Sürekliliği Konusundaki Kavram Yanılgılarının İncelenmesi”, *Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi Dergisi*, (53), 611-637 (2022).

# Optimality Conditions of a Hyperbolic Beam Equation based on Mindlin's Gradient Elasticity Theory

Kenan Yildirim<sup>1</sup>

## Abstract

In this study, optimality conditions of a beam model based on Mindlin's gradient elasticity theory is studied. The beam system depends on the external excitation function, non-homogeneous boundary conditions and some mixed integral constraints including inequality/equality on the control function and state variable. Before obtaining the optimality conditions of the system, energy integral method is employed for proving the uniqueness of the solution of the beam system. Controllability properties of the system is also discussed. Adjoint system corresponding to beam system is derived with suitable terminal conditions for achieving the maximum principle. *The beauty of the present paper is that the necessary and sufficient optimality conditions of a hyperbolic beam equation based on Mindlin's gradient elasticity theory are firstly derived in this paper in the form of a maximum principle.* In order to show the confirmation of the obtained theoretical results, a real mechanical problem is illustrated and results are presented in the table and graphical forms.

## 1 Introduction

The contributions of classical continuum theories, including nonlinear or linear plasticity and elasticity, to science and engineering to improve the human life quality by modeling solid and structures are deniable. These continuum theories which are also named Euler-Bernoulli or Timoshenko models were introduced in 1750s for explaining the conservation laws of solid and structures in macro-scales. After 1920s, especially later than detailed usage of advanced optical and electron microscopes, the dimensions of structures and systems in engineering and material science are scaled down to micro and nano-domains. The elasticity properties and characteristic behaviors of materials in the micro-nano domains was also tried to explained by means of classical continuum models at the beginning. But observations made by advanced electron and optical microscopes show that classical continuum theories are not able to explain the characteristic behaviors and elasticity properties of micro or nano-scaled solid and structures due to lack of an internal length scale parameters, characteristic of the underlying nano or micro structured materials, from the constitutive equations. In order to overcome this difficulties, several studies and theories are introduced in the papers [1]-[11]. In [8], Mindlin introduced and developed gradient elasticity theory which is comprehension of linear elasticity theory which contains higher-order terms to taking into account for structural effects in micro-size or couple stress effects in materials. Mindlin improved his theory by including new terms in the expressions of potential and kinetic energy and introducing intrinsic micro-structural parameter without however providing explicit expressions that correlate micro-structure with macro-structure [13]. According to Mindlin's this theory, the energy in the strain is subject to the elastic strain and gradients of the elastic strain. Due to these gradients, constitutive equations includes additional coefficients with the dimension of

---

<sup>1</sup> Mus Alparslan University, Mus, Turkey. E-mail:k.yildirim@alparslan.edu.tr



a length which are called gradient coefficients. For sake, see, [1]-[13]. Since then, many researchers studying strain gradient elastic theories, reproduced either from lattice models or homogenization approaches, have presented in the literature. Although gracious, none of them derives as a whole the equation of motion as well as the on-classical or classical boundary conditions seeming in Mindlin theory, in terms of the taken into account lattice or continuum unit cell. Moreover, no continuum or lattice models that affirm the second gradient elastic theory of Mindlin presented in the literature. In [13], authors introduce a model equation of motion, appearing in Mindlin theory, confirming the Mindlin second gradient elastic theory. On the other hand, in order to determine the necessary and sufficient optimality conditions for these kind vibrating systems, Maximum principle is introduced by L. S. Pontryagin 1960s as a necessary condition for optimal control problems representing in way of ordinary differential equations[14]. In [15], Egorov also shows that maximum principle is also necessary requirement for some class optimal control problems modeled by partial differential equations. In [16, 17], Barnes and Lee proved that maximum principle is sufficient requirement for control problems under some convexity assumptions on the constraints functions. Russell and Komkov studied for obtaining the necessary and sufficient conditions of similar vibrating systems including quadratic cost functionals[18, 19].In [20], Active control of an improved Boussinesq system is achieved via maximum principle. In [21], Necessary and sufficient conditions for a vibrating Euler-Bernoulli beam system, including control functions more than one, is achieved in the form of maximum principle. In [22], necessary and sufficient conditions of a distributed parameter system is derived. The original contribution of the present paper to literature is that the necessary and sufficient optimality conditions of a beam system, satisfying Mindlin gradient elasticity theory, is firstly derived in the form of maximum principle in this paper.

Specifically, in the light of [21] and [22] in present study, necessary and sufficient optimality conditions of a beam model satisfying Mindlin's gradient elasticity theory is studied. The beam system under consideration depends on the external excitation function caused to undesirable vibration in the system, non-homogeneous boundary conditions showing thermal or magnetically effects and some mixed integral constraints including inequality/equality on the control function and state variable. Before obtaining the optimality conditions of the system, by employing the energy integral method, the uniqueness of the solution to the beam system is proved. Controllability properties of the system is also discussed via observability. Adjoint system corresponding to beam system is introduced with suitable terminal conditions for achieving the maximum principle. In order to indicate the confirmation of the obtained theoretical results, a numerical example is given and results are presented in the table and graphical forms. By observing the table and graphics, it is that introduced conditions in the form of maximum principle are necessary and sufficient for optimality. Consider the following beam system defined in [13];

$$\frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} + \frac{\ell^2}{12} \frac{\partial^4 \nu}{\partial x^4} + \frac{\ell^4}{36} \frac{\partial^6 \nu}{\partial x^6} = \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial^2 \nu}{\partial t^2} - \frac{\ell^2}{3} \frac{\rho'}{\rho} \frac{\partial^4 \nu}{\partial t^2 \partial x^2} \right) + f(t, x) + \mathcal{C}(t, x) \tag{1}$$

where  $\nu(t, x)$  is the transversal displacement at  $(t, x) \in \Omega = \{(t, x) : t \in [0, t_f], x \in [0, \ell]\}$ ,  $x$  is space variable,  $\ell$  is the length of the beam,  $t$  is time variable,  $t_f$  is the final time of control duration,  $c^2 = \frac{E}{\rho}$  in which  $\rho$  is mass density of the beam and  $E$  is modulus elasticity,  $\rho' \equiv \rho$  is the the density of the micro-structural cells,  $f$  is external excitation function,  $\mathcal{C}(t, x)$  is control function,  $\mathcal{C}(t, x) = C(t, x)$  or generally  $\mathcal{C}(t, x) = C(t)D(x)$  in which  $C(t)$  is the control force function and  $D(t)$  is a function presenting the distribution of the control force,  $\mathcal{C}(t, x) \in \mathfrak{C}_{ad}$  in which  $\mathfrak{C}_{ad}$  is the set of admissible control functions and defined by  $\mathfrak{C}_{ad} = \{\mathcal{C}(t, x) | \mathcal{C}(t, x) \in L^2(\Omega), \quad |\mathcal{C}(t, x)| \leq m < \infty\}$ ,  $m$  is a constant. Eq. (1) is subject to the following initial conditions

$$\nu(0, x) = \nu_0(x), \quad \frac{\partial \nu}{\partial t}(0, x) = \nu_1(x), \tag{2}$$

in which  $\nu_0(x) \in H^1(0, \ell)$ ,  $H^1(0, \ell) = \{u_0(x) \in L^2(0, \ell) : \frac{\partial u_0(x)}{\partial x} \in L^2(0, \ell)\}$ ,  $\nu_1(x) \in L^2(0, \ell)$ ,

and  $L^2(\Omega)$  presents the Hilbert space of real-valued square-integrable functions defined in the domain  $\Omega$  with following inner product and norm given in the sense of Lebesque;

$$\| \phi \|^2 = \langle \phi, \phi \rangle, \quad \langle \phi, \varphi \rangle = \int_{\Omega} \phi \varphi d\Omega.$$

Eq.(1) is subject to following non-homogeneous boundary conditions

$$\nu(t, 0) = \zeta_1(t), \quad \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2}(t, 0) = \zeta_2(t), \quad \frac{\partial^4 \nu}{\partial x^4}(t, 0) = \zeta_3(t), \quad \nu(t, \ell) = \zeta_4(t), \quad \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2}(t, \ell) = \zeta_5(t), \quad \frac{\partial^4 \nu}{\partial x^4}(t, \ell) = \zeta_6(t), \tag{3}$$

or

$$\frac{\partial \nu}{\partial x}(t, 0) = \xi_1(t), \quad \frac{\partial^3 \nu}{\partial x^3}(t, 0) = \xi_2(t), \quad \frac{\partial^5 \nu}{\partial x^5}(t, 0) = \xi_3(t), \quad \frac{\partial \nu}{\partial x}(t, \ell) = \xi_4(t), \quad \frac{\partial^3 \nu}{\partial x^3}(t, \ell) = \xi_5(t), \quad \frac{\partial^5 \nu}{\partial x^5}(t, \ell) = \xi_6(t). \tag{4}$$

Let us make the following assumptions on the system;

(A1)  $\frac{\partial^i \nu}{\partial t^i}, \frac{\partial^j \nu}{\partial x^j}, \frac{\partial^{m+n} \nu}{\partial x^m \partial t^n} \in L^2(\bar{\Omega}), \quad \bar{\Omega}$  is closure of  $\Omega, \quad i = 0, 1, 2 \quad j = 0, 1, \dots, 6, \quad m, n = 0, 1, 2,$

(A2)  $\zeta_i(t), \xi_i(t) \in L^2(\Omega), \quad i = 1, \dots, 6.$

Then, the system addressed by Eqs.(1)-(4) has a solution[27].

**Lemma 1.** *The system called by Eqs.(1) -(4) has a unique solution.*

*Proof.* Let us that  $\nu_1$  and  $\nu_2$  are two solutions to the system under the same conditions. Then the difference  $u = \nu_1 - \nu_2$  satisfies the following homogeneous initial conditions

$$u(x, t) = 0, \quad u_t(x, t) = 0 \quad \text{at} \quad t = 0 \tag{5}$$

and boundary conditions

$$u(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t, 0) = 0, \quad u(t, \ell) = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, \ell) = 0, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t, \ell) = 0, \tag{6a}$$

or

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial^5 u}{\partial x^5}(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t, \ell) = 0, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t, \ell) = 0, \quad \frac{\partial^5 u}{\partial x^5}(t, \ell) = 0, \tag{6b}$$

and equation of motion becomes as follows;

$$u_{xx} + \frac{\ell^2}{12} u_{xxxx} + \frac{\ell^4}{36} u_{xxxxxx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} + \frac{1}{c^2} \frac{\ell^2}{3} \frac{\rho'}{\rho} u_{ttt} = 0 \tag{7}$$

Let us show that  $u$  is identically equal to zero. Then, introduce the following energy integral;

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^\ell \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u^2) + \frac{\ell^2}{12} \frac{\partial^4}{\partial x^4}(u^2) + \frac{\ell^4}{36} \frac{\partial^6}{\partial x^6}(u^2) - \frac{1}{c^2}(u_t^2) + \frac{1}{c^2} \frac{\ell^2}{3} \frac{\rho'}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_t^2) \right\} dx \tag{8}$$

and show that  $E(t)$  is independent of  $t$ . Differentiating  $E(t)$  with respect to  $t$ , it is easy to see following equality;

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_0^\ell \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2}(uu_t) + \frac{\ell^2}{12} \frac{\partial^4}{\partial x^4}(uu_t) + \frac{\ell^4}{36} \frac{\partial^6}{\partial x^6}(uu_t) - \frac{1}{c^2}(u_t u_{tt}) + \frac{1}{c^2} \frac{\ell^2}{3} \frac{\rho'}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_t u_{tt}) \right\} dx \tag{9}$$

Integrating by parts and using boundary conditions indicated by Eq.(6), Eq.(9) becomes

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_0^\ell \left\{ u_{xx} + \frac{\ell^2}{12} u_{xxxx} + \frac{\ell^4}{36} u_{xxxxxx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} + \frac{1}{c^2} \frac{\ell^2}{3} \frac{\rho'}{\rho} u_{ttt} \right\} u_t dx. \tag{10}$$

Due to Eq.(7), following equality is observed

$$\frac{dE(t)}{dt} = 0, \quad \text{that is} \quad E(t) = \text{constant}.$$

Regarding the conditions defined by Eq.(5), one obtains;

$$E(0) = \frac{1}{2} \int_0^\ell \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u^2) + \frac{\ell^2}{12} \frac{\partial^4}{\partial x^4}(u^2) + \frac{\ell^4}{36} \frac{\partial^6}{\partial x^6}(u^2) - \frac{1}{c^2}(u_t^2) + \frac{1}{c^2} \frac{\ell^2}{3} \frac{\rho'}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u_t^2) \right\} \Big|_{t=0} dx = 0.$$

Hence, it becomes obviously that  $u(x, t)$  is zero, identically and  $u = \nu_1 - \nu_2 = 0 \Rightarrow \nu_1 = \nu_2$ . Namely, the system under consideration has a unique solution. □

By considering Lemma 1, it is concluded that for saving the uniqueness of the solution  $\nu(x, t)$ , corresponding control function  $C(t, x)$  has to be unique. In this case, it is said that the system under consideration has a unique solution  $\nu(x, t)$  and a unique control function  $C(t, x)$ . Then, system introduced Eqs.(1)-(4) is referred as observable. Hilbert Uniqueness method indicates that observable is equivalent to controllable. As a conclusion, Eqs.(1)-(4) is controllable [25, 26].

## 2 Optimal Control Problem

The main goal of the optimal control problem is to determine optimal control function  $C^\circ(t, x) \in \mathfrak{C}_{ad}$  minimizing the performance index functional at a given terminal time  $t_f$ . The performance index functional of the system, is consisted of a sum of modified energy of the beam and control effort used up in control duration, introduced as follows;

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_0(f(t, x)) = & \int_0^\ell [\mathcal{G}_1(x, \nu(t_f, x)) + \mathcal{G}_2(x, \nu_t(t_f, x))] dx \\ & + \int_0^{t_f} \int_0^\ell \mathcal{G}_0(t, x, \nu(t, x), C(t, x)) dt dx. \end{aligned} \tag{11}$$

Admissible control function  $C(t, x)$  subject to the Eqs.(1)-(2) and the following constraints

$$\int_0^\ell h_2(x, \nu_t(t_f, x)) dx + \int_0^{t_f} \int_0^\ell \mathcal{G}_{-2}(t, x, \nu(t, x), C(t, x)) dt dx = c_{-2}, \tag{12a}$$

$$\int_0^\ell h_1(x, \nu(t_f, x)) dx + \int_0^{t_f} \int_0^\ell \mathcal{G}_{-1}(t, x, \nu(t, x), C(t, x)) dx dt = c_{-1}, \tag{12b}$$

$$\int_0^{t_f} \int_0^\ell \mathcal{G}_i(t, x, \nu(t, x), C(t, x)) dx dt \leq c_i, \quad 1 \leq i \leq m, \tag{12c}$$

$$\int_0^{t_f} \int_0^\ell \mathcal{G}_i(t, x, \nu(t, x), C(t, x)) dx dt = c_i, \quad m < i \leq M \tag{12d}$$

in which, for  $i = -2, -1, 1, \dots, M, h_1, h_2, \mathcal{G}_0, \mathcal{G}_i$  are continuous functions of their all parameters. Also,  $h_1, \mathcal{G}_0, \mathcal{G}_i$  for  $i = -2, -1, 1, \dots, M$  are the functions having continuous derivation respect to  $\nu$ . Also,  $h_2, \mathcal{G}_2$  are functions having continuous derivation respect to  $\nu_t$ . Suppose that  $C^\circ(t, x)$  is optimal control function with corresponding to optimal displacement  $\nu^\circ$ . By assuming  $(t_1, x_1), \dots, (t_P, x_P)$  are  $P$  arbitrary points in the open region  $\Omega$  and  $\mathcal{C}_j(t, x), j = 1, \dots, P$  are  $P$  arbitrary subfunctions of admissible control function  $C \in \mathfrak{C}_{ad}$ . Also, let us assume that  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_P$ . Let  $\varsigma > 0$  be for  $x_i + P\varsigma < x_j$  if  $x_i < x_j, x_P + P\varsigma < \ell$  and  $t_i + \varsigma < t_f$  for each  $0 \leq i \leq P$ . Let  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_P$  be real parameters satisfying  $0 \leq \varepsilon_j \leq \varsigma^2$ . Let  $X_1 = x_1$  and  $X_j = x_j + \sqrt{\varepsilon_1} + \dots + \sqrt{\varepsilon_{j-1}}$  be for  $1 < j \leq P$ . Hence, the intervals  $X_j \leq x \leq X_j + \sqrt{\varepsilon_j}$  and the rectangles  $R_j : [t_j, t_j + \sqrt{\varepsilon_j}] \times [X_j, X_j + \sqrt{\varepsilon_j}]$  do not have any intersection for  $1 \leq j \leq P$ , respectively.  $\varepsilon$  denotes the vector  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_P) \in \mathbb{R}^P, \mathbb{R}^P$  is a space in the manner of  $P$ - dimensional Euclidean, and  $\varepsilon = |\varepsilon| = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_P$ . Control  $C_\varepsilon(t, x) \in \tilde{\Omega}$  is defined by

$$C_\varepsilon(t, x) = \begin{cases} C^\circ(t, x) & \text{if } (t, x) \notin \bigcup_{j=1}^P R_j, \\ C(t, x) & \text{if } (t, x) \in R_j, \quad j = 1, \dots, P \end{cases} \tag{13}$$

## 3 Adjoint System and Optimality Conditions

Necessary requirement for optimality is obtained by means of maximum principle. Assuming by some convexity conditions on the constraints, maximum principle seems sufficient requirement for optimality. In order to constructing the maximum principle, an adjoint variable  $v(t, x) \in \Omega^*$ , in which  $\Omega^*$  is the dual to  $\Omega$  having same

norm and inner product like in  $\Omega$ , along the adjoint operator is defined. The  $v(t, x)$  satisfies the following adjoint equation;

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\ell^2}{12} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{\ell^4}{36} \frac{\partial^6 v}{\partial x^6} = \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\ell^2}{3} \frac{\rho'}{\rho} \frac{\partial^4 v}{\partial t^2 \partial x^2} \right) + \sum_{i=-2}^M \lambda_i \frac{\partial \mathcal{G}_i}{\partial \nu}(t, x, \nu^\circ, \mathcal{C}^\circ(t, x)), \quad (14)$$

where  $\lambda_i \leq 0$  and Eq.(14) is subject to the following homogeneous boundary conditions

$$v(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial^4 v}{\partial x^4}(t, 0) = 0, \quad v(t, \ell) = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, \ell) = 0, \quad \frac{\partial^4 v}{\partial x^4}(t, \ell) = 0, \quad (15a)$$

$$\text{or}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial^5 v}{\partial x^5}(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(t, \ell) = 0, \quad \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(t, \ell) = 0, \quad \frac{\partial^5 v}{\partial x^5}(t, \ell) = 0, \quad (15b)$$

and the terminal conditions

$$\frac{1}{c^2} \frac{\ell^2}{3} \frac{\rho'}{\rho} v_{txx}(t, x) - \frac{1}{c^2} v_t(t, x) = \lambda_{-1} \frac{\partial h_1}{\partial \nu}(x, \nu(t, x)) + \lambda_0 \frac{\partial \mathcal{G}_1}{\partial \nu}(x, \nu(t, x)) \quad \text{at } t = t_f \quad (16a)$$

$$v(t, x) = -\lambda_0 \frac{\partial \mathcal{G}_2}{\partial \nu_t}(x, \nu_t(t, x)) - \lambda_{-2} \frac{\partial h_2}{\partial \nu_t}(x, \nu_t(t, x)) \quad \text{at } t = t_f. \quad (16b)$$

Existence and uniqueness of the solution corresponding to Eqs.(14)-(16) can be shown similarly to Eqs.(1)-(4).

**Lemma 2.** Let  $v$  and  $\Delta \nu(t, x) = \nu(t, x) - \nu^\circ(t, x)$  be two functions which are defined in  $L^2(\Omega)$ . Also, let us assume that  $v$  and  $\Delta \nu(t, x)$  satisfy Eqs.(14)-(16) and Eqs.(1)-(4), respectively. Then,

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_f} \int_0^\ell \left\{ v \left[ \frac{\partial^2 \Delta \nu}{\partial x^2} + \frac{\ell^2}{12} \frac{\partial^4 \Delta \nu}{\partial x^4} + \frac{\ell^4}{36} \frac{\partial^6 \Delta \nu}{\partial x^6} - \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial^2 \Delta \nu}{\partial t^2} - \frac{\ell^2}{3} \frac{\rho'}{\rho} \frac{\partial^4 \Delta \nu}{\partial t^2 \partial x^2} \right) \right] \right. \\ & \quad \left. - \Delta \nu \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\ell^2}{12} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{\ell^4}{36} \frac{\partial^6 v}{\partial x^6} - \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\ell^2}{3} \frac{\rho'}{\rho} \frac{\partial^4 v}{\partial t^2 \partial x^2} \right) \right] \right\} dx dt \\ & = \int_0^\ell \left\{ v(t_f, x) \frac{\ell^2}{3} \frac{\rho'}{\rho} \frac{1}{c^2} \Delta \nu_{txx}(t_f, x) - v_t(t_f, x) \frac{\ell^2}{3} \frac{\rho'}{\rho} \frac{1}{c^2} \Delta \nu_{xx}(t_f, x) - \frac{1}{c^2} \Delta \nu_t(t_f, x) v(t_f, x) + \frac{1}{c^2} v_t(t_f, x) \Delta \nu(t_f, x) \right\} dx \quad (17) \end{aligned}$$

*Proof.* After applying the integration by parts to Eq.(17), it is easy to see the conclusion of lemma 2.  $\square$

**Definition 1.**  $v$  is the solution of the system Eqs.(14)-(16) for the arbitrary constants  $\lambda_{-2}, \lambda_{-1}, \lambda_0, \dots, \lambda_M$ . Let  $\nu^\circ$  and  $\nu$  be the response functions corresponding to optimal control functions  $\mathcal{C}^\circ \in \mathfrak{C}_{ad}$ , and for a fixed  $\mathcal{C} \in \mathfrak{C}_{ad}$ ,  $u$  be the any one of the following functions:

$$u(t, x) = \mathcal{G}_i(t, x, \nu, \mathcal{C}(t, x)),$$

$$u(t, x) = \mathcal{G}_i(t, x, \nu^\circ, \mathcal{C}^\circ(t, x)),$$

$$u(t, x) = v \mathcal{C}^\circ, \quad \mathcal{C}^\circ \in \mathfrak{C}_{ad},$$

$$u(t, x) = v \mathcal{C}, \quad \mathcal{C} \in \mathfrak{C}_{ad} \text{ is fixed} \quad .$$

A point  $(\bar{t}, \bar{x})$  is named regular point for  $\mathcal{C} \in \mathfrak{C}_{ad}$  if it meets the following equality for any sufficiently small  $\varepsilon > 0$

$$\int_{\bar{t}}^{\bar{t} + \sqrt{\varepsilon}} \int_{\bar{x}}^{\bar{x} + \sqrt{\varepsilon}} u(t, x) dx dt = \varepsilon u(\bar{t}, \bar{x}) + o(\varepsilon).$$

By considering [23], it is reveals that all points of  $[0, t_f] \times [0, \ell]$  are regular for each  $\mathcal{C} \in \mathfrak{C}_{ad}$ .

Let  $\mathcal{J}$  and  $Z$  indicate the vector valued functional  $(\mathcal{J}_{-2}, \mathcal{J}_{-1}, \mathcal{J}_0, \dots, \mathcal{J}_M)$  and the set

$$Z = \{ \mathcal{J}(\mathcal{C}) : \mathcal{C} \in \mathfrak{C}_{ad} \} \subset \mathbb{R}^{M+3}.$$

**Definition 2.** If a surface exists in the following form

$$\mathcal{J}_\varepsilon = \mathcal{J}(\mathcal{C}^\circ) + \sum_{j=1}^P d_j \varepsilon_j + o(\varepsilon)$$

in  $Z$  for sufficiently small  $\varepsilon_j$  and  $d_1, \dots, d_P$  is any finite collection of vectors from  $D$ , then set  $D$  is called as a derived set of the set  $Z$  at  $\mathcal{J}(\mathcal{C}^\circ)$  [24].

**Lemma 3.** Assume that the points  $(t_i, x_i)$  are regular points in  $\Omega$  for  $i = 1, 2, \dots, P$ . Let us introduce the  $\bar{\mathcal{J}}(\mathcal{C})$  for any  $\mathcal{C} \in \mathfrak{C}_{ad}$  as follows;

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{J}}(\mathcal{C}) = & \int_0^\ell \left\{ \lambda_0 [\mathcal{G}_1(x, \nu(t_f, x)) + \mathcal{G}_2(x, \nu_t(t_f, x))] \right. \\ & \left. + [\lambda_{-2} h_2(x, \nu_t(t_f, x)) + \lambda_{-1} h_1(x, \nu(t_f, x))] \right\} dx \\ & + \int_0^{t_f} \int_0^\ell \sum_{i=-2}^M [\lambda_i \mathcal{G}_i(t, x, \nu, \mathcal{C})] dt dx \end{aligned}$$

If  $P = 1$ , for  $\mathcal{C} \in \mathfrak{C}_{ad}$ , there exist constants  $\lambda_{-2}, \lambda_{-1}, \lambda_0, \dots, \lambda_M$  (not all zero) such that

$$\lambda_0 \leq 0, \quad \lambda_i \leq 0 \quad (0 \leq i \leq m), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\bar{\mathcal{J}}(\mathcal{C}_\varepsilon) - \bar{\mathcal{J}}(\mathcal{C}^\circ)}{\varepsilon} \leq 0$$

where  $\mathcal{C}^\circ$ 's and  $\mathcal{C}_\varepsilon$ 's are functions introduced in Eq.(13).

*Proof.* Define the functionals  $\mathcal{J}_{-2}, \mathcal{J}_{-1}, \mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_M$  on the class of admissible controls by

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{-2}(\mathcal{C}) &= \int_0^\ell h_2(x, \nu_t(t_f, x)) dx + \int_0^{t_f} \int_0^\ell G_{-2}(t, x, \nu, \mathcal{C}) dx dt, \\ \mathcal{J}_{-1}(\mathcal{C}) &= \int_0^\ell h_1(x, \nu_t(t_f, x)) dx + \int_0^{t_f} \int_0^\ell G_{-1}(t, x, \nu, \mathcal{C}) dx dt, \\ \mathcal{J}_i(\mathcal{C}) &= \int_0^{t_f} \int_0^\ell G_i(t, x, \nu, \mathcal{C}) dx dt, \quad i = 1, \dots, M. \end{aligned}$$

For employing Lagrange multipliers, we need to construct a derived set  $D$  for the set  $Z$  at  $\mathcal{J}(\mathcal{C}^\circ)$  [24]. Now let us define the functions  $v_j$  for  $j = -2, -1, 1, \dots, M$  which are supplying the following conditions:

$$\frac{\partial^2 v_j}{\partial x^2} + \frac{\ell^2}{12} \frac{\partial^4 v_j}{\partial x^4} + \frac{\ell^4}{36} \frac{\partial^6 v_j}{\partial x^6} = \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial^2 v_j}{\partial t^2} - \frac{\ell^2}{3} \frac{\rho'}{\rho} \frac{\partial^4 v_j}{\partial t^2 \partial x^2} \right) + \lambda_j \frac{\partial \mathcal{G}_j}{\partial \nu}(t, x, \nu^\circ, \mathcal{C}^\circ(t, x)) \quad (18)$$

where  $\lambda_i \leq 0$ ,  $0 \leq t \leq t_f$ ,  $0 \leq x \leq \ell$  and Eq.(18) is subject to the following boundary conditions

$$v_j(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 v_j}{\partial x^2}(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial^4 v_j}{\partial x^4}(t, 0) = 0, \quad v_j(t, \ell) = 0, \quad \frac{\partial^2 v_j}{\partial x^2}(t, \ell) = 0, \quad \frac{\partial^4 v_j}{\partial x^4}(t, \ell) = 0 \quad (19a)$$

or

$$\frac{\partial v_j}{\partial x}(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial^3 v_j}{\partial x^3}(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial^5 v_j}{\partial x^5}(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial v_j}{\partial x}(t, \ell) = 0, \quad \frac{\partial^3 v_j}{\partial x^3}(t, \ell) = 0, \quad \frac{\partial^5 v_j}{\partial x^5}(t, \ell) = 0, \quad -2 \leq j \leq M \quad (19b)$$

and the terminal conditions

$$v_j(t_f, x) = 0, \quad \frac{1}{c^2} \frac{\ell^2}{3} \frac{\rho'}{\rho} \frac{\partial^3}{\partial t \partial x^2} v_j(t_f, x) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} v_j(t_f, x) = 0 \quad \text{for } i = 1, \dots, M. \quad (20a)$$

$$v_{-2}(t_f, x) = -\lambda_{-2} \frac{\partial h_2}{\partial \nu_t}(x, \nu_t(t_f, x)), \quad \frac{1}{c^2} \frac{\ell^2}{3} \frac{\rho'}{\rho} \frac{\partial^3}{\partial t \partial x^2} v_{-2}(t_f, x) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} v_{-2}(t_f, x) = 0, \quad (20b)$$

$$v_{-1}(t_f, x) = 0, \quad \frac{1}{c^2} \frac{\ell^2}{3} \frac{\rho'}{\rho} \frac{\partial^3}{\partial t \partial x^2} v_{-1}(t_f, x) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} v_{-1}(t_f, x) = \lambda_{-1} \frac{\partial h_1}{\partial \nu}(x, \nu(t_f, x)) \quad (20c)$$

$$v_0(t_f, x) = -\lambda_0 \frac{\partial \mathcal{G}_2}{\partial \nu_t}(x, \nu_t(t_f, x)), \quad (20d)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\ell^2}{3} \frac{\rho'}{\rho} \frac{\partial^3}{\partial t \partial x^2} v_0(t_f, x) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} v_0(t_f, x) = \lambda_0 \frac{\partial \mathcal{G}_1}{\partial \nu}(x, \nu(t_f, x)).$$

For each point  $(t, x) \in (0, t_f) \times (0, \ell)$ ,  $i = -2, -1, 0, \dots, M$ ,  $d^i(t, x, \bar{C})$  is defined as follows

$$d^i(t, x, \bar{C}) = v_i(t, x)(\bar{C} - C^\circ) + \mathcal{G}_i(t, x, \nu^\circ(t, x), \bar{C}) - \mathcal{G}_i(t, x, \nu^\circ(t, x), C^\circ). \quad (21)$$

Now we shall show that the set

$$D = \{d | d = (d^{-2}(t, x, \bar{C}), \dots, d^M(t, x, \bar{C})), (t, x) \text{ a regular point of } C^\circ, \bar{C} \in \mathfrak{C}_{ad}\}$$

is derived set for  $Z$  at  $\mathcal{J}(C^\circ)$ . Let  $d_1, d_2, \dots, d_P$  be an arbitrary finite collection of vectors from  $D$ . We must show that there exist points  $\mathcal{J}_\varepsilon \in Z$  depending continuously on the vector parameter  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_P)$  for all sufficiently small positive values of  $\varepsilon$  such that

$$\mathcal{J}_\varepsilon = \mathcal{J}(C^\circ) + \sum_{j=1}^P d_j \varepsilon_j + o(\varepsilon).$$

Since  $d_j \in D$ ,  $j = 1, \dots, P$ , there exist  $(t_1, x_1), \dots, (t_P, x_P)$  regularity points of  $C^\circ$  and subfunctions  $C_1, \dots, C_P \in \mathfrak{C}_{ad}$  such that

$$d_j = (d^{-2}(t_j, x_j, C_j), \dots, d^M(t_j, x_j, C_j)), j = 1, \dots, P.$$

We shall show that  $\mathcal{J}_\varepsilon$  can be defined by  $\mathcal{J}_\varepsilon = \mathcal{J}(C_\varepsilon)$  where  $C_\varepsilon$  is the admissible control defined in Eq.(13). Then, for  $i = 1, \dots, M$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_i(C_\varepsilon) - \mathcal{J}_i(C^\circ) &= \int_0^{t_f} \int_0^\ell [\mathcal{G}_i(t, x, \nu_\varepsilon(t, x), C_\varepsilon(t, x)) - \mathcal{G}_i(t, x, \nu^\circ(t, x), C^\circ(t, x))] dt dx \\ &= \int_0^{t_f} \int_0^\ell [\mathcal{G}_i(t, x, \nu_\varepsilon(t, x), C_\varepsilon(t, x)) - \mathcal{G}_i(t, x, \nu^\circ(t, x), C_\varepsilon(t, x))] dt dx \\ &\quad + \int_0^{t_f} \int_0^\ell [\mathcal{G}_i(t, x, \nu^\circ(t, x), C_\varepsilon(t, x)) - \mathcal{G}_i(t, x, \nu^\circ(t, x), C^\circ(t, x))] dt dx \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{t_f} \int_0^\ell \frac{\partial \mathcal{G}_i}{\partial \nu}(t, x, \nu^\circ, C^\circ(t, x)) \Delta \nu(x, t) dt dx + \sum_{j=1}^P \varepsilon_j [\mathcal{G}_i(t_j, x_j, \nu^\circ(t_j, x_j), C_j) \\ &\quad - \mathcal{G}_i(t_j, x_j, \nu^\circ(t_j, x_j), C_j^\circ(t_j, x_j))] + \sum_{j=1}^P o(\varepsilon_j). \end{aligned} \quad (23)$$

For obtaining Eq.(23), we employ that  $C^\circ$  is regular in  $\Omega$ . After employing following equality in Eq.(17)

$$\mathfrak{M}v_i = \frac{\partial \mathcal{G}_i}{\partial \nu}(t, x, \nu^\circ(t, x), C^\circ), \quad i = 1, \dots, M, \quad k = 1, \dots, N$$

it is observed that

$$\begin{aligned} \int_0^\ell \int_0^{t_f} \Delta \nu(t, x) \mathfrak{M}v_i dt dx &= \int_0^\ell \int_0^{t_f} v_i(t, x) (C_\varepsilon(t, x) - C^\circ(t, x)) \\ &= \sum_{j=1}^P \varepsilon_j v_i(t_j, x_j) (C_j - C_j^\circ(t_j, x_j)) + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

By means of Eq.(21) and Eq.(23), we can write

$$\mathcal{J}_i(\mathcal{C}_\varepsilon) = \mathcal{J}_i(\mathcal{C}^\circ) + \sum_{j=1}^P d_j^i \varepsilon_j + o(\varepsilon), \quad i = 1, \dots, M, \tag{24}$$

where  $d_j^i$  denotes the  $i$ th component of  $d_j$ . For  $i = 0$ , we have

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_0(\mathcal{C}_\varepsilon) - \mathcal{J}_0(\mathcal{C}^\circ) &= \int_0^\ell \left[ \frac{\partial \mathcal{G}_1}{\partial \nu}(x, \nu^\circ(t_f, x)) \Delta \nu(t_f, x) + \frac{\partial \mathcal{G}_2}{\partial \nu_t}(x, \nu_t^\circ(t_f, x)) \Delta \nu_t(t_f, x) \right] dx \\ &+ \sum_{j=1}^P \varepsilon_j [\mathcal{G}_0(t_j, x_j, \nu_\varepsilon(t_j, x_j), \mathcal{C}_j) - \mathcal{G}_0(t_j, x_j, \nu_\varepsilon(t_j, x_j), \mathcal{C}_j^\circ)] \\ &+ \int_0^\ell \int_0^{t_f} (\mathcal{M} v_0) \Delta \nu(t, x) dt dx + o(\varepsilon). \end{aligned} \tag{25}$$

in which  $\mathcal{J}_0 = \int_0^\ell [\mathcal{G}_1(x, \nu(t_f, x)) + \mathcal{G}_2(x, \nu_t(t_f, x))] dx + \int_0^\ell \int_0^{t_f} \mathcal{G}_0(t, x, \nu, \mathcal{C}) dt dx$ . Considering Eq.(17) and Eq.(18), it is observed that

$$\begin{aligned} \int_0^{t_f} \int_0^\ell \Delta \nu(t, x) \mathfrak{M} v_0 dt dx &= \int_0^{t_f} \int_0^\ell v_0(t, x) (\mathcal{C}_\varepsilon(t, x) - f^\circ(t, x)) dt dx \\ &- \int_0^\ell \left[ \frac{\partial \mathcal{G}_1}{\partial \nu}(x, \nu^\circ(t_f, x)) \Delta \nu(t_f, x) + \frac{\partial \mathcal{G}_2}{\partial \nu_t}(x, \nu_t^\circ(t_f, x)) \Delta \nu_t(t_f, x) \right]. \end{aligned} \tag{26}$$

If Eq.(26) is substituted into Eq.(25), Eq.(24) is obtained for  $i = 0$ . For  $i = -2, -1$ , Eq.(24) can be obtained by using Eqs.(17)-(18). By definition  $\mathcal{J}$ , following equality is obtained

$$\mathcal{J}(\mathcal{C}_\varepsilon) - \mathcal{J}(\mathcal{C}^\circ) = \sum_{j=1}^P d_j \varepsilon_j + o(\varepsilon).$$

If  $\mathcal{J}_\varepsilon$  is defined as  $\mathcal{J}(\mathcal{C}_\varepsilon)$ , it follows that  $D$  is a derived set for  $Z$  at  $\mathcal{J}(\mathcal{C}^\circ)$ . So, there exist lagrange multipliers [24] that  $\lambda_{-2}, \lambda_{-1}, \lambda_0, \dots, \lambda_M$  and  $\lambda_i \leq 0$  for  $0 \leq i \leq m$  and some  $\lambda_i \neq 0$ , such that

$$\sum_{i=-2}^M \lambda_i d^i \leq 0 \tag{27}$$

for any vector  $d = (d^{-2}, d^{-1}, d^0, \dots, d^M)$  in  $D$ . For attaining conclusion of **Lemma 3**, take into account  $P = 1$  and consider

$$\bar{\mathcal{J}} = \sum_{i=-2}^M \lambda_i \mathcal{J}_i.$$

By Eq.(24), we have following equality

$$\bar{\mathcal{J}}(\mathcal{C}_\varepsilon) - \bar{\mathcal{J}}(\mathcal{C}^\circ) = \varepsilon \sum_{i=-2}^M \lambda_i d^i + o(\varepsilon)$$

for any  $d = (d^{-2}, d^{-1}, d^0, \dots, d^M)$  in  $D$ . Then, we obtain the proof of **Lemma 3** as follows:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\bar{\mathcal{J}}(\mathcal{C}_\varepsilon) - \bar{\mathcal{J}}(\mathcal{C}^\circ)}{\varepsilon} = \sum_{i=-2}^M \lambda_i d^i \leq 0.$$

□

**Theorem 1.** [Maximum Principle] For the optimal control functions  $C^\circ(t, x) \in \mathfrak{C}_{ad}$ , the corresponding optimal state and adjoint variables are let  $\nu^\circ(t, x) = \nu(t, x, C^\circ)$  satisfying Eqs.(1)-(4) and  $v^\circ(t, x) = v(t, x, C^\circ(t, x))$  satisfying Eq.(14), boundary conditions Eq.(15) and terminal conditions Eq.(16), respectively. The maximum principle states that if

$$\mathcal{H}[t, x, v^\circ, C^\circ(t, x)] = \max_{C \in \mathfrak{C}_{ad}} \mathcal{H}[t, x, v, C(t, x)] \tag{28}$$

where the Hamiltonian is given by

$$\mathcal{H}[t, x, v, C(t, x)] = v(t, x)C + \sum_{i=-2}^M \lambda_i \mathcal{G}_i(t, x, \nu(t, x), C) \tag{29}$$

then the performance index Eq.(11) is minimized, i.e.,

$$\mathcal{J}_0[C^\circ(t, x)] \leq \mathcal{J}_0[C(t, x)] \quad \text{for any } C \in \mathfrak{C}_{ad}. \tag{30}$$

*Proof.* By **Lemma 3** and Lagrange multipliers  $0 \leq i \leq m$ ,  $\lambda_i \neq 0$  and  $\lambda_{-2}, \lambda_{-1}, \lambda_0, \dots, \lambda_M$  independent of  $(t, x)$  with  $\lambda_i \leq 0$  such that

$$\sum_{i=-2}^M \lambda_i [v_i(t, x)(C - C^\circ(t, x)) + \mathcal{G}_i(t, x, \nu(t, x), C) - \mathcal{G}_i(t, x, \nu^\circ(t, x), C^\circ(t, x))] \leq 0 \tag{31}$$

for any function  $C \in \mathfrak{C}_{ad}$ . Note that the term in Eq.(31)

$$\sum_{i=-2}^M \lambda_i [v_i(t, x)C + \mathcal{G}_i(t, x, \nu(t, x), C)] \tag{32}$$

obtains its maximum value at  $C = C^\circ(t, x) \in \mathfrak{C}_{ad}$ . Take into account the first term in Eq.(32),

$$\sum_{i=-2}^M \lambda_i v_i(t, x)C.$$

If we define  $v = \sum_{i=-2}^M \lambda_i v_i(t, x)$ , we obtain

$$v(t, x)C + \sum_{i=-2}^M \lambda_i \mathcal{G}_i(t, x, \nu(t, x), C).$$

Hence, **Theorem 1** is proved. □

**Theorem 2.** Take into account the system Eqs.(1)-(2) and Eqs.(11)-(12). Let the functions  $G_i$  in the following form

$$G_i(t, x, \nu, C) = \mathcal{G}^i(t, x, \nu) + H^i(t, x, C), \quad i = -2, -1, 0, \dots, M$$

and  $v$  satisfying Eqs.(14)-(16) be the nonzero solution of

$$\mathfrak{M}v = \sum_{i=-2}^M \lambda_i \frac{\partial G^i(t, x, \nu^\circ(t, x))}{\partial \nu}.$$

Assume presence of admissible control function  $C^\circ$  with the  $\lambda_0, \lambda_i, i = -2, -1, 1, \dots, M$ , that satisfy the maximum principle Eq.(28). Let followings are assumed:

- a)  $\mathcal{G}_1, h_1, \mathcal{G}_3, \dots, \mathcal{G}_m$  are convex respect to  $\nu$  and  $\mathcal{G}_2, h_2$  are convex respect to  $\nu_i$ ;
- b)  $\lambda_0 < 0, \quad \lambda_i \leq 0$  for  $i = -1, \dots, m$ ;
- c) the constraints Eq.(12) are satisfied by  $C^\circ$ ;
- d) If the strict inequality holds in Eq.(12), the corresponding Lagrange multiplier  $\lambda_i = 0$ ;
- e)  $-\lambda_i G^i, -\lambda_{-1} h_1$  are convex functions of  $\nu$  and  $-\lambda_{-2} h_2$  is convex functions of  $\nu_i$  for  $m < i < M$ .



In presence of above requirements, maximum principle introduced by Eq.(28) is sufficient requirement for  $C^\circ$  to be optimal. Requirement (d) is indicated in [24]. In case  $h_1, h_2, G_i, m < i \leq M$  are linear function, requirement (e) is proved.

*Proof.* If Eq.(12) is satisfied by  $C, \nu$ , then by condition (d),

$$\int_0^{t_f} \int_0^\ell \lambda_i \left[ G^i(t, x, \nu) - G^i(t, x, \nu^\circ) \right] dx dt + \int_0^{t_f} \int_0^\ell \lambda_i \left[ H^i(t, x, C) - H^i(t, x, C^\circ) \right] dt dx = 0$$

for  $i = -2, -1, \dots, M$  Then, following inequality can be written;

$$\begin{aligned} & -\lambda_0 [\mathcal{J}_0(C) - \mathcal{J}_0(C^\circ)] \geq \\ & - \int_0^\ell \lambda_0 [\mathcal{G}_2(x, \nu_t(t_f, x)) - \mathcal{G}_2(x, \nu_t^\circ(t_f, x)) + \mathcal{G}_1(x, \nu(t_f, x)) - \mathcal{G}_1(x, \nu^\circ(t_f, x))] dx \\ & - \int_0^{t_f} \int_0^\ell \sum_{i=-2}^M \lambda_i \left\{ G^i(t, x, \nu(t, x)) - G^i(t, x, \nu^\circ(t, x)) \right. \\ & \quad \left. - [H^i(t, x, C(t, x)) - H^i(t, x, C^\circ(t, x))] \right\} dx dt \\ & - \int_0^\ell \lambda_{-1} \left[ h_1(x, \nu(t_f, x)) - h_1(x, \nu^\circ(t_f, x)) \right] dx \\ & - \int_0^\ell \lambda_{-2} \left[ h_2(x, \nu_t(t_f, x)) - h_2(x, \nu_t^\circ(t_f, x)) \right] dx. \end{aligned}$$

Using convexity assumption (e),

$$\begin{aligned} & -\lambda_0 [\mathcal{J}_0(C) - \mathcal{J}_0(C^\circ)] \geq \\ & - \int_0^\ell \lambda_0 \left[ \frac{\partial \mathcal{G}_1}{\partial \nu}(x, \nu^\circ(t_f, x)) \Delta \nu(t_f, x) + \frac{\partial \mathcal{G}_2}{\partial \nu_t}(x, \nu_t^\circ(t_f, x)) \Delta \nu_t(t_f, x) \right] dx \\ & - \int_0^{t_f} \int_0^\ell \sum_{i=-2}^M \lambda_i \frac{\partial G^i}{\partial \nu}(t, x, \nu^\circ(t, x)) \Delta \nu(t, x) dt dx \\ & + \int_0^{t_f} \int_0^\ell \sum_{i=-2}^M \lambda_i [H^i(t, x, C^\circ(t, x)) - H^i(t, x, C(t, x))] dt dx \\ & - \int_0^\ell \lambda_{-1} \frac{\partial h_1}{\partial \nu}(x, \nu^\circ(t_f, x)) \Delta \nu(t_f, x) dx - \int_0^\ell \lambda_{-2} \frac{\partial h_2}{\partial \nu_t}(x, \nu_t^\circ(t_f, x)) \Delta \nu_t(t_f, x) dx \\ & = - \int_0^\ell \lambda_0 \left[ \frac{\partial \mathcal{G}_1}{\partial \nu}(x, \nu^\circ(t_f, x)) \Delta \nu(t_f, x) + \frac{\partial \mathcal{G}_2}{\partial \nu_t}(x, \nu_t^\circ(t_f, x)) \Delta \nu_t(t_f, x) \right] dx \\ & - \int_0^{t_f} \int_0^\ell (\mathcal{M} \nu) \Delta \nu(t, x) dx dt + \int_0^{t_f} \int_0^\ell \sum_{i=-2}^M \lambda_i [H^i(t, x, f^\circ(t, x)) - H^i(t, x, f(t, x))] dt dx \\ & - \int_0^\ell \left[ \lambda_{-1} \frac{\partial h_1}{\partial \nu}(x, \nu^\circ(t_f, x)) \Delta \nu(t_f, x) + \lambda_{-2} \frac{\partial h_2}{\partial \nu_t}(x, \nu_t^\circ(t_f, x)) \Delta \nu_t(t_f, x) \right] dx \end{aligned}$$

And finally employing the **Lemma 2** and Eqs.(19)-(20), we obtain

$$\begin{aligned}
 & -\lambda_0[\mathcal{J}_0(\mathcal{C}) - \mathcal{J}_0(\mathcal{C}^\circ)] \geq \\
 & \int_0^{t_f} \int_0^\ell \left\{ v(t, x)[\mathcal{C}^\circ(t, x) - \mathcal{C}(t, x)] \right. \\
 & \left. + \sum_{i=-2}^M \lambda_i [H^i(t, x, \mathcal{C}^\circ(t, x)) - H^i(t, x, \mathcal{C}(t, x))] \right\} dx dt
 \end{aligned} \tag{33}$$

Take into consideration that above inequality given by Eq.(33) is nonnegative because of requirement (b). Hence, following inequality is obtained

$$\mathcal{J}_0(\mathcal{C}(t, x)) - \mathcal{J}_0(\mathcal{C}^\circ(t, x)) \geq 0 \tag{34}$$

□

Hence, the proof of **Theorem 2** is completed and it is concluded that for a global minimum of the performance index functional Eq.(11), the maximum principle is also a sufficient condition.

## 4 Numerical Example and Discussion

Let us consider a homogeneous beam system including central host layer and two patches, whom edges are parallel to edge of the beam, perfectly bounded on the both side of the beam. At the beginning of the control duration, the beam is undeformed and at rest. The beam is exposed to external excitation force, which alerts the vibrations in the beam. By following obtained theoretical results in previous sections, the goal of this example is to find the minimum level of voltage to be applied to the piezoelectric patch actuators for suppressing undesirable vibrations in the beam optimally.

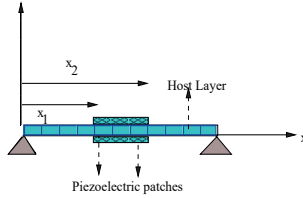


Figure 1: Cross section of the beam

The mathematical model of the beam system, described by Fig.(1), is given as follows;

$$\frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} + \frac{\ell^2}{12} \frac{\partial^4 \nu}{\partial x^4} + \frac{\ell^4}{36} \frac{\partial^6 \nu}{\partial x^6} = \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial^2 \nu}{\partial t^2} - \frac{\ell^2}{3} \frac{\rho'}{\rho} \frac{\partial^4 \nu}{\partial t^2 \partial x^2} \right) + f(t, x) + \mathcal{C}(t, x) \tag{35}$$

where  $\mathcal{C}(t, x) = C(t)[H''(x-x_1) - H''(x-x_2)]$  in which  $C(t)$  is the optimal control voltage function,  $H$  is heavy-side function and  $x_1$  and  $x_2$  are the locations of piezoelectric patch actuators. The Eq.(35) is subjected to following homogeneous boundary conditions;

$$\nu(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2}(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial^4 \nu}{\partial x^4}(t, 0) = 0, \quad \nu(t, \ell) = 0, \quad \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2}(t, \ell) = 0, \quad \frac{\partial^4 \nu}{\partial x^4}(t, \ell) = 0, \tag{36}$$

or

$$\frac{\partial \nu}{\partial x}(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial^3 \nu}{\partial x^3}(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial^5 \nu}{\partial x^5}(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial \nu}{\partial x}(t, \ell) = 0, \quad \frac{\partial^3 \nu}{\partial x^3}(t, \ell) = 0, \quad \frac{\partial^5 \nu}{\partial x^5}(t, \ell) = 0 \tag{37}$$

and initial conditions;

$$\nu(0, x) = \nu_0(x), \quad \frac{\partial \nu}{\partial t}(0, x) = \nu_1(x). \tag{38}$$

Also, the performance index functional, to be minimized at predetermined terminal time, of the system is defined as follows;

$$\mathcal{J}(C) = \int_0^\ell [\lambda_1 v^2(t_f, x) + \lambda_2 v_t^2(t_f, x)] dx + \lambda_3 \int_0^{t_f} C^2(t) dt \quad (39)$$

in which the first integral at the left hand-side is the modified kinetic energy of the beam system which includes the weighted quadratical functional of the displacement and velocity of a point on the beam. Second integral is the weighted quadratical functional of the voltage energy to be applied to the piezoelectric patch actuator on the beam system. By following the theoretical results in the previous section, the aim of this section is to optimally determine the  $C(t)$ , which satisfies the Eqs.(35)-(38) and minimizes the Eq.(39) in the control duration. In order to obtain the optimality for the beam system defined by Eqs.(35)-(38), let us define the adjoint system as follows;

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\ell^2}{12} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{\ell^4}{36} \frac{\partial^6 v}{\partial x^6} = \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\ell^2}{3} \frac{\rho'}{\rho} \frac{\partial^4 v}{\partial t^2 \partial x^2} \right). \quad (40)$$

Eq.(40) is subject to the following homogeneous boundary conditions;

$$v(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial^4 v}{\partial x^4}(t, 0) = 0, \quad v(t, \ell) = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, \ell) = 0, \quad \frac{\partial^4 v}{\partial x^4}(t, \ell) = 0, \quad (41a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial^5 v}{\partial x^5}(t, 0) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(t, \ell) = 0, \quad \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(t, \ell) = 0, \quad \frac{\partial^5 v}{\partial x^5}(t, \ell) = 0, \quad (41b)$$

and following terminal conditions;

$$\frac{1}{c^2} \left[ \frac{\ell^2}{3} \frac{\rho'}{\rho} v_{txx}(t, x) - v_t(t, x) \right] = 2\lambda_1 v(t, x) \quad \text{at } t = t_f \quad (42a)$$

$$v(t, x) = -2\lambda_2 v_t(t, x) \quad \text{at } t = t_f. \quad (42b)$$

In the light of obtained theoretical results from previously sections, necessary and sufficient optimality conditions in the form of maximum principle is obtained as follows;

$$\text{If } \mathcal{H}[t, x_1, x_2; v^\circ, C^\circ] = \max_{C \in \mathfrak{C}_{ad}} \mathcal{H}[t, x_1, x_2; v, C] \quad (43)$$

in which the Hamiltonian is defined by the equation

$$\mathcal{H}[t, x_1, x_2; v, C] = [v_x(t, x_2) - v_x(t, x_1)C(t) - \lambda_3 C^2(t)] \quad (44)$$

then,

$$\mathcal{J}[C^\circ] = \min_{C \in \mathfrak{C}_{ad}} \mathcal{J}[C], \quad C \in \mathfrak{C}_{ad}. \quad (45)$$

Hence, optimal control voltage function is obtained as follows;

$$C(t) = \frac{v_x(t, x_2) - v_x(t, x_1)}{2\lambda_3}. \quad (46)$$

The solution of the system defined by Eqs.(35)-(46) is achieved by means of **MATLAB**. Before discussing the numerical results, note that  $\lambda_3$  is on the control function given by Eq.(46). The value of  $\lambda_3$  on the control function increases, the value of control force defined by  $C(t)$  decreases. By adjusting the optimal value of  $\lambda_3$ , optimal control voltage  $C(t)$  is determined. In the numerical computations,  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ , and  $\lambda_3$  is evaluated as  $10^{-3}$  and  $10^3$  for controlled and uncontrolled situations, respectively. Also, initial conditions are taken into account as  $v_0(x) = \sqrt{2} \sin(\pi x)$  and  $v_1(x) = \sqrt{2} \sin(\pi x)$ . Also, the external excitation function  $f(t, x) = e^{-t}(1 - x)$ . The predetermined terminal time is fixed as  $t_f = 5$  and length of the beam is  $\ell = 1$ . The location of the patch on the beam is considered as  $x_1 = 0.4$  and  $x_2 = 0.6$ . The values of the displacements and velocity in the performance index functional defined by Eq.(39), is calculated at the  $x = 0.5$ , which is the middle point of the beam. The Young's modulus  $E$  is  $2 \times 10^7$  and the line density of the beam  $\rho$  is  $6 \times 10^4$ . Controlled and uncontrolled displacements of

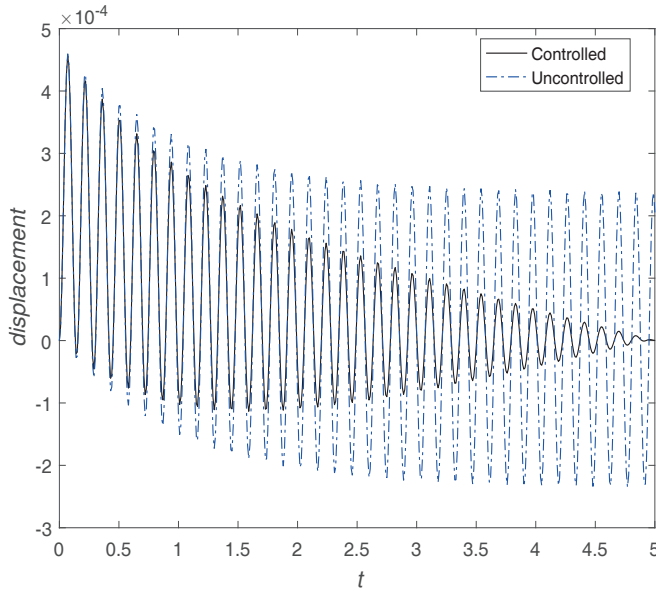


Figure 2: Controlled and uncontrolled displacements

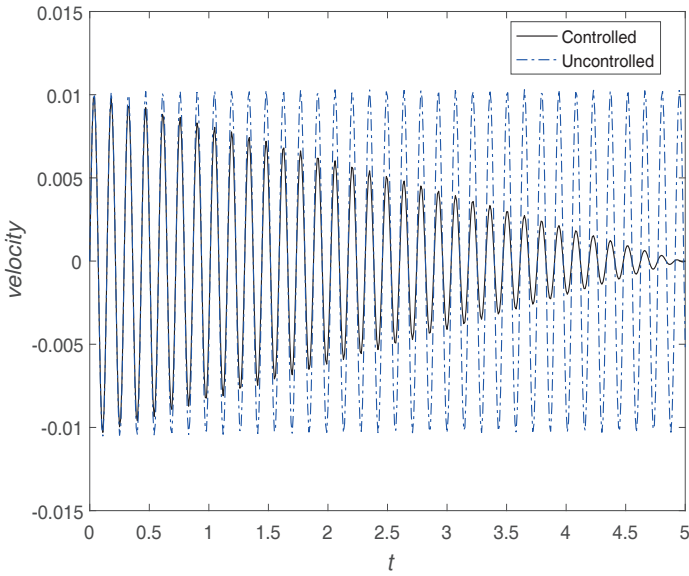


Figure 3: Controlled and uncontrolled velocities

the beam, subjected to external excitation, are plotted in Fig.2. By observing the Fig.(2), it is concluded that the vibrations in the beam is effectively suppressed as a conclusion of the optimal vibration control. Same observation is also valid for the controlled and uncontrolled velocities of the vibrations on the beam, which are plotted in Fig.(3).

Let us define the dynamic response functional of the beam as  $\mathcal{J}(\nu)$  by considering  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$  and  $\lambda_3 = 0$  in Eq.(39). Also, define the accumulated control voltage functional as  $\mathcal{J}(\mathcal{C})$  by evaluating the  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  and  $\lambda_3 = 1$  Eq.(39). By taking into account the Table1, it is concluded that the value of  $\lambda_3$  decreases on the optimal

Table 1: The values of  $\mathcal{J}(\nu)$  and  $\mathcal{J}(\mathcal{C})$  for different values of  $\lambda_3$ .

$\vartheta_3$	$\mathcal{J}(w)$	$\mathcal{J}(\mathcal{V})$
$10^3$	3 e-5	5.2 e-10
$10^0$	9 e-8	2 e-6
$10^{-3}$	1.5 e-13	6 e-6

control function, dynamic response of the beam is decreases due to increment on the value of the optimal control force applied to piezoelectric patch actuator on beam. These observation reveal that introduced necessary and sufficient conditions in the form of maximum principle are ideal for optimality.

## 5 Conclusion

In this paper, optimality conditions of a hyperbolic beam equation based on Mindlin's gradient elasticity theory is studied. The system under consideration is subjected to external excitation function and nonhomogeneous boundary conditions. Also, the system has some equalities/inequalities constraints on control function and state variable. For obtaining optimality conditions of the system, existence and uniqueness of the solution to beam equation is proved by using energy-integral method and controllability of the system is discussed. Necessary and sufficient optimality conditions are derived in the form of a maximum principle. A numerical example is presented and results given by table and graphics indicate that derived conditions for a beam model based on Mindlin's gradient elasticity theory are necessary and sufficient for optimality.

## 6 Author Contribution

KY completed this study and wrote the manuscript. KY read and approved the final manuscript.

## 7 Funding Information

There are no funders to report for this submission.

## 8 Conflicts of Interest

This work does not have any conflicts of interest

## References

- [1] Cosserat, E., Cosserat, F., 1909. *Theorie des Corps Deformables*. Cornell UniversityLibrary.
- [2] Gazis, D.C., Herman, R., Wallis, R.F., 1960. Surface elastic waves in cubic crystals. *Phys. Rev.* 119, 533544.

- [3] Gazis, D.C., Wallis, R.F., 1964. Surface tension and surface modes in semi-infinite lattices. *Surface Sci.* 3, 1932.
- [4] Green, A.E., Rivlin, R.S., 1964. Multipolar continuum mechanics. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 17, 113147.
- [5] Koiter, W.T., 1964. Couple stress in the theory of elasticity III. *Proc. Kon. Nederl. Akad. Wetensch. B* 67, 1744, 196.
- [6] Lanczos, C., 1970. *The Variational Principles of Mechanics*. University of Toronto Press, Toronto.
- [7] Mindlin, R.D., Tiersten, H.F., 1962. Effects of couple stresses in linear elasticity. *Arch. Rat. Mech. Anal.* 11, 415448.
- [8] Mindlin, R.D., 1964. Micro-structure in linear elasticity. *Arch. Rat. Mech. Anal.* 16, 5178.
- [9] Mindlin, R.D., 1965. On the equations of elastic materials with micro-structure. *Int. J. Solids Struct.* 1, 7378.
- [10] Mindlin, R.D., 1965. Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity. *Int. J. Solids Struct.* 1, 417438.
- [11] Tiersten, H.F., Bleustein, J.L., 1974. Generalized elastic continua. In: Herrmann, G. (Ed.), *R.D. Mindlin and Applied Mechanics*. Rergamon Press, New York, pp. 67103.
- [12] Berkani, A., Tatar, N., Stabilization of a viscoelastic Timoshenko beam fixed into a moving base, *Math. Modelling Nat. Phenomena*, 14, 501, 2019.
- [13] Polyzos, D., Fotiadis, D. I., Derivation of Mindlin's first and second strain gradient elastic theory via simple lattice and continuum models, *Int J. Solid and Struc.*, 49, 470-480, 2012.
- [14] Pontryagin, L. S., Boltyanskii, V., Gamkrelidze, R., Mishchenko, E., *The mathematical theory of optimal control processes*, L. W. Neustadt, ed., Interscience, New-York, 1962.
- [15] Egorov, A. I., Necessary optimality conditions for distributed parameter systems, *SIAM Journal on Control*, 5, 352-408, 1967.
- [16] Barnes, E. A., Necessary and sufficient optimality conditions for a class of distributed parameter control systems, *SIAM Journal on Control*, 9(1), 62-82, 1971.
- [17] Lee, E. B., A sufficient condition in the theory of optimal control, *SIAM Journal on Control*, 1, 241-245, 1963.
- [18] Russell, D. L., Optimal regulation of linear symmetric hyperbolic systems with infinite dimensional controls, *SIAM Journal of Control*, 4, 276-295, 1966.
- [19] Komkov, V., The optimal control of a transverse vibration of a beam, *SIAM Journal of Control*, 6, 401-421, 1968.
- [20] Yildirim, K., Active control of an improved Boussinesq system, *Math. Modelling Nat. Phenomena*, 15, 2020.
- [21] Kucuk, I., Yildirim, K., Necessary and Sufficient Conditions of Optimality for a Damped Hyperbolic Equation in One-Space Dimension, *Abstract and Applied Analysis*, 2014, ID 493130, 2014.
- [22] Sadek, I., Necessary and sufficient conditions for the optimal control of distributed parameter systems subject to integral constraints, *J. Franklin Ins.*, 325(5), 565-583, 1988.
- [23] Saks, S., *Theory of the Integral*, Hafner, New York, 1937.
- [24] Hestenes, M., *Calculus of variation and Optimal Control Theory*, John Wiley, New York, 1966.
- [25] Guliyev, H. F., Jabbarova, K. S. (2010). The exact controllability problem for the second order linear hyperbolic equation, *Differential Equations and Control Processes*, N3.
- [26] Pedersen, M., *Functional Analysis in Applied Mathematics and Engineering*, CRC Press, 2018.
- [27] Zachmanoglou, E. C., Thoe, D. W., *Introduction to Partial Differential equations with applications*, Dover Publ., New York, 1986.



# Matematik ve Fen Bilimlerinde Güncel Yaklaşımlar

Editör: Prof. Dr. Ferit Gürbüz

 ÖZGÜR  
YAYINLARI

ISBN 978-625-95513-8-8  
  
9 786259 551388