

# Volatilite Tahmini ve Zımnı Volatilite

Dr. Enes Yıldız • Doç. Dr. Müslüm Polat

# Volatilite Tahmini ve Zımnı Volatilite

Dr. Enes Yıldız • Doç. Dr. Müslüm Polat



Published by

**Özgür Yayın-Dağıtım Co. Ltd.**

Certificate Number: 45503

📍 15 Temmuz Mah. 148136. Sk. No: 9 Şehitkamil/Gaziantep

☎ +90.850 260 09 97

📞 +90.532 289 82 15

🌐 www.ozgurayinlari.com

✉ info@ozgurayinlari.com

---

## Volatilite Tahmini ve Zımnı Volatilite

Enes Yıldız • Müslüm Polat

---

Language: Turkish

Publication Date: 2024

Cover design by Mehmet Çakır

Cover design and image licensed under CC BY-NC 4.0

Print and digital versions typeset by Çizgi Medya Co. Ltd.

**ISBN (PDF):** 978-975-447-909-6

**DOI:** <https://doi.org/10.58830/ozgur.pub463>



This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0). To view a copy of this license, visit <https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>  
This license allows for copying any part of the work for personal use, not commercial use, providing author attribution is clearly stated.

---

Suggested citation:

Yıldız, E., Polat, M. (2024). *Volatilite Tahmini ve Zımnı Volatilite*. Özgür Publications.

DOI: <https://doi.org/10.58830/ozgur.pub463>. License: CC-BY-NC 4.0

---

*The full text of this book has been peer-reviewed to ensure high academic standards. For full review policies, see <https://www.ozgurayinlari.com/>*



## Ön Söz

Finansal piyasaların karmaşık ve dinamik doğası, piyasa katılımcıları için her zaman bir ilgi kaynağı olmuştur. Bu dinamizmin merkezinde ise, volatilité olgusu yer almaktadır. Volatilité, gerek risk/portföy yönetiminde gerekse yatırım stratejilerinin geliştirilmesinde kritik bir rol oynamaktadır. Bu nedenle finansal piyasaların temel yapı taşlarından biri olan volatilité olgusunun derinlemesine incelenmesi önem arz etmektedir.

Çalışma, üç ana bölümden meydana gelmektedir. Birinci bölümde, volatilitéye dair temel bilgiler verilerek, bu fenomenin finansal piyasalardaki rolü ele alınmıştır. Böylece okuyuculara; volatilitenin ne olduğu, hangi özellikler sergilediği ve finansal piyasalar açısından ne anlama geldiği ifade edilmiştir. İkinci bölümde, volatilité tahmininde kullanılan modeller detaylı bir şekilde açıklanarak karşılaştırılmıştır. Burada ekonometrik açıdan her biri kendi avantaj ve dezavantajlarına sahip olan volatilité tahmin modellerinin, volatilité sürecini gerçeğe uygun olarak modellemeyi amaçladığı görülmektedir. Açıkçası, getiri serisinin tüm yönlerini eksiksiz karşılayan bir model henüz tasarlanamamış olsa da, daha karmaşık yapıdaki tahmin modellerine doğru yaşanan geçiş, getiri serilerini karakterize eden diğer özellikleri de modelleme arayışına dayanmaktadır. Çalışmanın üçüncü bölümünde ise; yenilikçi bir bakış açısını temsil eden, volatilitéyi piyasa temelli bir beklentiye oturtan ve üzerine oluşturulan türev ürünler sayesinde geleneksel kalıplar dışında bir volatilité ticaretini mümkün kılan zımni volatilité endeksleri tanıtılmıştır. Bu endekslerden sağlanan veriler, bir taraftan stratejik tahmin politikalarını şekillendirmekte iken, diğer taraftan çeşitlendirme stratejileri ve varlık tahsisi için kıymetli bilgiler sunmaktadırlar.

Bu çalışmada, finansal piyasaların temel bir niteliği olan volatilité konusunda okuyuculara geniş bir perspektif sunulması hedeflenmiştir. Ayrıca çalışmanın, piyasa katılımcılarının stratejik kararlar almalarına rehberlik etmesi amaçlanmıştır.

Bu çalışmanın ortaya çıkmasında emeği geçen tüm meslektaşlarımızın yanı sıra her koşulda yanımızda olan ve bizi desteklemekten asla vazgeçmeyen kıymetli ailelerimize sonsuz teşekkürlerimizi ve derin saygılarımızı sunmayı bir borç biliriz.

Dr. Enes YILDIZ

Doç. Dr. Müslüm POLAT

# İçindekiler

Önsöz	i
Kısaltmalar Listesi	v
Tablolar Listesi	vii
Şekiller Listesi	viii
Giriş	1

## Birinci Bölüm

### Volatilite Kavramı ve Finansal Piyasalarda Volatilite

1.1. Volatilitenin Tanımı	3
1.2. Volatiliteye İlişkin Bazı Temel Kavramlar	8
1.3. Volatilitenin Önemi ve Etkileri	28
1.4. Finansal Piyasalarda Volatilite	31

## İkinci Bölüm

### Volatilite Tahmininde Kullanılan Modeller

2.1. Zaman Serisi Tahmin Modelleri	35
2.2. Otoregresif Koşullu Değişen Varyans Tahmin Modelleri	42
2.3. Zımnî Volatilite Tahmin Modelleri	82
2.4. Stokastik Volatilite Tahmin Modelleri	84
2.5. Volatilite Tahmin Modellerinin Karşılaştırılması	86

## Üçüncü Bölüm

### Zımnî Volatilite Endeksleri

3.1. Zımnî Volatilite Endekslerinin Ortaya Çıkışı	91
3.2. Başlıca Zımnî Volatilite Endeksleri	106

Sonuç  
Kaynakça

129  
131

## Kısaltmalar Listesi

ABD	Amerika Birleşik Devletleri
ACF	Autocorrelation Function
ARCH	Autoregressive Conditional Heteroscedasticity
ARMA	Autoregressive Moving Average Model
ATM	At the Money
BİST	Borsa İstanbul
BofA	Bank of America Merrill Lynch
CAPM	Capital Asset Pricing Model
CBOE	Chicago Board Options Exchange
DAX	Deutscher Aktienindex
DJIA	Dow Jones Industrial Average
ETF	Exchange Traded Fund
EWMA	Exponentially Weighted Moving Average
FED	Federal Reserve
FTSE 100	Financial Times Stock Exchange 100
GARCH	Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity
GED	Generalized Error Distribution
GLD	SPDR Gold Shares
GVZ	CBOE Gold Volatility Index
ICE	Intercontinental Exchange
ICSS	Iterative Cumulative Sums of Squares
ITM	In the Money
İMKB	İstanbul Menkul Kıymetler Borsası
LTCM	Long Term Capital Management
MONEP	Marché des Options Négociables de Paris
MOVE	ICE BofA Volatility Index Move



Nasdaq	National Association of Securities Dealers Automated Quotations
Nikkei 225	Nikkei Stock Average 225
NYMEX	New York Mercantile Exchange
OEX	Standard & Poor's 100
OTC	Over the Counter
OTM	Out of the Money
OVX	CBOE Crude Oil Volatility Index
PACF	Partial Autocorrelation Function
SPDR	Standard & Poor's Depository Receipts
SPX	Standard & Poor's 500
USO	United States Oil Fund
vb.	ve benzeri
vd.	ve diğerleri
VIX	CBOE Volatility Index
WTI	West Texas Intermediate

## Tablolar Listesi

Tablo 2. 1: Volatilite Tahmin Yöntemlerinin İkili Karşılaştırması	87
Tablo 3. 1: Halka Açık Zımnî Volatilite Endeksleri	107



## Şekiller Listesi

Şekil 1. 1: S&P 100 Günlük Endeks Getirilerinde Volatilite Kümelenmesi	9
Şekil 1. 2: Standart GARCH ve GJR Modellerinde Haber Etki Eğrileri	12
Şekil 1. 3: S&P 500 Endeks Getirileri için Volatilitenin Terim Yapısı	15
Şekil 1. 4: Pozitif Çarpıklık, Negatif Çarpıklık ve Normal Dağılım	17
Şekil 1. 5: Pozitif Basıklık, Negatif Basıklık ve Normal Dağılım	18
Şekil 1. 6: Döviz Opsiyon Piyasalarında Volatilite Gülümsemesi	24
Şekil 1. 7: Döviz Opsiyonları için Zımnı ve Lognormal Dağılım	25
Şekil 1. 8: Hisse Senedi Opsiyon Piyasalarında Volatilite Gülümsemesi	26
Şekil 1. 9: Hisse Senedi Opsiyonları için Zımnı ve Lognormal Dağılım	26
Şekil 3. 1: $N(x)$ Fonksiyonunun Alanını Gösteren Standart Normal Eğri	94
Şekil 3. 2: Yıllar İtibariyle Aylık En Yüksek VIX Değerleri	120
Şekil 3. 3: Yıllar İtibariyle Aylık En Yüksek OVX Değerleri	123
Şekil 3. 4: Yıllar İtibariyle Aylık En Yüksek GVZ Değerleri	125
Şekil 3. 5: Yıllar İtibariyle Günlük Kapanış MOVE Değerleri	127



## GİRİŞ

Avrupa, Asya ve Latin Amerika'daki bazı gelişmekte olan ülkelerin, 1980'li yılların başında yaşadıkları başarılı finansal liberalleşme deneyimleri, dünyadaki diğer gelişmekte olan ülkeleri de benzer politikalar geliştirmeleri yönünde teşvik etmiştir. Finansal serbestleşme ve deregülasyon politikaları çerçevesinde, dünyanın dört bir yanındaki ülkelere ait ticaret borsaları daha açık hale gelerek, finansal sistemler arasındaki bağlantılar güçlenmiştir. Bu gelişmelere paralel olarak, ülke ekonomilerinin, finansal piyasalardaki volatiliteden geniş kapsamlı bir şekilde etkilenme ihtimali ortaya çıkmıştır.

Teorik açıdan bakıldığında, üstlenilen risk ile beklenen getiri arasında pozitif yönlü bir ilişki bulunmakta ve finansal piyasalardaki yüksek volatiliteler, genellikle istikrarsızlığın bir göstergesi olarak kabul edilmektedir (Garner ve Brittain, 2009, s. 7). Öte yandan volatiliteler kavramı, her ne kadar pay piyasaları ile beraber anılsa da, diğer finansal piyasalarda da büyük dalgalanmalar meydana gelebilmektedir. Döviz kurları, tahvil/bono fiyatları ile pay ve emtia piyasalarının çoğunda büyük volatiliteler hareketleri görülebilmektedir (Hacıhasanoğlu, 2003, s. 18). Dolayısıyla volatiliteler; temelleri, bilgileri ve piyasa beklentilerini yansıtan kaçınılmaz bir piyasa deneyimi olarak karşımıza çıkmaktadır (Kalotychou ve Staikouras, 2009, s. 5). Bu gerçeklik, bir taraftan volatiliteler üzerine oluşturulan finansal ürünlerin çeşitlilik göstermesine zemin hazırlamakta, diğer taraftan volatilitelerle ilişkin çalışmalar için dayanak noktası oluşturmaktadır.

Finans teorisinde, bir piyasa fiyatı bir modele uyarlanarak, modelde yer alan parametrelere ait gelecekteki değerlerin geriye dönük bir tümevarımla elde edilen güncel tahminlerine, zımni değerler olarak atıfta bulunmaktadır. Zımni volatiliteler ise, piyasanın gelecekteki volatilitelerinin beklenen değeri şeklinde tanımlanmaktadır (Derman & Miller, 2016, s. 50). Güncel opsiyon fiyatı üzerinden hesaplanan zımni volatiliteler, dayanak varlığa ait fiyatın gelecekteki belirli bir süre boyunca hangi ölçüde dalgalanacağına dair piyasa beklentisini ifade etmektedir. Buradan hareketle zımni volatiliteler endeksleri, her biri kendi dayanak varlığı üzerine yazılı opsiyon fiyatlarını kullanmak suretiyle söz konusu varlıkların gelecekteki volatilitelerini piyasa temelli bir beklentiye oturtan ve üzerine yazılan türev

ürünler sayesinde geleneksel kalıplar dışında bir volatilite ticaretini mümkün kılan yenilikçi bir bakış açısını temsil etmektedir.

Zımnı volatilite endekslerinin ortaya çıkışı, yakın bir geçmişte dayanmaktadır. İlk volatilite endekslerinin oluşturulmasında, finans tarihi için bir dönüm noktası olan Black-Scholes-Merton opsiyon fiyatlandırma çerçevesi merkezi bir rol oynamıştır. Bu yaklaşıma göre elde edilen zımnı volatilite, hâlâ birtakım zımnı volatilite endekslerinin metodolojisinde kullanılmaktadır. Bununla birlikte günümüzdeki zımnı volatilite endeksleri; ileriye dönük hesaplamaları, modelsiz bir yapı sergilemeleri ve profesyonel düzeydeki piyasa katılımcılarının hem korkularını hem de coşkularını yansıtmaları bakımından ön plana çıkmaktadırlar. Bu endekslerden sağlanan veriler, bir taraftan stratejik tahmin politikalarını şekillendirmekte iken, diğer taraftan risk yönetimi ve varlık tahsisi için oldukça kıymetli bilgiler sunmaktadırlar.

Bu çalışmada, volatilite olgusu ve volatilite tahmininde kullanılan modeller detaylı bir şekilde incelenerek zımnı volatilite endeksleri hakkında faydalı birtakım bilgilerin verilmesi amaçlanmıştır. Bu kapsamda çalışma üç bölümden meydana gelmektedir. Birinci bölümde, volatilite kavramı ifade edilerek, volatiliteye dair bazı temel kavramlara yer verilmiştir. Devamında volatilitenin önemi, etkileri ve finansal piyasalardaki rolü işlenmiştir. İkinci bölümde, volatilite tahmininde dikkate alınan modeller, ayrıntılı bir biçimde açıklanarak karşılaştırılmıştır. Üçüncü bölümde ise, zımnı volatilite endekslerinin ortaya çıkış süreci tarihsel bir perspektiften ele alınmış ve başlıca zımnı volatilite endeksleri tanıtılmıştır.

## BİRİNCİ BÖLÜM

### VOLATİLİTE KAVRAMI VE FİNANSAL PİYASALARDA VOLATİLİTE

#### 1.1. VOLATİLİTENİN TANIMI

Volatilite, istikrarsızlığın bir ölçüsüdür. Volatilitesi yüksek (oynak/uçucu) bir madde, kolayca şeklini değiştirebilmektedir. Örneğin, düşük kaynama noktasına sahip bir sıvı, kolaylıkla gazla dönüşebilmektedir. Diğer taraftan finansal piyasalarda volatilite, menkul kıymetlerin veya endekslerin değerindeki değişme olasılığını ifade etmektedir. Bu değişim, geçmişteki olaylar veya geleceğe yönelik beklentiler temelinde şekillenmektedir (Shover, 2012, s. 13).

Başka bir açıdan volatilite, piyasa hızının bir ölçüsüdür. Yavaş hareket eden piyasalar, volatilitesi düşük piyasalar iken; hızlı hareket eden piyasalar, yüksek volatiliteye sahip piyasalardır (Natenberg, 2014, s. 69). Yüksek volatiliteye sahip bir piyasadaki menkul kıymetlerin fiyatı, zaman içinde önemli düzeyde dalgalanmaktadır. Buna karşın doğru şekilde yönetilen volatilite, yatırımcıya fırsat penceresi aralamakta ve kazanç sağlama imkânı sunmaktadır.

Volatilite, belirsiz bir değişkene ait tüm olası sonuçların yayılımıdır. Volatilite ve risk arasında bir ilişki olmakla birlikte bu iki kavram aynı anlama gelmemektedir. Bilindiği gibi risk, arzu edilmeyen sonuçlar ile bağlantılıdır. Halbuki volatilite, belirsizliğin bir ölçüsü olarak müspet bir sonuçtan da kaynaklanabilmektedir. Bu belirgin farklılık çoğu zaman gözden kaçmaktadır. Yine volatilitenin iyi ya da mükemmel bir risk ölçüsü olmamasının diğer bir sebebi, volatilitenin yalnızca bir dağılımın yayılımına ilişkin olması ve bu dağılımın şekli hakkında hiçbir bilgiye sahip olmamasıdır. Bunun tek istisnası ise, yalnızca ortalama ve standart sapma ile ampirik dağılımın yeniden üretilebildiği normal veya lognormal dağılımdır. (Poon, 2005, s. 1-2).

Volatilite, niteliği itibarıyla soyut bir kavramdır. Bu kavram, geleneksel piyasa oyuncuları tarafından kullanılan doğrusal ticaret paradigmasına göre farklılık sergilemektedir. Fakat birçok piyasa yatırımcısı, volatilitiyi ve bunun opsiyon fiyatları üzerindeki etkisini anlamadan işlem yapmakta, volatilite onlara karşı hareket ettiğinde ise, mutsuz bir şekilde



şşırmaktadır. Hatta bu yatırımcılar, volatiliteden kaynaklanan olumsuz fiyat hareketlerini, piyasa yapımcılar veya diğer piyasa unsurları tarafından dolandırılmak şeklinde algılamaktadır (Passarelli, 2012, s. 55).

Basit bir anlatımla, dayanak vadeli işlem sözleşmesinin fiyatı önemli ölçüde dalgalanıyorsa, hem daha fazla kâr hem de daha fazla zarar etme olasılığı söz konusudur. Burada volatilité yüksek olduğundan, opsiyon primleri de daha pahalı olma eğilimine girmektedir. Benzer şekilde satıcılar, volatilitenin arttığı bu dönemlerde, kısa pozisyona sahip bir opsiyon için daha fazla prim talep etmektedir. Sonuç olarak, opsiyon primlerinin yükselmesi, risk ve ödülün eşit derecede büyütülmesinden kaynaklanmaktadır (Garner & Brittain, 2009, s. 7). O hâlde yatırımcılar, tarihsel bakış açısıyla, volatilité nispeten düşükken bir satım opsiyon sözleşmesi (put option) satın alabilir, çok yükseldiğinde ise volatilitenin düşeceği beklentisi ile bahse konu opsiyonu satabilir. Böylece hem düşük hem de yüksek volatilité döneminde avantaj sağlanabilir. Buna benzer bir yatırım stratejisi, alım opsiyon sözleşmeleri (call options) için uygulanabilir. Ancak opsiyon sözleşmelerinin, dayanak varlığın fiyatına ait volatilitenin yönünün yanı sıra dayanak varlığın fiyatının yönüne ilişkin de risk taşıdıkları unutulmamalıdır.

Volatilité, bulunduğu model ya da formüllerde, Yunan alfabesindeki “küçük sigma harfi ( $\sigma$ )” ile gösterilmektedir. Bu simge, olasılık kuramı ve istatistik biliminde standart sapmayı temsil etmektedir. Nitekim volatilité, geçmişte gerçekleşen veya gelecekte beklenen getirilere ait yıllık yüzdesel fiyat değişimlerini ifade etmektedir. Bu nedenle çalışmada volatilité kavramı; gerçekleşen (tarihsel) volatilité ve zımnı (örtük-beklenen) volatilité olmak üzere iki başlık halinde detaylı olarak açıklanmıştır.

### **1.1.1. Gerçekleşen (Tarihsel) Volatilité**

Gerçekleşen volatilité kavramı, ilk olarak Fung & Hsieh (1991) ve Andersen & Bollerslev (1998) tarafından kullanılmıştır (Kayalidere, 2013, s. 8). Bu volatilité; bir hisse senedi, borsa katılım fonu, endeks veya vadeli işlem sözleşmesinin geçmişte ne kadar hızlı hareket ettiğini ifade etmektedir. Genellikle günlük yüzdesel fiyat değişimlerinin standart sapması ya da varyansı şeklinde ölçülmektedir. Yaygın olarak kabul görmesine rağmen bu tanım, garip sonuçların ortaya çıkmasına da neden olmaktadır. Örneğin, bir hisse senedinin her gün aynı oranda artması durumunda, tarihsel volatilitesi sıfır olarak hesaplanmaktadır (Lehman & McMillan, 2011, s. 171). Standart sapmanın, uç değerlerden aşırı derecede etkilendiği de unutulmamalıdır.

Gerçekleşen volatilitiyi elde etmek için kısa vadeli getirilerin standart sapmasını hesaplamak gerekmektedir. Aşağıdaki adımlar ise, bu süreci özetlemektedir (Augen, 2008, s. 50-51):

1- İlk olarak standart bir zaman dilimi ( $\Delta_t$ ) seçilir. Bu zaman dilimi, bir gün/hafta/ay/çeyreklik vb. olabilir. Daha sonra yıllık zaman dilimi sayısı bulunur. Bu sayı, formülde “tf” olarak belirtilir.

2- Her bir zaman diliminin getirisi hesaplanır. Örneğin, günlük zaman diliminin kullanıldığı bir durumda, 1. gün kapanış fiyatı  $C_1$  ve 2. gün kapanış fiyatı  $C_2$  ise, kapanıştan kapanışa getiri şu şekilde elde edilir:

$$R = \ln(C_2/C_1) \quad (1.1)$$

3- “ $R_0, R_1, R_2, \dots, R_n$ ” getirileri ayrı ayrı hesap edildikten sonra bunların ortalama değeri bulunur. Bu doğrultuda aşağıdaki formül uygulanır:

$$R_{avg} = \frac{1}{N+1} (R_0 + R_1 + R_2 + \dots + R_n) \quad (1.2)$$

4- Son olarak istatistiki açıdan yansız ağırlıklandırma kullanılarak standart sapmaya yani gerçekleşen volatiliteye ulaşılır:

$$\sigma = \sqrt{tf} \times \sqrt{\frac{1}{n} [(R_0 - R_{avg})^2 + (R_1 - R_{avg})^2 + \dots + (R_n - R_{avg})^2]} \quad (1.3)$$

Örneğin, 21 adet kapanış fiyatı dolayısıyla da 20 adet getiri söz konusu ise, standart sapma formülünde “n=19” olarak yer almaktadır. Anlaşılacağı üzere formülde belirtilen “tf”, volatilité hesaplamasını yıllık hale getirmektedir. Günlük kapanış fiyatlarının kullanılması halinde “tf”, 252 ya da 365 olarak alınabilmektedir. Şayet gerçekleşen volatilité %25 olarak tespit edilmişse, menkul kıymete ait fiyatın takip eden 12 ay içerisinde %25 aralığında artması veya azalması beklenmektedir.

Formül 1.3’de getirilere ait volatilitenin zamanın karekökü kullanılarak ölçeklendirilmesi, bahse konu getirilerin geometrik Brownian hareketine göre hareket ettikleri varsayımına dayanmaktadır (Redhead, 1997, s. 285). Bununla beraber bazı yatırımcılar, menkul kıymetler üzerine yazılan

opsiyon sözleşmelerinin teorik fiyatlarını saptamak amacıyla gerçekleşen volatilite değerini bir opsiyon modeline bağlamaktadır (Kaepfel, 2002, s. 63).

Tarihsel volatilitenin tespitinde, çoğunlukla yukarıda açıklanan klasik yöntem tercih edilmektedir. Bazı araştırmacılar ise, günlük volatiliteyi temsilen gerçekleşen getirilerin karesini kullanmıştır. Öte yandan Parkinson (1980), tarihsel volatiliteyi hesaplariken günlük en yüksek ve en düşük fiyatları dikkate almış; Yang & Zhang (2000), fiyatlandırma formülüne açılış sıçramasını da dâhil etmiş; Andersen (2000) ise, yüksek frekanslı verilerde volatilitenin daha öngörülebilir hale geldiğini ileri sürmüştür.

Gerçekleşen volatilite, örnekleme meydana getiren serinin gözlem aralığının daralmasına bağlı olarak daha doğru bir şekilde hesaplanmaktadır. Gün içi yüksek frekanslı verileri elde etmenin zor olduğu dönemler için günlük kapanış fiyatlarından hareketle hesaplanan karesel getirilerin tercih edildiği görülmektedir. Ancak tahmin edilen volatilitenin gerçekleşen volatiliteyi açıklama gücü dikkate alındığında, bu yöntemin oldukça yetersiz kaldığı hem teorik (Lopez, 2001) hem de ampirik (Blair vd., 2001; Andersen & Bollerslev, 1998) olarak tespit edilmiştir. Bu doğrultuda Blair vd., (2001), günlük getirilerin karelerinin kullanılması yerine gün içi beşer dakikalık getirilere ait karelerin seçilmesinin, tahmin edilen volatilitenin gerçekleşen volatiliteyi açıklama gücünü ( $R^2$ ), 3-4 kat civarında arttırdığını dile getirmiştir (Kayalidere, 2013, s. 8-9).

Tarihsel volatilite, getirilere ait ortalama etrafındaki değişkenliğin statik bir ölçüsü olduğundan, yapılan hesaplamalar yeni bilgiler ışığında değişmemektedir. Ayrıca, getiri serisinin ortalama, varyans ve kovaryansının zaman içinde değişmesine izin verilmemektedir. Bu nedenle getiri serisinin durağan olduğu yani farklı dönemler üzerinden sabit istatistiksel momentlere sahip olduğu varsayılmaktadır. Seri durağan ise, ortalama ve varyansın hesaplanmasında kavramsal açıdan bir sorun bulunmamaktadır. Fakat seri durağan değilse, tarihsel ortalama, uzunluğun bir fonksiyonu haline gelebilmektedir. Böylece getirilere ait ortalama, varyans ve kovaryans, tahmin hatasına konu olmaktadır. Dolayısıyla varyans ve kovaryanslar hesaplanırken, bir sonraki bilgi iyi bir şekilde tanımlanmadığından, koşulsuz ikinci momentlerin gerçeğe ilişkin herhangi bir veri sağlaması olası görünmemektedir. Nitekim geçmiş volatilite eşit olmayan uzunluktaki zaman dilimlerinde yeniden hesaplandığında, bunların zamanla değiştiği göze çarpmaktadır. Sonuç olarak bu durum, tarihsel volatilite modellerinin doğruluğunun sorgulanmasına yol açmaktadır (Giannopoulos, 2000, s. 42-43).

### 1.1.2. Zımnî (Örtük, Beklenen) Volatilite

Gerçekleşen volatilite belli bir önem derecesine sahip olsa da, zımnî volatilite ( $\sigma_{\text{zımnî}}$ ), opsiyon ticaretine temel teşkil etmektedir. Bilindiği gibi gerçekleşen volatilite, menkul kıymetlere ait geçmiş fiyat hareketlerine dayanmaktadır. Buna karşın zımnî volatilite, menkul kıymetler üzerine yazılan opsiyon sözleşmeleri için güncel piyasa fiyatlarını kullanmaktadır. Dolayısıyla gerçekleşen volatilite geriye doğru bakmakta iken, zımnî volatilite piyasanın geleceğe yönelik beklentilerini yansıtmaktadır (Kaepfel, 2002, s. 65). Gerçekten de opsiyon piyasaları etkin ve fiyatlandırma modelleri doğrusa, zımnî volatilite, dayanak varlığın gelecekteki oynaklığını doğru bir şekilde yakalamaktadır (Blenman & Wang, 2012, s. 2).

Zımnî volatilite, günlük opsiyon alım-satım faaliyetlerinden ortaya çıkmaktadır. Bu kapsamda dayanak varlığa ait getirilerin, cari tarihten opsiyonun sona ermesine kadar olan süreçte hangi ölçüde dalgalanacağını ölçmektedir. Black-Scholes ya da Binomial opsiyon fiyatlandırma modellerinde, gözlemlenemeyen tek parametre olan volatilite terimini hesaplamak suretiyle elde edilen zımnî volatilite, opsiyonun kalan ömrü boyunca tahmin edilen bir volatilite değerini ifade etmektedir.

Zımnî volatiliteyi hesap etmek üzere opsiyon fiyatlandırma modelleri tarafından kullanılan parametreler şunlardır (Karabıyık ve Anbar, 2007, s. 66):

- \*Opsiyonun bitiş tarihine kadar olan vade,
- \*Opsiyonun işlem (kullanım) fiyatı,
- \*Dayanak varlığın fiyatı,
- \*Opsiyonun vadesi boyunca beklenen kâr payları,
- \*Cari faiz oranı,
- \*Cari opsiyon fiyatı,
- \*Opsiyonun vadesi gelmeden önce kullanılıp kullanılmayacağı (Avrupa ya da Amerikan tipi opsiyon),
- \*Opsiyon sözleşmesinin türü (alım ya da satım opsiyonu).

Zımnî volatilite, herhangi bir opsiyon sözleşmesinin nakit fiyatını tespit edebilmek amacıyla, diğer birçok parametreyle birlikte opsiyon fiyatlandırma formüllerinde yer almaktadır. Burada Black-Scholes-Merton yaklaşımı, dayanak varlığın olasılık yoğunluk fonksiyonu için makul düzeyde bir tanımlama gerektirmektedir (Iqbal, 2018, s. 11). Bununla birlikte opsiyonların değerlendirilmesinde standart model olarak kabul edilmekte ve varlık fiyatının, gelecekteki tüm zamanlarda lognormal bir olasılık dağılımı ile sabit bir volatiliteye sahip olduğunu varsaymaktadır (Kwok &

Zheng, 2022, s. 3). Model, çalışmanın ilgili bölümünde ayrıntılı olarak açıklanmıştır. Yine de zımni volatilitenin %10, opsiyonun kalan süresinin ise 1 yıl olduğu farz edilsin. Hesaplamalar sonucunda opsiyon fiyatı, yıl boyunca spot getirinin  $-%10$  ile  $+%10$  arasında kalma olasılığının, %68 olduğunu ima etsin. Burada piyasa yatırımcısı, gelecek yıl boyunca spot fiyatın  $\pm%10$ 'dan daha fazla dalgalanma olasılığının %32'den yüksek olduğunu öngörüyorsa, opsiyon sözleşmesi satın almak suretiyle uzun vadeli volatiliteyi göz önünde bulunduracaktır (Iqbal, 2018, s. 11-12). O hâlde zımni volatilite, bir opsiyon sözleşmesi için verilecek yatırım kararını etkilemektedir. Ayrıca bu volatilite, zaman içinde ve bir opsiyon sözleşmesine olan talep artıp azaldıkça değişebilmektedir (Fontanills & Gentile, 2002, s. 31).

Son yıllarda volatilitede sık sık ya da büyük çapta yaşanan değişimler nedeniyle, volatilite riskinden korunma olanağı sağlayan finansal araçlara olan ihtiyaç artmıştır (Karabıyık ve Anbar, 2007, s. 63). Bu kapsamda geliştirilen volatilite ve varyans swapları, getirisi tarihsel volatilitenin bir fonksiyonu olan türev sözleşmeleri ifade etmektedir. Zımni volatilite açısından bakıldığında ise, volatilite endeksleri üzerine yazılan vadeli işlem ve opsiyon sözleşmeleri, pür volatilite ortamında pozisyon alma imkânı sunan ve getirisi zımni volatilitenin bir fonksiyonu olan türev sözleşmeleri belirtmektedir (Bossu, 2014, s. 65-67).

Zımni volatilite değerindeki bir artış, piyasada korku ile ilişkilendirilmektedir. Düşüş ise, yatırımcılar açısından iyimserliğe ve rehavete işaret etmektedir. Bu nedenle zımni volatilite, genellikle piyasa ile ters yönde hareket eden bir gösterge olarak algılanmaktadır (Cipollini & Manzini, 2007, s. 2). Öyle ki Şikago Opsiyon Borsası (Chicago Board Options Exchange, CBOE) tarafından 1993'ten bu yana yayınlanan VIX endeksi, günümüz finansal piyasalarında "korku endeksi" olarak da anılmaktadır.

## **1.2. VOLATİLİTEYE İLİŞKİN BAZI TEMEL KAVRAMLAR**

Volatiliteye ilişkin temel kavram ve özelliklerin bilinmesi, gerçekleştirilecek volatilite tahminlerinin daha doğru ve tutarlı olmasını sağlamaktadır. Her ne kadar finansal varlıkların kendilerine has özellikleri olsa da, volatiliteyi karakterize eden belli başlı kalıplar bulunmaktadır. Bu nedenle araştırmacılar, gerçekleşen ya da zımni volatiliteye dair bu kalıpları kullanabilecekleri çeşitli modeller tasarlamaktadır.

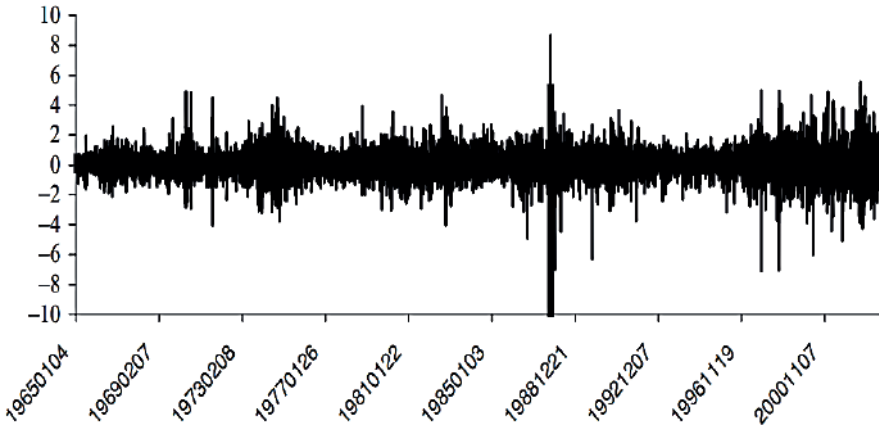
Yapılan çalışmalar incelendiğinde, volatilitenin; kümelenme özelliği gösterdiği, zaman içinde sabit olmadığı, ortalamaya dönme eğilimi sergilediği, lognormale yakın dağıldığı ve uzun hafızalı bir sürece sahip

olduğu görülmüştür. Bununla birlikte başta pay piyasaları olmak üzere çoğu piyasada, volatilité ile getiriler arasında asimetrik ve negatif yönlü korelasyonlar belirlenmiştir. Volatilité ile işlem hacmi arasında ise, güçlü ve pozitif yönlü bir ilişki söz konusudur (Sinclair, 2013, s. 36).

Bu çalışmada, ilgili literatür göz önünde bulundurulmak suretiyle volatilitéye ilişkin temel kavramlar; volatilité kümelenmesi, volatilité asimetrisi: kaldıraç ve geri bildirim etkisi, volatilitéde ortalamaya dönüş eğilimi, çarpıklık, basıklık ve kalın kuyruk özelliği, volatilitenin kalıcılığı (uzun dönem hafıza etkisi), volatilitenin ortak hareket özelliği ve yayılma etkisi ile volatilité gülümsemesi başlıkları altında sırasıyla açıklanmıştır:

### 1.2.1. Volatilité Kümelenmesi

Finans teorisinde, bir varlığın fiyatı, varlığa ilişkin gelecekte beklenen gelirlerin bugünkü değerlerine göre hesaplanmakta olup; bu fiyat, zaman içinde değişkenlik sergilemektedir. Çünkü ilerleyen süreçte, yatırımcıların varlığa yönelik beklentilerini değiştiren yeni bilgi ya da haberler yayınlanmaktadır. Bilgi ya da haberlerin içeriği ve ulaşma hızı dalgalandığından, volatilité de zaman içinde dalgalanmaktadır. Örneğin, kriz dönemleri daha fazla haber bültenine karşılık gelmekte, özellikle kötü haberler kümeler halinde ortaya çıkma eğilimine girmektedir (Bauwens vd., 2012, s. 15). Bu bağlamda volatilité kümelenmesi, finansal piyasalardaki volatilitenin kümeler halinde ortaya çıkma eğilimini ifade etmektedir. Buna göre her iki işaretten büyük getirileri büyük getiriler, küçük getirileri küçük getiriler takip etmektedir (Mandelbrot, 1963, s. 418). Dolayısıyla yüksek volatilitéye sahip bir dönemi çalkantılı bir dönemin, düşük volatilitéye sahip bir dönemi ise sakin bir dönemin izlemesi beklenmektedir (Poon, 2005, s. 7). Şekil 1.1'de S&P 100 endeksinde 1965-2000 yılları arasında meydana gelen volatilité kümelenmeleri gösterilmiştir:



Şekil 1. 1: S&P 100 Günlük Endeks Getirilerinde Volatilité Kümelenmesi

**Kaynak:** (Poon, 2005, s. 7)

Şekil 1.1'e bakıldığında, S&P 100 günlük endeks getirilerinin eşit değişimler göstermek yerine belirli dönemler itibarıyla topak/yumru bir görünüme sahip olduğu anlaşılmaktadır. Kümelenme özelliğini yansıtan bu görünüm, getiri serisine ait volatilite ya da varyansın otokorelasyonlu olduğuna işaret etmekte ve volatilitenin ortalamaya dönme eğiliminin bir sonucu olarak karşımıza çıkmaktadır (Gatheral, 2006, s. 2). İlk olarak Engle (1982) tarafından uygulanan ARCH (Autoregressive Conditional Heteroscedasticity) modelinin isminde yer alan “*Autoregressive*” ifadesi, yüksek ya da düşük volatilitenin devam etme eğilimine atıfta bulunmaktadır. Bunun yanında “*Conditional*”, zaman içindeki bir noktaya göre anlamı taşımakta, “*Heteroscedasticity*” ise, ilgili dönem boyunca sabit olmayan (değişen) bir volatiliteyi betimlemektedir (Poon, 2005, s. 7).

Volatilite kümelenmesi, toplumsal normların yanı sıra takvime bağlı makroekonomik duyuruların sebep olduğu gün içi kalıplara sahiptir. Bu kalıplar, kararlı gün içi ARCH modelleri oluşturmak suretiyle yüksek frekanslı verilerden faydalanmayı zorlaştırmaktadır. Yine de günlük gerçekleşen değişimler, gün içi örüntüler karşısında güçlüdür (Shephard, 2005, s. 22). Öyle ki Diebold & Nerlove (1989) ve Gallant vd. (1991) yüksek frekanslı verilerdeki ARCH etkilerinin varlığını, kümeler halinde piyasaya ulaşan bilginin miktar ya da kalitesinden veyahut bilginin varışı ile piyasa tarafından işlenmesi arasında geçen süreden yararlanarak açıklamaya çalışmıştır (Aydemir, 2002, s. 7).

Fiyat değişimlerine yol açan bilgi ya da haberlerin, eşit zaman dilimleri yerine toplu olarak gelmesi, kümelenmeyi desteklemektedir (Brooks, 2019, s. 498). İlaveten Engle vd. (1990), volatilite kümelenmesinin, piyasa katılımcılarının bilgiyi işleme sürecinden kaynaklandığını dile getirmiştir. Tahmin edileceği gibi yeni bilgiye ulaşma hızı, uyum sağlama becerisi ve bu bilgiyi işleme süreci yatırımcıdan yatırımcıya farklılık sergilemektedir. Bu nedenle volatilite kümelenmesi, finansal piyasaların stilize edilmiş bir özelliği olarak ön plana çıkmaktadır.

Volatilite kümelenmesi hakkında bilinmesi gereken diğer hususlar ise şunlardır (Sinclair, 2013, s. 38-39):

- \*Kümelenme, gelişmekte olan piyasalara nazaran gelişmiş piyasalarda daha büyük olma eğilimindedir.
- \*Kümelenme, ayı piyasalarında daha belirgindir. Ancak otokorelasyonlar, bu piyasalarda daha hızlı bozulmaktadır.
- \*Piyasalarda yaşanan çökme ve paniklemeler esnasında, otokorelasyonlar en hızlı şekilde bozulmaktadır.

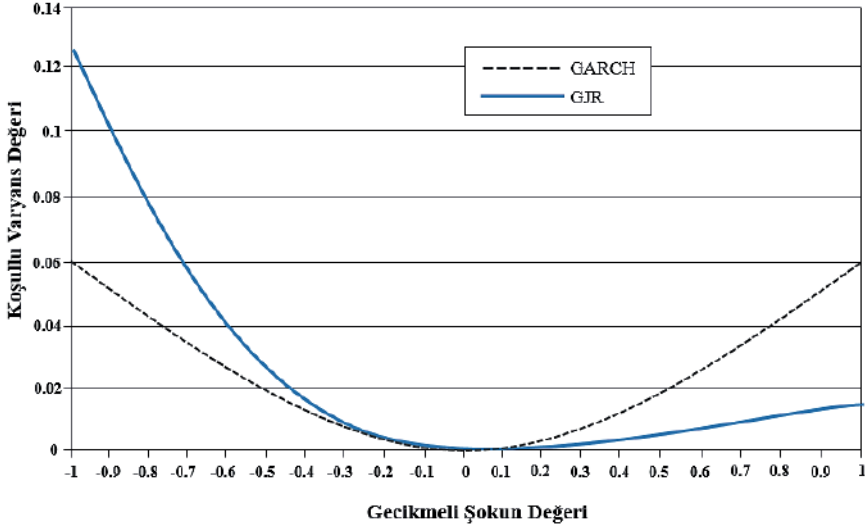
### 1.2.2. Volatilite Asimetrisi: Kaldıraç ve Geri Bildirim Etkisi

Piyasaya ulaşan olumlu ve olumsuz haberlerin, finansal varlığın oynaklığını farklı büyüklüklerde etkilemesi halinde, volatilite asimetrisi ortaya çıkmaktadır. Bu kapsamda belirli bir düzeydeki olumsuz bilgi ya da haberin, aynı seviyedeki olumlu gelişmeye göre daha fazla volatiliteye neden olması, kaldıraç etkisi olarak ifade edilmektedir (Mazıbaş, 2005, s. 13). Kaldıraç kavramına yapılan bu göndermede, hisse senedi değerinde yaşanan bir düşüş ile birlikte borç/öz sermaye oranının yükselmesi ve bunun sonucunda, firma riskini üstlenen ortakların gelecekteki nakit akışlarını daha riskli olarak algulamaları etkili olmuştur (Brooks, 2019, s. 521). Geri bildirim etkisinde ise, volatiliteye gelen pozitif şokların negatif getirilere yol açtığı varsayılmaktadır. Bu doğrultuda volatilitede yaşanan artışların gelecekte beklenen hisse senedi getirilerinin artmasına neden olması, mevcut hisse fiyatlarının ise geleceğe yönelik beklentilerle uyumlu olarak düşmesi gerekmektedir (Pathak & Deb, 2020, s. 2). Dolayısıyla volatilitenin piyasa tarafından fiyatlandırıldığı bir durumda, oynaklıkta beklenen bir artışın öz sermaye getiri oranını yükseltmesi ve buna bağlı olarak hisse senedi fiyatının düşmesi beklenmektedir (Aboura & Chevallier, 2013, s. 132). Bu hipoteze göre nedensellik, volatiliteden fiyata doğru gerçekleşmektedir. O hâlde volatiliteye yönelik pozitif şoklar, gelecekteki risk primini attırmalı; şayet temettüleri aynı kalırsa, hisse senedinin fiyatı düşmelidir (Kalotychou & Staikouras, 2009, s. 16). Yine büyük negatif hisse senedi getirileri, büyük pozitif hisse senedi getirilerine kıyasla daha yaygın görünmektedir. Bu asimetrik realite de, geri bildirim etkisi üzerinden açıklanmaktadır (Ataş ve Arlı, 2022, s. 2218).

Bir getiri serisinde kaldıraç etkisi varsa, volatilite tahmin modelinde bu etkinin göz önünde bulundurulması, dolayısıyla geleneksel ARCH ve GARCH modellerinin kullanılmaması gerekmektedir (Mazıbaş, 2005, s. 13). Çünkü geleneksel ARCH ve GARCH modelleri tarafından şokun büyüklüğü dikkate alınmakta fakat işareti (yönü) ihmal edilmektedir. Yani olumlu ve olumsuz şoklara karşılık koşullu varyans tepkisinin simetrik olduğu varsayılmaktadır. Hâlbuki gerçek dünyada, olumlu bilgi şoklarına kıyasla olumsuz şokların volatiliteyi daha fazla arttırdığı görülmektedir. Bu nedenle asimetrik etkiyi de hesaba katan volatilite tahmin modelleri geliştirilmiştir (Ertuğrul, 2019, s. 63). Nitekim simetrik ya da asimetrik bir modelden hangisinin kullanılacağını belirlemek amacıyla Engle & Ng (1993) tarafından bir dizi test önerilmiştir. Bu testler, volatilitedeki asimetri için işaret ve boyut yanlılığı testleri olarak bilinmekte ve genellikle getiri serisine uygun GARCH modelinin kalıntılarına uygulanmaktadır (Brooks, 2019, s. 523).



EGARCH ve GJR-GARCH gibi volatilite asimetrisi içeren modellerin, standart GARCH'a göre daha iyi performans sergiledikleri Poon & Granger (2003, 2005) ve Poon (2005) tarafından dile getirilmiştir. Brooks (2019) tarafından ise, S&P 500 getirileri kullanılarak, standart GARCH ve GJR modelleri için volatilite asimetrisi, karşılaştırmalı olarak analiz edilmiştir. Bu kapsamda standart GARCH ve GJR modellerine ilişkin haber etki eğrileri Şekil 1.2'de gösterilmiştir (Brooks, 2019, s. 524):



Şekil 1. 2: Standart GARCH ve GJR Modellerinde Haber Etki Eğrileri

Kaynak: (Brooks, 2019, s. 525)

Şekil 1.2'de yer alan eğriler, katsayı tahminleri ile koşulsuz varyansa göre ayarlanmış gecikmeli koşullu varyans kullanılarak, tahmini koşullu varyans denklemi aracılığıyla çizilmiştir. Anlaşılabileceği gibi GARCH haber etki eğrisi (kesikli siyah çizgi), sıfır noktasına göre simetrik bir yapıdadır. Bundan dolayı belirli büyüklükteki bir şokun işareti ne olursa olsun, gelecekteki koşullu varyans üzerinde aynı etkiye sahip olacaktır. Diğer taraftan GJR haber etki eğrisi (koyu mavi çizgi) asimetrik bir yapıdadır. Dolayısıyla olumsuz bilgi şokları, aynı büyüklükteki olumlu şoklara göre gelecekteki volatilite üzerinde daha fazla etkiye sahip olacaktır (Brooks, 2019, s. 525).

Yüksek frekans tabanlı volatilite ve korelasyon ölçekleri üzerinden de koşullu varyans tahmini gerçekleştirmek mümkündür. Bilindiği üzere kopula fonksiyonları, tesadüfi değişkenler arasındaki bağımlılığı modellemede kullanılmaktadır. Bu kapsamda parametrik kopulalar, eliptik dağılım ailesine mensup Gauss ve Student-t kopulaları ile arşimedyan yaklaşıma dayalı Clayton ve Gumbel kopulalarından meydana gelmektedir.

Finansal getiri bağımlılığının asimetrisi dikkate alındığında, Gauss ve Student-t kopulaları kısıtlayıcı görünmektedir. Öte yandan arşimedyan kopulalar; asimetrik olmaları, kolayca türetilibilmeleri ve ilişkisel olmaları bakımından ön plana çıkmaktadır. Bir kuyrukta diğerinden daha fazla bağımlılık sergileme yeteneğine sahip olan bu kopulalar, olumsuz olayların olumlu olaylardan daha fazla bir arada toplandığı finansal analizlerde uygulanabilmektedir (Banulescu-Radu & Dumitrescu, 2019, s. 266-267).

Volatilite asimetrisine katkı sağlayan diğer faktörlerin tespit edilmesi, yeterli derecede asimetriyi dikkate alan daha gerçekçi volatilite tahmin modellerinin geliştirilmesine olanak tanımaktadır (Cochran vd., 2019, s. 12). Bu doğrultuda volatilite asimetrisine yönelik uluslararası verilere bakıldığında, kamuoyuna sunulan raporların da asimetrik bir yapıda olduğu anlaşılmaktadır. Öyle ki Dzielinski vd. (2011) tarafından yapılan araştırmada; servis edilen rapor, bülten ya da haberlerin daha çok olumsuz içeriğe sahip oldukları, bu durumun ise, özel yatırımcıların aşırı tepki vermesine yol açtığı ifade edilmiştir. Nitekim ABD, İngiltere ve Japonya gibi gelişmiş ülkelerde belirlenen yüksek volatilite asimetrisinde; çok sayıda özel yatırımcının, düzenli analist raporlarının ve kesintisiz haber akışlarının mevcudiyeti etkili olmuştur. Açıkçası daha çok özel yatırımcının piyasaya gireceği ve haber akışlarının giderek artacağı düşünüldüğünde, küresel volatilite asimetrisinin de zaman içinde yükselmesi şaşırtıcı olmayacaktır.

### 1.2.3. Volatilitede Ortalamaya Dönüş Eğilimi

Ortalamaya dönüş eğilimi, piyasada yaşanan gelişmeler sonucunda meydana gelen volatilitenin, genellikle normal seviyesine geri döneceğine atıfta bulunmaktadır (Engle & Patton, 2001, s. 239). Bu kapsamda yüksek volatilite dönemlerinin ardından düşük volatilite döneminin, düşük volatilite dönemlerinden sonra ise yüksek volatilite döneminin gelmesi beklenmektedir (Majmudar & Banerjee, 2004, s. 4). Bu beklenti, volatilitenin kümelenmesi ile tutarlılık sergilemektedir. Çünkü volatilitenin kümelenmesine göre, uzun süreli yüksek volatilite dönemleri, nispeten daha sakin volatilite dönemleri tarafından serpiştirilmektedir.

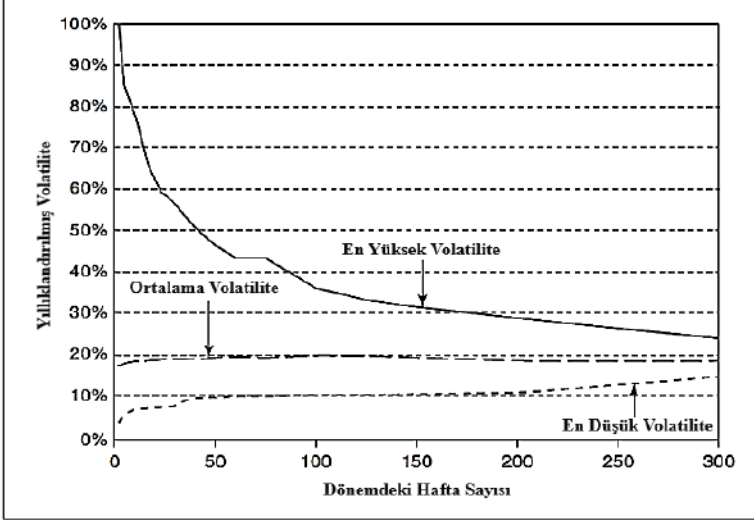
Ortalamaya dönüş eğiliminin daha iyi anlaşılması bakımından hava durumu analojisi kullanılabilir. Örneğin, bugünkü en yüksek hava sıcaklığının 50 derece olduğu ve yarınki en yüksek hava sıcaklığının tahmin edileceği varsayalım. Seri korelasyona göre, yarınki en yüksek hava sıcaklığı 50 derece olarak öngörülebilir. Gerçek dünyada, bugün olanlar ile yarın olacaklar arasında bir ilişki olduğundan ve bir günden diğerine önemli ölçüde değişim gerçekleşmediğinden, bu seçim makul görünmektedir. Başka bir örnekte, en yüksek hava sıcaklıklarının iki gün önce 48, dün 50 ve bugün 52 derece olduğu; yarınki en yüksek hava sıcaklığının ise 47, 50 ya

da 53 dereceden birinin olacağı ve buna bağlı olarak tahmin yapılacağı varsayılın. Mevcut momentumu göre, yarınki en yüksek hava sıcaklığı 53 derece olarak öngörülebilir. Bu seçim de makul görünmektedir. Son olarak, yılın bu zamanındaki en yüksek hava sıcaklıklarına ait ortalamanın 45 derece olduğu bilgisi de verilsin. Gelen bu yeni bilgiye göre, 47 derece seçeneği, ilk iki seçimden daha makul görünmektedir. Çünkü bugünkü en yüksek sıcaklık, ortalama en yüksek sıcaklıktan daha fazladır. Dolayısıyla yapılacak akılcıca bir tahminin, bugünkü en yüksek sıcaklıktan daha düşük olması yani ortalamadan uzaklaşmak yerine ortalamaya doğru hareket etmesi beklenmektedir. Hava durumu tahmininde geçerli olan bu eğilim, finansal piyasalarının merkezinde yer alan volatilite olgusu açısından da geçerlidir (Natenberg, 2012, s. 102-105).

Birçok gerçek ya da finansal varlığın ortalamaya dönüş özelliği barındırdığına dair kanıtlar bulunmaktadır (Bessembinder vd., 1995, s. 361). Bu bağlamda Sinclair (2013), getiri serisindeki ortalamaya dönüşün varlığının Campbell vd. (1997) gibi varyans oran testleri aracılığıyla ortaya çıkartılabileceğini; Fouque vd. (2000), vade büyüdüğünde, volatilitenin hızlı bir şekilde ortalamaya döndüğünü; Zhou vd. (2013) ise, volatilitenin ortalamaya dönüş hızının, ortalamadan sapma derecesi ile doğru orantılı olduğunu dile getirmiştir.

Engle & Patton (2001)'a göre, çok uzun vadeli volatilite tahminleri ortalama volatilite düzeyine yakınsamaktadır. Ortalamaya dönüş eğiliminden kaynaklanan bu yakınsama, sıradan geometrik Brownian hareketinden daha gerçekçi bir volatilite evrimi tanımlamaktadır (Derman & Miller, 2016, s. 372).

Tipik bir volatilite evrimi, kısa zaman ufkunda daha büyük, uzun zaman ufkunda ise daha küçük değişimler içeren konik bir şekle sahiptir. Volatilitenin terim yapısını gösteren bu şekil, belirli bir zaman aralığı için en düşük, en yüksek ve ortalama volatiliteyi içermektedir. Bu kapsamda 2001-2010 dönemi için S&P 500 endeks getirileri kullanılarak elde edilen ve volatilitenin ortalamaya dönüş eğiliminin kolay bir şekilde fark edildiği Şekil 1.3 aşağıda sunulmuştur (Natenberg, 2014, s. 391):



Şekil 1.3: S&P 500 Endeks Getirileri için Volatilitenin Terim Yapısı  
Kaynak: (Natenberg, 2014, s. 390)

Şekil 1.3'de, volatilitenin terim yapısı yani belirli bir zaman ufkunda belirli bir aralığa düşme olasılığı gösterilmiştir. Dolayısıyla Şekil 1.3'de, 2 haftadan 300 haftaya kadar değişen zaman dilimleri için minimum, maksimum ve ortalama volatiliteler yer almaktadır. Buna göre 2001-2010 dönemindeki her olası 2 haftalık zaman ufkunda, minimum volatiliteler %5, maksimum volatiliteler %100'ün bir miktar üzerinde, ortalama volatiliteler ise %18 olarak belirlenmiştir. Öte yandan aynı dönemdeki her muhtemel 300 haftalık zaman ufkunda; minimum volatiliteler %14, maksimum volatiliteler %24 ve ortalama volatiliteler %19 olarak tespit edilmiştir (Natenberg, 2014, s. 389-391). Zaman ufkunun uzadıkça normalleşme eğiliminin arttığı bu durum, volatilitenin, uzun vadede ortalama düzeyine yaklaştığı gerçeğini yansıtmaktadır.

Son olarak, özellikle kriz dönemlerinde, pay piyasalarına ilişkin volatiliteler endeks değerleri oldukça yüksek seyretmektedir. Bu gibi dönemlerde, ortalamaya dönüş genellikle daha yavaş gerçekleşmektedir (Hilpisch, 2016, s. 12). Ayrıca, volatiliteler üzerine yazılan vadeli işlemler, ortalamaya dönüşten dolayı temel endeks ile doğrusal bir yapıda olmayıp; bu sözleşmelere ait deltalar %100'den önemli ölçüde düşük hesaplanmaktadır (Bennett, 2014, s. 119).

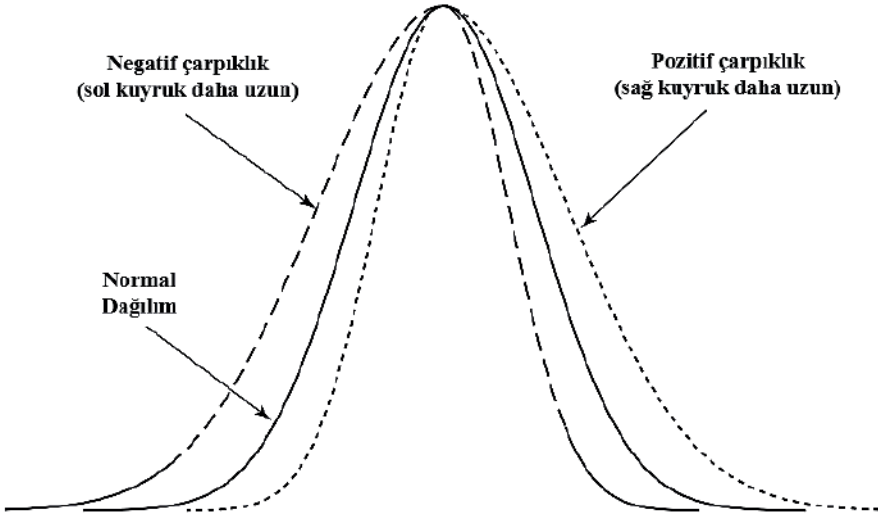
#### 1.2.4. Çarpıklık, Basıklık ve Kalın Kuyruk Özelliği

İstatistik biliminde kullanılan moment kavramı, fizik dünyasındaki moment kavramından gelişmiş olup; bir veri setine ait dağılımın doğası hakkında fikir vermektedir. Bu nedenle ortalama, varyans, çarpıklık ve

basıklık gibi bazı özellikler ile herhangi bir dağılımı karakterize etmek mümkündür. Ortalama, beklenen bir değer olarak dağılımın birinci momentini ifade etmektedir. Varyans ise, ortalama değer etrafındaki dağılımı/saçılımı yakalamaya çalışan ikinci merkezsel moment olarak karşımıza çıkmaktadır. Türev araçlara temel teşkil eden varyans (ya da karekökü alınarak hesaplanan standart sapma), finansal varlıkların volatilitésinin belirlenmesinde kullanılmaktadır. Normalize edilmiş üçüncü moment olarak bilinen çarpıklık, veri setine ait dağılımın, normal dağılıma göre orantısızlığını göstermektedir. Bu kapsamda dayanak varlığın hareketi ile volatilitési arasındaki ilişkiyi açıklamaktadır. Standardize edilmiş dördüncü moment olan basıklık ise, dağılım eğrisinin, normal dağılıma göre daha uzun ve sivri mi yoksa daha kısa ve yassı mı olduğunu ortaya koymaktadır. Dolayısıyla dayanak varlığa ait volatilitenin büyüklüğü hakkında bilgi sağlamaktadır (Shover, 2012, s. 46-47).

Bir veri setini oluşturan gözlemler normal bir dağılıma sahip ise, bu veri seti, birinci ve ikinci momentleri aracılığıyla tamamen tanımlanabilmektedir. Çünkü aynı ortalama ve varyansa sahip iki farklı normal dağılım bulunmamaktadır (Brooks, 2019, s. 101). Buna karşın Mandelbrot (1963) ve Fama (1965) tarafından finansal zaman serilerinin normal dağılmadıkları tespit edilmiştir (Aydemir, 2002, s. 4). Nitekim günümüzde, finansal zaman serilerine ait getirilerin, daha çok negatif çarpıklığa ve yüksek basıklığa (kalın/şişman kuyruklara) sahip oldukları bilinmektedir (Sinclair, 2013, s. 40). Bu kapsamda herhangi bir finansal değişkene ait dağılımın karakterize edilmesi için üçüncü ve dördüncü momentlere ihtiyaç duyulmaktadır.

Çarpıklık veyahut normalize edilmiş üçüncü moment, merkeze göre dağılım eğrisinin hangi yöne ne kadar kaydığını ifade etmektedir. Normal bir dağılıma ait çarpıklık değeri sifıra eşittir. Öte yandan eğrinin tepe noktası sol tarafa yakınsa yani sağ taraftaki kuyruk daha uzunsa, bu dağılım pozitif olarak çarpıktır. Bunun tersine tepe noktası sağ tarafa yakınsa yani sol taraftaki kuyruk daha uzunsa, bu dağılım ise negatif olarak çarpıktır (Augen, 2008, s. 73). Şekil 1.4'de pozitif çarpık, negatif çarpık ve normal dağılıma sahip eğriler sunulmuştur:



Şekil 1. 4: Pozitif Çarpıklık, Negatif Çarpıklık ve Normal Dağılım  
Kaynak: (Natenberg, 2014, s. 483)

Getiri serisine ait dağılımın negatif çarpık olması, aşırı negatif getirilerin aşırı pozitif getirilere nazaran daha fazla gerçekleşme olasılığına sahip olduğu anlamına gelmektedir. Dağılımın pozitif çarpık olması ise, aşırı pozitif getirilerin aşırı negatif getirilerden daha fazla gerçekleşme olasılığı taşıdığını izhar etmektedir (Cochran vd., 2019, s. 24). Bununla birlikte ideal bir normal dağılımda, benzer büyüklükteki pozitif ve negatif getiriler açısından benzer gerçekleşme olasılıkları söz konusudur.

Standart sapma ile normalize edilmiş ortalamanın üçüncü momenti şeklinde tanımlanan çarpıklık, aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır (Sinclair, 2013, s. 85):

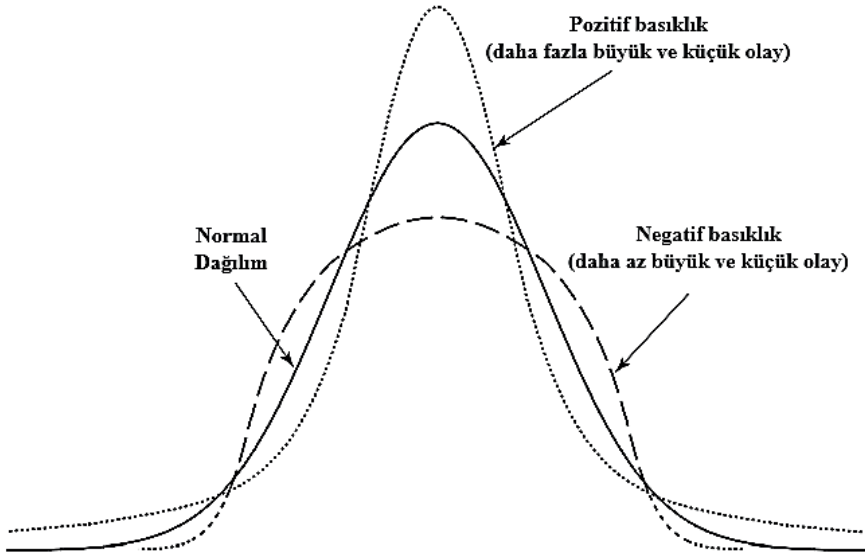
$$\mu_3 = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^3}{\sigma^3} \quad (1.4)$$

$$\text{Var}(\mu_3) \approx \frac{6}{N} \quad (1.5)$$

“N” boyutundaki bir örneklemede, çarpıklık varyansını elde etmek amacıyla Formül 1.5 uygulanmaktadır. Oluşturulma biçimi göz önüne alındığında, çarpıklık değeri pozitif veya negatif olabilmektedir. Bununla beraber dağılım simetrik ise, çarpıklık değeri sıfır olarak hesaplanmaktadır.

Basıklık veyahut normalize edilmiş dördüncü moment, dağılım eğrisinin zirvesini ölçmekte, bu eğrinin ne kadar uzun ve sivri ya da kısa ve yassı

olduğunu ifade etmektedir. Bu doğrultuda yüksek ve dar bir tepe noktası pozitif basıklığa, düşük ve düz bir tepe noktası ise negatif basıklığa işaret etmektedir (Augen, 2008, s. 73). Öte yandan normal bir dağılıma ait basıklık katsayısı 3'e eşittir. Bundan dolayı "basıklık katsayısı - 3" şeklinde bir basıklık fazlalığı (excess kurtosis) ölçüsü tanımlamak mümkündür. O hâlde normal dağılıma ait basıklık fazlalığı sifıra eşittir ve bu dağılım mezokurtik olarak nitelendirilmektedir. Bunun yanı sıra basıklık katsayısı 3'ten büyük (pozitif) dağılımlar leptokurtik, 3'ten küçük (negatif) dağılımlar ise platikurtik dağılımlar olarak bilinmektedir (Bennett, 2014, s. 202). Şekil 1.5'de pozitif basıklığa, negatif basıklığa ve normal dağılıma sahip eğriler gösterilmiştir:



Şekil 1. 5: Pozitif Basıklık, Negatif Basıklık ve Normal Dağılım

Kaynak: (Natenberg, 2014, s. 484)

Kalın ya da şişman kuyruklu dağılımlar olarak da isimlendirilen leptokurtik dağılımlarda, getirilerin büyük hareketler üretme olasılığı normalden daha yüksektir (Cochran vd., 2019, s. 24). Bu durum, çok küçük ve çok büyük fiyat değişimlerinin artmasından, yani orta seviye fiyat değişimlerinin azalmasından kaynaklanmaktadır (Augen, 2008, s. 73). Bununla birlikte finansal zaman serilerinin basıklığı 3'ün oldukça üzerindedir ve bu serilerin dağılımlarında kalın kuyruklar görülmektedir. Literatürde söz konusu basıklık fazlalığını modellemek için Pareto ve Levy gibi normalden daha kalın kuyruklara sahip dağılımlar önerilmektedir (Aydemir, 2002, s. 3-4).

Standart sapma ile normalize edilmiş ortalamanın dördüncü momenti şeklinde tanımlanan basıklık, aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır (Sinclair, 2013, s. 85):

$$\mu_4 = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^4}{\sigma^4} \quad (1.6)$$

$$\text{Var}(\mu_4) \approx \frac{24}{N} \quad (1.7)$$

“N” boyutundaki bir örnekleme, basıklık varyansını tespit etmek üzere Formül 1.7 kullanılmaktadır. Oluşturulma biçimi dikkate alındığında, basıklık katsayısı sadece pozitif veya sıfır olabilmektedir. Şayet dağılım simetrik ise, basıklık değeri üç olarak bulunmaktadır.

Özellikle hisse senedi getiri dağılımlarının, negatif çarpıklığa ve pozitif basıklığa (kalın/şişman kuyruklara) sahip oldukları, stilize edilmiş bir gerçek olarak ön plana çıkmaktadır (White vd., 2010, s. 238). Yapılan araştırmalarda, bu varlıklara ilişkin basıklık derecesinin, 4 ile 50 arasında değiştiği bulgulanmıştır (Kayalıdere, 2013, s. 12). Bu nedende çarpıklık ve basıklık parametrelerinin kullanılmasının, finansal modellerin performansını iyileştireceği düşüncesi yaygın bir şekilde kabul görmüş ve bu parametreler, örneklem çarpıklığı ve basıklığı adı altında modellere dâhil edilmiştir (White vd., 2010, s. 231). Fakat geleneksel çarpıklık ve basıklık parametrelerinin, aşırı değerlere karşı oldukça hassas oldukları bilinmektedir (Poon, 2005, s. 4). Kim & White (2004), geleneksel çarpıklık ve basıklık ölçütlerinin aykırı değerlere karşı duyarlı olduğunu, bu durumun ise modellerin güvenilirliğini şüpheli hale getirdiğini ileri sürmüştür. Sonuç olarak, León vd. (2005) tarafından, GARCH tipi modellerde kullanılmak üzere örneklem çarpıklığının ve basıklığının koşullu karşılıkları geliştirilmiştir (White vd., 2010, s. 231). Christoffersen vd. (2007) ise, pozitif getiri olasılığını tahmin etmek isteyen araştırmacılara, koşullu momentleri dikkate alan modeller önermiştir.

### 1.2.5. Volatilitenin Kalıcılığı (Uzun Dönem Hafıza Etkisi)

Uzun hafıza süreçlerine olan ilginin kökeni, 1950’li yıllara dayanmaktadır. Bu dönemde, Hurst (1951) tarafından hidroloji alanındaki akış verilerinin kalıcılığını ve rezervuarların tasarımı anlamak amacıyla uzun hafıza modelleri analiz edilmiştir. Hurst (1951)’a göre uzun hafızanın varlığı, gözlemlenen otokorelasyonların kalıcılığı bağlamında ampirik bir yaklaşımla tanımlanabilmektedir. Bu yaklaşım, 1980’li yıllardan itibaren



ekonometristlerin uzun hafıza modellerine yönelmelerinde etkili olmuştur (Baillie, 1996, s. 6-7). Öte yandan uzun hafıza süreçleri, zaman ya da frekans alanında ifade edilmektedir. Zaman alanında, hiperbolik bozulan otokorelasyon fonksiyonları şeklinde kendini gösteren uzun hafıza; frekans alanında, “0,  $\pi$ ” aralığındaki tüm bilgilerin yer aldığı bir spektrum biçiminde ortaya çıkmaktadır (Banerjee & Urga, 2005, s. 13-14).

Finansal varlık getirileri, eş zamanlı olmayan veya zayıf ticaret nedeniyle gecikmeli olsalar dahi otokorelasyonlu değildir (Poon, 2005, s. 7). Buna karşın mutlak getiriler ya da getirilerin karelerinde; istatistiki açıdan anlamlı, pozitif yönlü ve yavaş yavaş azalan bir otokorelasyon fonksiyonu mevcuttur (Cont, 2007, s. 290). Bu durum, gerçekleşen volatilite şoklarının uzun bir süre devam ettiği anlamına gelmekte olup; volatilitenin uzun dönem hafıza etkisi olarak bilinmektedir. Özellikle yüksek frekanslı verilerde, volatilite oldukça kalıcıdır ve koşullu varyans süreci birim kök davranışına yakınlık sergilemektedir. Bu nedenle kalıcılığı modellemede, birim kök ve uzun hafıza süreci olmak üzere iki farklı öneri gündeme gelmiştir. Otoregresif koşullu değişen varyans, ARFIMA ve stokastik volatilite modellerinde ikinci öneri dikkate alınmıştır (Aydemir, 2002, s. 4).

Bilindiği gibi en az “d” kez farkı alınmak suretiyle durağan hale gelen bir seri, belirli bir “d” mertebesinden bütünleşmektedir. İstatistiki olarak “ $\rho_T$ ”nin, “ $x_t$ ” ve “ $x_{t-T}$ ” arasındaki korelasyonu belirttiği bir durumda, “n” büyüdükçe  $\sum_{T=1}^n \rho_T$  değeri bir sabite yakınsamakta ise, “ $x_t$ ” zaman serisinin kısa bir hafızaya sahip olduğu belirtilmektedir. Diğer taraftan “n” sonsuza giderken, pozitif “d < 0.5” değerleri için  $\sum_{T=1}^n \rho_T / T^{2d-1}$  değeri bir sabite yakınsamakta ise, bir uzun hafıza sürecinin kovaryans durağan olduğu anlaşılmaktadır. Ne var ki “d  $\geq$  0.5” değerleri için bahse konu seri, kovaryans durağan sayılmamaktadır. Bu bağlamda standart bir GARCH modeli, kare getirilere dayalı olan kısa hafızalı bir süreçtir. Ancak Taylor (1986), mutlak getirilere ait otokorelasyonların, kare getirilerinkinden daha yavaş bozulduğunu tespit etmiştir. Yani mutlak getirilerin, kare getirilerden daha uzun bir hafızaya sahip olduğunu belirlemiştir. Bundan dolayı Ding vd. (1993), uzun hafızalı süreçler için mutlak getirilere dayalı parçalı/kesirli/fraksiyonel bütünleşik modeller tavsiye etmiştir (Poon, 2005, s. 45).

Finansal zaman serilerinde parçalı süreçler üzerine yapılan ilk çalışmalar incelendiğinde, Granger & Joyeux (1980) ile Hosking (1981) tarafından yapılan araştırmalar göze çarpmaktadır. Engle & Bollerslev (1986) ise, koşullu varyans sürecindeki şokların kalıcılığını dikkate almak amacıyla, Bollerslev (1986)’in geliştirilmiş otoregresif koşullu değişen varyans

modelini, “bütünleşik GARCH (IGARCH)” olarak yeniden formüle etmiştir. Buna karşın şokların kalıcılığını yakalayabilen IGARCH modelinde, koşulsuz varyans bulunmamaktadır (Poon, 2005, s. 45). Ayrıca, mutlak getirilere ait otokorelasyonların  $I(0)$  veya  $I(1)$  paradigmaları üzerinden düzgün bir şekilde açıklanamayabileceği endişesi, Baillie vd. (1996)’nin “parçalı bütünleşik GARCH (FIGARCH)” modelini geliştirmelerine yol açmıştır (Hwang & Satchell, 2007, s. 249-250). FIGARCH modelinde, hiperbolik azalan bir yeniliğin, gelecek dönemleri doğrusal şekilde etkilediği varsayılmaktadır (Calvet & Fisher, 2008, s. 23). Bununla birlikte parçalı olarak farkı alınan bir süreç,  $I(0)$  ve  $I(1)$  paradigmaları arasında ek bir esneklik sağlamakta (Baillie, 1996, s. 6) ve bu süreç, birim kök sürecinden ziyade uzun hafızayı yansıtmaktadır (Thupayagale, 2011, s. 292). Özetle FIGARCH modelinde, koşullu varyans denkleminin gecikme yapısında,  $L$ ’nin gecikme operatörü olduğu  $(1 - L)^d$  şeklinde parçalı bir fark operatörü kullanılmaktadır (Harvey, 2007, s. 352). Başka bir çalışmada ise, Bollerslev & Mikkelsen (1996), Nelson (1991)’un üssel GARCH modelinden yola çıkarak, asimetrik ilişkiye izin veren “FIEGARCH” modelini tanıtmıştır. Sonuç olarak, 1980’li yıllardan itibaren hem ARCH/GARCH tipi modellerde hem de ARFIMA ve stokastik volatilité modellerinde, uzun hafıza özelliği göz önünde bulundurulmuştur.

Uzun hafızalı bir sürecin temel karakteristiği, kısa hafızalı ARMA modellerinin aksine katsayıların hiperbolik oranda azalmasıdır. Dolayısıyla uzun hafıza süreci, volatilitéyi ölçen zaman serilerinde, yüksek kalıcılığı yakalamak üzere yaygın bir şekilde kullanılmaktadır (Hwang & Satchell, 2007, s. 253). Ancak FIGARCH ve ARFIMA modelleri gibi uzun hafızalı volatilité süreçlerinde, örneklem boyutunun sonsuz olduğu varsayılmaktadır. Oysa pratikte, böyle bir durum söz konusu değildir (Hwang & Satchell, 2007, s. 258). Yine sonsuz değişken gecikmelerine bir dizi sonsuz boyutlu kısıtlama getirilerek uzun hafızaya ulaşılmaktadır. Kısıtlamalar ise, parçalı fark operatörleri tarafından iletilmektedir. Parçalı fark operatörleri, uygun bir matematiksel numarayı ifade etse dahi kesin bir ekonomik yorumdan yoksundur. Böylece parçalı fark operatörlerinin kullanılması, uzun ve kısa vadeli özellikleri çözmeyi zorlaştıran bazı yapay karışıklıklar getirebilmektedir. İlâveten bu modeller, çok değişkenli süreçlere kolayca evrilememekte ve birçok gözlemin kaybedilmesine yol açan uzun bir oluşturma periyodu gerektirmektedir (Corsi, 2009, s. 175).

Son olarak, çoğu volatilité tahmin modelinde, doğrusal olmayan etkiler ile uzun hafıza özelliği aynı anda tanımlanamamıştır. Doğrusal olmayan etkilerin ihmal edilmesi ya da yanlış ifade edilmesi, literatürde yapısal kırılmalar bağlamında incelenmiştir. Buna göre düzeylerde veya kalıcılıkta

ihmal edilen değişimler, sahte yüksek kalıcılık olarak isimlendirilen tahmini yüksek kalıcılığa neden olmaktadır (McAleer & Medeiros, 2008, s. 105). Öyle ki sahte yüksek kalıcılık özelliği sergileyen ve doğrusal olmayan bazı kısa hafıza modelleri bulunmaktadır. Bunlar; volatilite kırılmaları, volatilite bileşenleri ve rejim değişim modelleri olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu modeller, parçalı bütünlük ve doğrusal olan modellere göre farklı volatilite dinamiklerine sahiptir (Poon, 2005, s. 54).

### **1.2.6. Volatilitenin Ortak Hareket Özelliği ve Yayılma Etkisi**

Ekim 1987'de; ABD, Hong Kong, Avustralya, İspanya, Birleşik Krallık, Kanada ve Yeni Zelanda pay piyasalarında meydana gelen çöküş sırasında, bu piyasalardaki oynaklıkların birlikte hareket ettikleri görülmüştür. Finansal küreselleşme sonucunda ise, finansal varlık fiyatları uluslararası faktörlere daha fazla bağımlı hale gelmiş ve fiyat dalgalanmalarının bir piyasadan diğer piyasalara yayılımı oldukça kolaylaşmıştır. Bu nedenle akademisyenler, uluslararası yatırımcılar ve politika yapımcılar tarafından; portföy yönetimi, risk yönetimi, varlık tahsisi ve varlık fiyatlandırma modellerinin geliştirilmesi gibi konularda, volatilite aktarım mekanizmaları incelenmiştir.

Yapılan araştırmalara ve finansal uygulamalara bakıldığında; gelişmekte olan piyasaların genellikle gelişmiş piyasalar tarafından yönlendirildiği, gelişmekte olan piyasalar arasında getiri ve volatilite bağlantılarının mevcut olduğu, aynı bölgedeki gelişmekte olan piyasalar arasında ise, volatilitelere nazaran getirilerde daha fazla yayılmanın gerçekleştiği belirlenmiştir. Gelişmiş ve gelişmekte olan piyasalarda, yüksek işlem hacmine sahip hisse senetlerinin, bilgi ve haberlere daha hızlı tepki verdiği, büyük sermayeli hisse senetlerinin ise, diğer piyasalarda işlem gören küçük sermayeli hisse senetlerine öncülük ettiği tespit edilmiştir (Gebka, 2009, s. 459-463). Ayrıca, ayı piyasalarında ve finansal krizlerde, hem getiriler hem de volatiliteler arasındaki korelasyonların artma eğilimine girdiği saptanmıştır (Poon, 2005, s. 8).

Eş hareketlilik veya yayılma durumunda, bir piyasada işlem gören finansal varlıklara ait getiriler, diğer piyasalardaki getiri değişimlerine tepki vermekte ve bu piyasadaki getirilerde bazı sıçramalar yaşanmaktadır. Yaşanan sıçramalar, volatilite yayılımından kaynaklanan getiri dalgalanmalarını öngörebilen yatırımcıların, yüksek kârlar elde etmesine olanak tanımaktadır (Gebka, 2009, s. 458). Dolayısıyla volatilite yayılımı, özellikle çok kısa vadede ve küresel çalkantılı dönemlerde, oynaklık tahmini açısından potansiyel bilgi kaynağı olarak dikkate alınmaktadır (Poon, 2005, s. 65). Bunun yanında volatilite yayılımının seviyesi zaman içinde değişebilmekte, finansal piyasalarının gelişim düzeyleri farklı olduğundan,

piyasaların konumuna göre farklılık sergileyebilmektedir (Cai vd., 2009, s. 303).

Ortak hareket ve yayılma etkisi, finansal varlık getirilerinin varyans-kovaryans yapısını tahmin etmede, çok değişkenli bir çerçeveyi desteklemektedir. Bu kapsamda varlıklara ait karşılıklı bağımlılık ile varlıklar arasındaki volatiliteler ve kovaryans dinamiklerini modellemede, çok değişkenli GARCH spesifikasyonları önerilmektedir (Kalotychou & Staikouras, 2009, s. 16-17). Çünkü her bir seriyeye ait koşullu varyansın diğer serilerden tamamen bağımsız şekilde modellendiği tek değişkenli bir modelden ziyade çok değişkenli bir modelin tercih edilmesi, herhangi bir piyasadaki volatilitenin diğer piyasalardaki volatilitelere yol açıp açmadığını belirleme imkânı sunmaktadır. Finansal varlıklara ve piyasalara ait getiriler ve volatiliteler birlikte hareket etme eğiliminde olduklarından, modellemedeki bu ortak yaklaşım, her bir seriyi ayrı ayrı modellemeden daha verimli görünmektedir. Ayrıca bu modeller, koşullu varyansların yanı sıra koşullu kovaryanslar için de tahmin sağladığından, faydalı sayılabilecek bir dizi farklı özellik daha barındırmaktadır (Brooks, 2019, s. 544-545).

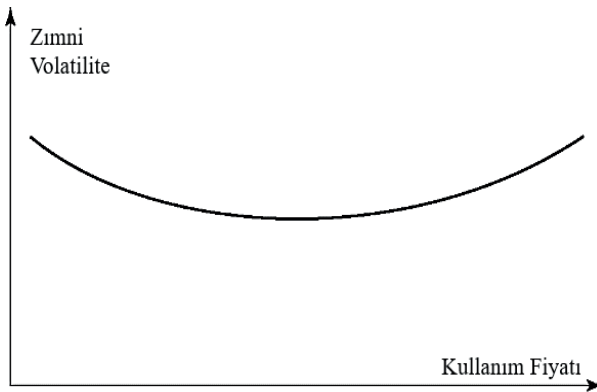
Çok değişkenli GARCH modelleri, finansal uygulamalarda ve akademik çalışmalarda geniş bir yer edinmektedir. Örneğin, farklı varlık ya da piyasalarda meydana gelen volatiliteler arasındaki olası hareketlerin ve yayılmaların tespitinde, zamanla değişen varlık fiyatlandırma modellerinde ve portföy riskinin daha etkin bir şekilde yönetilmesinde bu modellerden yararlanılmaktadır (Mills & Markellos, 2008, s. 326). Buna karşın çok değişkenli volatiliteler modelleri bazı zorluklar içermektedir. Parametreler arasındaki doğrusal olmayan ilişkiler, tutumluluk ve varyans-kovaryans matrisini pozitif tanımlı tutma gerekliliği, bu modellerdeki en büyük zorluklar olarak karşımıza çıkmaktadır (Poon, 2005, s. 65). Yine de farklı piyasalardaki volatilitelerin birlikte hareket etme eğilimleri, bu piyasalardaki çapraz korelasyonları modelleme bakımından, çok değişkenli modellerin önemini ortaya koymaktadır (Xiao & Aydemir, 2007, s. 3).

### 1.2.7. Volatiliteler Gülümsemesi

Volatiliteler gülümsemesi, zımni volatilitelere ilişkin bir kavramdır. Daha önce ifade edildiği gibi zımni volatiliteler, piyasanın gelecekte ne kadar dalgalanabileceğine dair piyasa görüşünü yansıtmakta ve opsiyon fiyatlandırma modellerinde diğer değişkenler ile birlikte yer almaktadır. Bunun yanında opsiyon sözleşmelerinin, işlem gördükleri piyasalarda, yukarı ya da aşağı yönde değişen çeşitli kullanım fiyatları bulunmaktadır (Gunn, 2009, s. 261). Burada kullanım fiyatları, spot/cari piyasa fiyatları ile yapılan karşılaştırmalar sonucunda, bir opsiyon sözleşmesinin kârda (in the money - ITM), zararda (out of the money - OTM) veya başabaş (at the

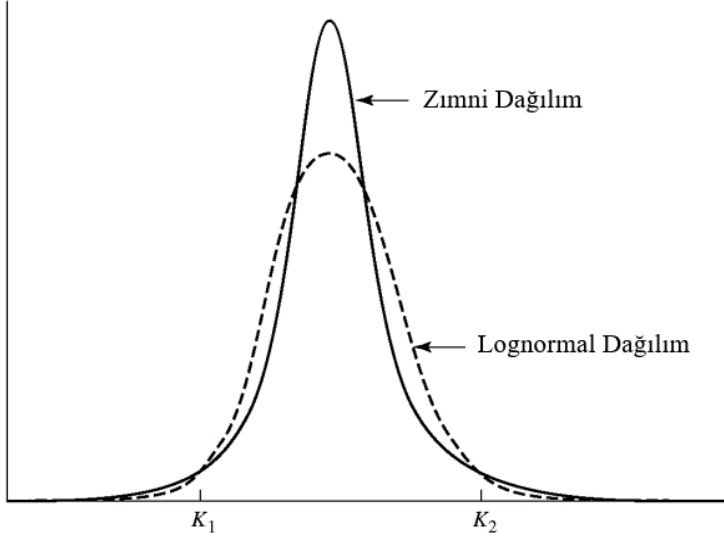
money - ATM) olup olmadığını göstermektedir. Bir alım opsiyonu açısından bakıldığında, dayanak varlığın spot piyasa fiyatı kullanım fiyatından yüksekse, opsiyon sözleşmesi kârda; düşükse, zarardadır. Bir satım opsiyonu açısından bakıldığında, dayanak varlığın spot piyasa fiyatı kullanım fiyatından düşükse, opsiyon sözleşmesi kârda; yüksekse, zarardadır. Spot piyasa fiyatı kullanım fiyatına eşit olduğunda ise, opsiyon sözleşmesi başabaştır.

Volatilite gülümsemesinde, zımni oynaklık, kullanım fiyatının bir fonksiyonu olarak görülmektedir. Bundan dolayı volatilite gülümsemesi, opsiyonun sona erme süresinin sabit olduğu bir durumda, farklı kullanım fiyatlarında zımni volatilitenin farklı değerler aldığı bir eğri şeklinde tanımlanmaktadır. Döviz opsiyon piyasalarında gülücük/sırtma şeklinde ortaya çıkan bu eğride, başabaş bir opsiyonun zımni volatilitesi (eğrinin x eksenine en yakın olduğu noktaya karşılık gelen zımni volatilitelik miktarı), kârda veya zararda olan opsiyonların zımni volatilitelerinden (alım ya da satım opsiyonları için eğrinin sağ ve sol taraflarına karşılık gelen zımni volatilitelik miktarları) daha düşüktür (Zhou vd., 2013, s. 3). Bu kapsamda döviz opsiyon piyasalarındaki volatilite gülümsemesi, Şekil 1.6'da sunulmuştur:



**Şekil 1. 6: Döviz Opsiyon Piyasalarında Volatilite Gülümsemesi**  
Kaynak: (Hull, 2012, s. 411)

Şekil 1.6'da gösterilen volatilite gülümsemesi, Şekil 1.7'de düz çizgi olarak yer alan zımni dağılım ile tutarlılık sergilemektedir:

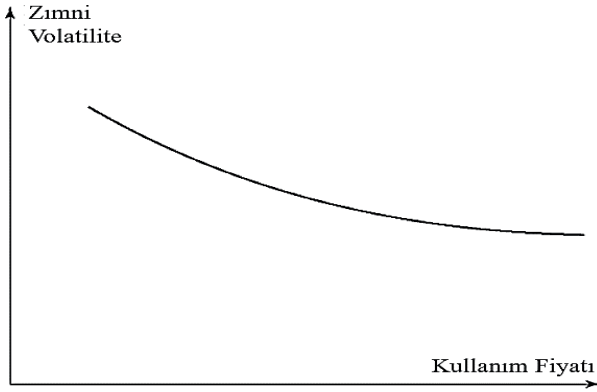


Şekil 1. 7: Döviz Opsiyonları için Zımnî ve Lognormal Dağılım  
Kaynak: (Hull, 2012, s. 412)

Şekil 1.6 ve Şekil 1.7 birlikte incelendiğinde, volatilité gülümsemesi daha net anlaşılmaktadır. Örneğin,  $K_2$  düzeyinde yüksek kullanım fiyatına sahip aşırı zarardaki bir döviz alım opsiyonu, sadece döviz kuru  $K_2$ 'nin üzerindeyken işe yaramaktadır. Döviz kurunun  $K_2$ 'nin üzerine çıkma ihtimali ise, zımnî olasılık dağılımında daha yüksektir. Bu nedenle zımnî dağılımın, opsiyon için daha yüksek bir fiyat vermesi beklenmektedir. Opsiyon fiyatlandırma formüllerine göre yüksek bir fiyat, yüksek bir zımnî volatilité anlamına gelmektedir. Dolayısıyla yüksek kullanım fiyatlı ve aşırı zarardaki bir döviz alım opsiyonunun daha yüksek bir zımnî volatilitéye sahip olması, Şekil 1.6'da gösterilen volatilité gülümsemesine uymaktadır. Diğer taraftan  $K_1$  düzeyinde düşük kullanım fiyatına sahip aşırı zarardaki bir döviz satım opsiyonu, sadece döviz kuru  $K_1$ 'in altındayken kazanç sağlamaktadır. Bu durumun gerçekleşme ihtimali zımnî olasılık dağılımında daha fazla olduğundan, zımnî dağılımın opsiyon için daha yüksek bir fiyat vermesi beklenmekte, yüksek bir fiyat ise yüksek bir volatilitéye işaret etmektedir. Dolayısıyla düşük kullanım fiyatlı ve aşırı zarardaki bir döviz satım opsiyonunun daha yüksek bir zımnî volatilitéye sahip olması, volatilité gülümsemesine uymaktadır (Hull, 2012, s. 411). Ayrıca, döviz piyasasına ait zımnî dağılım lognormal dağılıma nazaran daha kalın kuyruklar barındırdığından, bu piyasada işlem gören aşırı kârdeki alım ya da satım opsiyonları için de volatilité gülümsemesi söz konusudur.

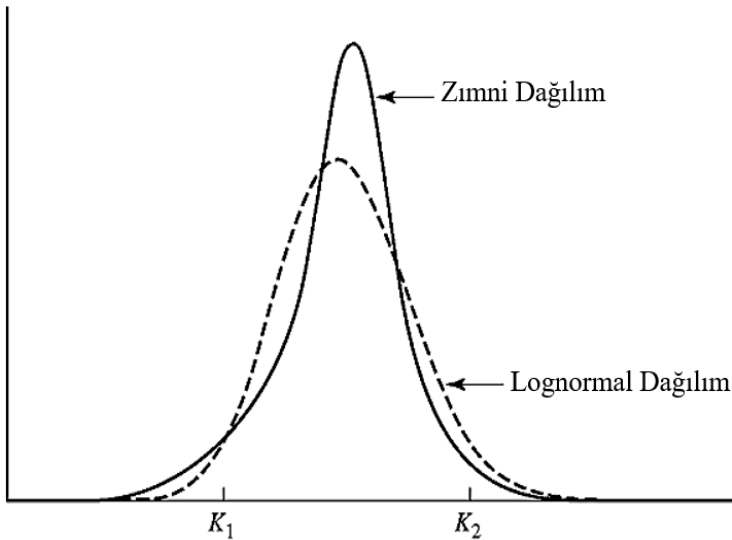
Döviz opsiyon piyasalarının yanı sıra diğer opsiyon piyasalarında da volatilité gülümsemeleri meydana gelmektedir. Diğer piyasalardaki volatilité gülümsemeleri, daha düz veya kavisli olabilmekte, genellikle

sırıttma, nadiren somurtma şeklini alabilmektedir. Her ne şekilde olursa olsun, bu grafiklere gülümseme olarak atıfta bulunmaktadır (Derman & Miller, 2016, s. 132). Örneğin, hisse senedi opsiyon piyasalarındaki volatilite gülümsemesi, aşağı yönde eğimli bir fonksiyonu ifade etmektedir (Hull, 2012, s. 420). Hisse senedi opsiyon piyasalarındaki volatilite gülümsemesi, Şekil 1.8’de sunulmuştur:



Şekil 1. 8: Hisse Senedi Opsiyon Piyasalarında Volatilite Gülümsemesi  
Kaynak: (Hull, 2012, s. 414)

Şekil 1.8’de gösterilen volatilite gülümsemesi, Şekil 1.9’da düz çizgi olarak yer alan zımnı dağılım ile tutarlılık sergilemektedir:



Şekil 1. 9: Hisse Senedi Opsiyonları için Zımnı ve Lognormal Dağılım  
Kaynak: (Hull, 2012, s. 415)

Şekil 1.7'ye bakıldığında, döviz opsiyonlarına ait zımni dağılımın, hem sağ hem de sol tarafta, lognormal dağılıma göre daha kalın kuyruklar içerdiği görülmektedir. Buna karşın Şekil 1.9 incelendiğinde, hisse senedi opsiyonlarına ait zımni dağılımın, sadece sol tarafta, lognormal dağılıma göre daha kalın bir kuyruğa sahip olduğu fark edilmektedir. Bu bağlamda Şekil 1.8 ve Şekil 1.9 birlikte ele alındığında, hisse senedi opsiyon piyasasındaki volatilité gülümsemesi daha kolay anlaşılabilir. Örneğin,  $K_2$ 'lik yüksek kullanım fiyatına sahip aşırı zarardaki bir hisse senedi alım opsiyonu, yalnızca hisse senedi fiyatı  $K_2$ 'nin üzerine çıktığında işe yaramaktadır. Hisse senedi fiyatının  $K_2$ 'yi aşma ihtimali ise, zımni olasılık dağılımında daha düşüktür. Bundan dolayı zımni dağılım opsiyon için daha düşük bir fiyat vermekte, düşük bir fiyat ise düşük bir zımni volatilitéyi izhar etmektedir. Dolayısıyla yüksek kullanım fiyatlı ve aşırı zarardaki bir hisse senedi alım opsiyonu, daha düşük bir zımni volatilitéye karşılık gelmektedir. Diğer taraftan  $K_1$ 'lik düşük kullanım fiyatına sahip aşırı zarardaki bir hisse senedi satım opsiyonu, yalnızca hisse senedi fiyatı  $K_1$ 'in altına indiğinde fayda sağlamaktadır. Bunun gerçekleşme ihtimali zımni olasılık dağılımında daha fazla olduğundan, zımni dağılımın opsiyon için daha yüksek bir fiyat vermesi beklenmekte, yüksek bir fiyat ise yüksek bir volatilitéye işaret etmektedir. Dolayısıyla düşük kullanım fiyatlı ve aşırı zarardaki bir hisse senedi satım opsiyonu, yüksek bir zımni volatilitéye karşılık gelmektedir (Hull, 2012, s. 414). Hisse senedi opsiyonlarında gözlemlenen aşağı yönlü volatilité gülümsemesi, hisse senedi fiyatları ve volatilité arasındaki negatif korelasyon ile açıklanabilmektedir (Bossu, 2014, s. 73).

Yukarıda ifade edilenlerden hareketle; belirli bir vadede, farklı kullanım fiyatları altında ve opsiyon piyasasının türüne göre zımni volatilité düzeyi değişmektedir. Bu durum, tıpkı tahvil piyasasının getiri eğrisi ile tanımlanması gibi opsiyon piyasasının da gülümseme ile tanımlanmasına yol açmıştır. Fakat gülümseme, teori ve uygulama açısından derin ve ilginç bir sorunu gündeme getirmektedir. Bilindiği gibi Black-Scholes-Merton yaklaşımında, bir hisse senedinin volatilitesi, geometrik Brownian hareketine dayalı gelecekteki sabit bir oynaklığı ifade etmektedir. Bu varsayım, aynı dayanak varlığa ve sona erme tarihine sahip tüm opsiyon fiyatlarından elde edilen zımni volatilitelerin aynı olmasını gerektirmektedir (Derman & Miller, 2016, s. 131-133). Ancak sabit volatilité varsayımı, hisse senedi dağılımının leptokurtik karakterini ve volatilité gülümsemesini yakalamada başarısız sayılmaktadır. Kaldı ki diğer her şey sabit iken, opsiyon vadesinin veya kullanım fiyatının değiştirilmesi, zımni volatilitenin sabit olmadığı gerçeğini ortaya koymaktadır (Javaheri, 2015, s. 1-7).



Standart Black-Scholes teorisine göre, volatilite eğrisi tamamen düz bir yapıda olduğundan, gülümsemelerin asla meydana gelmemesi gerekmektedir (Itkin, 2020, s. 4). Ne var ki dayanak varlıkta gözlemlenen volatilite davranışı, bu aykırı varsayım ile çelişmektedir. Literatüre bakıldığında, Black-Scholes teorisine ait sınırlamalarının üstesinden gelebilmek amacıyla, GARCH opsiyon fiyatlandırma modeli gibi yaklaşımlar geliştirilmiştir (Mostafa vd., 2017, s. 154). Yine stokastik volatilite opsiyon fiyatlandırma modeli, Black-Scholes teorisinin uzantılarından bir diğeridir (Poon, 2005, s. 97). Ayrıca, başabaş opsiyon fiyatından elde edilen zımni volatilite de kullanılmaktadır. Fakat gülümseme eğrisi düz olmadığından, başabaş zımni volatilitenin, gelecekteki oynaklığı en iyi şekilde tahmin edemeyebileceği unutulmamalıdır (Bahra, 2007, s. 202). Açıkçası Black-Scholes fiyatı ile piyasa opsiyon fiyatı arasındaki ilişkiyi inceleyen yaklaşımların geçerliliği, önerdikleri alternatif fiyatlandırma dinamiğinin doğruluğuna bağlıdır. Bu noktada tüm sınırlama ve eksikliklerine rağmen Black-Scholes yaklaşımından hesaplanan volatilite, modele dayalı en iyi zımni volatilite tahmini olarak ön plana çıkmaktadır (Poon, 2005, s. 97). Volatilite gülümsemesinin varlığında dahi, Black-Scholes zımni volatilitenin yaygın olarak kullanılması, modelin ikna edici gücünü ve pratik başarısını göstermektedir (Derman & Miller, 2016, s. 133).

Son olarak, volatilite gülümsemesinin yanı sıra vade yapısı da opsiyon ticareti için temel teşkil etmektedir. Çünkü bir opsiyonun zımni volatilitesi, sadece kullanım fiyatına değil aynı zamanda sona erme süresine de bağlıdır. Bu kapsamda volatilite gülümsemesi ile vade yapısının birleşimi, volatilite yüzeyini (volatility surface) oluşturmaktadır. Burada zımni volatilite, hem kullanım fiyatının hem de vadeye kalan sürenin bir fonksiyonu olarak tanımlanmaktadır.

### **1.3. VOLATİLİTENİN ÖNEMİ VE ETKİLERİ**

Volatilite, herhangi bir varlığa ait fiyatın, geçmişte gerçekleşen veya gelecekte gerçekleşmesi muhtemel hareketini göstermektedir. Matematiksel olarak bakıldığında ise, belirli bir sürede, varlık getirilerine ait standart sapma ya da varyansı ifade etmektedir. Bu doğrultuda volatilite, risk ve belirsizliğin temel bir ölçüsü olarak düşünülebilir (Karabıyık ve Anbar, 2007, s. 76). Çünkü finansal varlık yatırımlarını çevreleyen finansal risk ve belirsizliğin bir göstergesi durumundadır (Yıldız ve Dam, 2022, s. 169). Ayrıca, finansal piyasa enstrümanlarına ilişkin bir risk unsuru olarak sıklıkla kullanılmaktadır (Ataş ve Arlı, 2022, s. 2218). Ancak, volatilite ve risk kavramlarının birebir aynı anlama gelmediği unutulmamalıdır.

Volatilite, bir kavram ve olgu olarak modern finansal piyasaların ve akademik araştırmaların merkezinde yer almaktadır. Harry Max Markowitz tarafından 1952 yılında temelleri atılan modern portföy teorisine göre, rasyonel yatırımcılar, belirli bir risk seviyesinde maksimum getiriyi veya minimum risk seviyesinde belirli bir getiriyi hedeflemektedir. Bu bağlamda piyasa risklerinin öncü bir göstergesi olan volatilite, piyasa katılımcıları tarafından sürekli takip edilmektedir (Koy ve Ekim, 2016, s. 2).

Modern portföy teorisinin yanı sıra finansal piyasalarda meydana gelen hızlı büyüme ve yeni finansal araçların ortaya çıkışı da, volatilitenin önemini pekiştirmiştir. Örneğin, 1990'lı yıllarda, volatilite ve varyans swapları gibi yeni volatilite ürünleri tanıtılmıştır (Bennett, 2014, s. 2). 2004 yılında ise, volatilite ticareti yapmak isteyen yatırımcılar için volatilite vadeli işlemleri kullanıma açılmıştır (Lehman & McMillan, 2011, s. 179). Zaman içinde volatilite ticareti finansal piyasalarda yer edinmiş ve ayrı bir varlık alım satımı olarak kabul görmüştür. Bu kapsamda yatırım bankaları, hedge fonlar ve yatırımcılar tarafından piyasa volatilitesi üzerine yönlü bahislerin yapılabildiği bazı yapılandırılmış ürünler oluşturulmuştur (Kalotychou & Staikouras, 2009, s. 18). Günümüzde volatilite; ölçülebilen, yönetilebilen ve ticarete konu olabilen bir varlık sınıfı olarak başlı başına bir odak noktası haline gelmiştir (Lehman & McMillan, 2011, s. 171).

Volatilite türevlerinin bir varlık sınıfı olarak dikkate alınmasında, birtakım özellikleri etkili olmuştur. İlk olarak, pay piyasası oynaklığından, opsiyonlar yerine volatilite türevleri aracılığıyla korunmak ideal görünmektedir. Çünkü opsiyonlar her ne kadar fiyat riskine karşı koruma sağlasa da, Black-Scholes varsayımlarının çoğu gerçek dünyada ihlal edilmektedir. İkincisi, daha önce ifade edildiği gibi volatilitenin ortalamaya dönme eğilimidir. Ortalamaya dönme eğilimi, volatilite ürünlerinin, arbitraj fonları ve diğer tarafsız piyasa oyuncuları tarafından cazip görünmesini sağlamaktadır. Üçüncüsü ise, stokastik volatilite ve stokastik sıçramaların varlığıdır. Bu mevcudiyet, finansal piyasaları yetersiz kılmakta ve optimum getiri elde etmede caydırıcı bir rol oynamaktadır. Sonuç olarak; emtialar, kıymetli madenler, menkul ve gayrimenkul mallar yerine volatilite türevlerini tercih etmek, risk yönetimi ve portföy çeşitlendirmesi açısından faydalı görünmektedir (Kalotychou & Staikouras, 2009, s. 19).

Finansal piyasalarda farklı türde ve çok sayıda türev araç işlem görmesine rağmen son zamanlarda sık sık yaşanan çalkantılı dönemler, yüksek riski beraberinde getirmiştir (Kendirli ve Karadeniz, 2012, s. 96). Örneğin, Covid-19 pandemisi ile birlikte ABD finansal piyasalarında daha önce görülmemiş düzeyde bir volatilite meydana gelmiştir. Öyle ki VIX

volatilite endeksi, 2020 yılının Mart ayında 80 puanın üzerine çıkarak 2008'deki rekoruna yaklaşmıştır. Aynı dönemde Nasdaq Composite ve S&P 500 endeksleri %12 civarında düşmüştür. 16 Mart 2020 tarihinde ise, Dow Jones Sanayi Ortalaması (Dow Jones Industrial Average - DJIA), 124 yıllık tarihinin en kötü ikinci gününü geride bırakmıştır (Baek vd., 2020, s. 1). Anlaşılabileceği üzere günümüz finansal piyasaları, oldukça dramatik şekilde hareket edebilme potansiyeline sahiptir. Bu potansiyelin gerçekleşmesi halinde; hisse senedi fiyatları, faiz oranları ve döviz kurlarında ortaya çıkan yüksek volatilite, genellikle finansal sistemin işleyişinde aksamalara yol açmaktadır. Dolayısıyla volatilitenin yapısını belirlemek ve doğru tahminler elde etmek amacıyla çeşitli çözümler geliştirilmektedir (Kendirli ve Karadeniz, 2012, s. 96).

Doğru volatilite tahminleri; opsiyon fiyatlandırma, optimal portföy seçimi ve riske maruz değer modellemesi dâhil olmak üzere finanstaki birçok uygulama açısından önem taşımaktadır (Thupayagale, 2011, s. 290). Öte yandan volatilitedeki değişimler, varlık fiyatlandırma modellerinden elde edilen denge fiyatları ve ortalama bir yatırımcının riskli bir varlığı elde tutma isteğini etkilemektedir. Bilindiği gibi belirsizlik ya da değişkenliğin çok olduğu piyasalarda, "sürü etkisi" olarak adlandırılan davranış kalıpları daha sık görülmektedir. Sürü etkisi, piyasadaki satışların, diğer yatırımcılar tarafından yapılacak satışlar için iyi bir neden olarak algılanmasına yol açmaktadır. Böylece bu piyasalarda ortaya çıkan panik havası, satış trendine karşı koymak yerine bu trendi büyütmeye yardımcı olmaktadır (Shover, 2012, s. 6). Buna karşın volatilite, finansal yatırımcılara çeşitli fırsatlar da sunmaktadır. Örneğin, artan bir volatilite ile beraber piyasanın yükselmesi halinde, daha fazla varlık satın alınarak veya kısa pozisyonlar kapatılarak bu yükselişten kazanç sağlanabilmektedir. Artan bir volatilite ile beraber piyasanın düşmesi durumunda ise, uzun pozisyonları varlıkların bir kısmı satılarak ya da açığa satış yapılarak getiri elde edilebilmektedir (Gunn, 2009, s. 44). Yine de volatilite, bilgisiz yatırımcılar tarafından mutlaka para kaybetmekle sonuçlanan bir süreç şeklinde değerlendirilmektedir. Hatta volatilite, çoğu yatırımcı tarafından hem bir fırsat hem de bir veba olarak görülmektedir (Shover, 2012, s. 13).

Modern piyasaların temel yapı taşlarından biri olan volatilite paradigması, günümüz finans piyasalarının göz ardı edilemeyen bir gerçeği olarak ön plana çıkmaktadır. Pozitif veya negatif yönde bazı sonuçlar doğuran volatiliteye ilişkin doğru ve güvenilir tahminlerde bulunmak, başarılı bir opsiyon ticaretinin temelini oluşturmaktadır. Finansal piyasalardaki risk kaynaklarının tespit edilmesi, varlık tahsisi ve çeşitlendirme stratejileri açısından da volatilite olgusu önem arz etmektedir. Dolayısıyla volatilitenin altında yatan teorik ve ampirik süreçlerin

araştırılması, finansal piyasaların doğasının tam olarak anlaşılması noktasında fayda sağlamaktadır.

#### 1.4. FİNANSAL PİYASALARDA VOLATİLİTE

1980'li yılların başında Avrupa, Asya ve Latin Amerika'daki bazı gelişmekte olan ülkelerin yaşadıkları başarılı finansal liberalleşme deneyimleri, dünyadaki diğer gelişmekte olan ülkeleri de benzer politikalar geliştirmeleri yönünde teşvik etmiştir (Chen vd., 2014, s. 289). Finansal serbestleşme ve deregülasyon politikaları çerçevesinde, dünyanın dört bir yanındaki ülkelere ait ticaret borsaları daha açık hale gelmiş, küresel ekonomik entegrasyonun düzeyi artmış ve ülkelerin finansal sistemleri arasındaki bağlantılar güçlenmiştir (Chen, 2021, s. 1). Buna paralel olarak ülke ekonomilerinin, finansal piyasa volatilitelerinden geniş kapsamlı bir şekilde etkilenme ihtimali ortaya çıkmıştır. Örneğin, 11 Eylül 2001 tarihinde gerçekleşen terör saldırıları, farklı kıtalarda yer alan finansal piyasalarda büyük çalkantılara neden olmuş ve ülke ekonomileri bu durumdan olumsuz yönde etkilenmiştir. (Poon & Granger, 2003, s. 479). Yine 2008 yılında meydana gelen küresel finans krizi sonucunda, birçok varlık sınıfında önemli gerilemeler yaşanmış ve piyasalar aşırı derecede volatil hale gelmiştir (Manda, 2010, s. 2). İnsanlık tarihinde trajik bir dönemi simgeleyen Covid-19 pandemisi ise, tüm ekonomilerin ve finansal piyasaların hızlı, şiddetli ve yıkıcı bir tahribata uğramasına sebebiyet vermiştir. Pandeminin kontrol altına alınması amacıyla dünya çapında uygulanan tecrit, Büyük Buhran'dan bu yana vuku bulan en kötü ekonomik gerilemeyi tetiklemiştir. Belirsizlik düzeyinde daha önce görülmemiş bir artışa sebep olan Covid-19 pandemisi, finansal piyasa katılımcılarının, doğru volatiliteler tahminlerinde büyük zorluklarla karşılaşmalarına yol açmıştır (Bouri vd., 2020, s. 1).

Finansal piyasa katılımcıları açısından gelecek, çok sayıda risk barındırmaktadır. Birtakım risklerden kaçınmak söz konusu iken, bazı riskler olduğu gibi kabul edilmektedir. Şu hâlde finans teorisi, gerçekte hangi risklerin alındığını ve bu riskler karşılığında ne kadar kazanç beklendiğini araştırmaktadır (Engle, 2010, s. 29). Bu bağlamda finansal piyasalardaki aşırı riskli olaylar ve finansal krizler, 1990'lı yıllardan itibaren daha sık görülmektedir. Dünya ekonomisinin ve finansının bütünleşmesi, her ne kadar kaynak tahsisini daha verimli kılsa da, bu durum, herhangi bir finansal piyasaya ait irrasyonel bir davranışın, diğer finansal piyasalara hızla yayılmasına neden olabilmektedir (Chen, 2021, s. 1). Nitekim politika yapıcılar tarafından, finansal piyasa ve ekonomilere ait kırılganlığın bir barometresi olarak, genellikle piyasa volatiliteler tahminlerine güvenilmektedir (Poon & Granger, 2003, s. 479). Özellikle gelişmekte

olan finansal piyasalarda, artan risk ve belirsizlik problemleri ile daha fazla karşılaşılmakta ve bu piyasalardaki volatilite tahminleri, uzun dönemli yatırım kararlarında etkin bir rol oynamaktadır (Pabuçcu ve Değirmenci, 2018, s. 331).

Gelişmiş ya da gelişmekte olan finansal piyasalarda uygulanan geleneksel varlık getiri modelleri, bir dizi basitleştirici varsayıma dayanmaktadır. Örneğin, geleneksel modellerde, varlık getirilerinin standart bir Brownian hareket sürecini takip ettiği yani normal dağılıma sahip bir Gauss rassal yürüyüş sürecini izlediği varsayılmaktadır. Bilindiği gibi standart bir Brownian hareket sürecinin farklı zaman aralıklarına ilişkin dağılım momentlerinde, volatilitenin zamansal boyutu göz ardı edilmektedir. Bu nedenle herhangi bir zaman aralığının getirilerine ait volatilite üzerinden, zamanın karekökü kuralı kullanılarak, başka bir zaman aralığının getirilerine ait volatilite kolayca tahmin edilebilmektedir. Ancak, varlık getirileri bir Gauss rassal yürüyüş sürecini takip etmediğinde, zamanın karekökü kuralı, gerçek risk seviyesinin doğru olarak hesaplanmasını engellemektedir. Gerçek risk seviyesinin yanlış tahmin edilmesi ise, risk/getiri modellenmesi açısından belirgin sonuçlar doğurmaktadır (Ellis & Sundmacher, 2009, s. 147-148).

Teorik olarak, üstlenilen risk ile beklenen getiri arasında pozitif yönlü bir ilişki bulunmakla birlikte, finansal piyasalardaki yüksek volatilite, genellikle istikrarsızlığın bir göstergesi olarak kabul edilmektedir (Garner & Brittain, 2009, s. 7). Bunun yanı sıra volatilite kavramı, her ne kadar pay piyasaları ile beraber anılsa da, diğer finansal piyasalarda da büyük dalgalanmalar meydana gelebilmektedir. Döviz kurları, bono fiyatları, hisse senetleri ve emtia piyasalarının çoğunda büyük volatilite hareketleri görülebilmektedir (Hacıhasanoğlu, 2003, s. 18). Dolayısıyla volatilite; temelleri, bilgileri ve piyasa beklentilerini yansıtan kaçınılmaz bir piyasa deneyimi olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu doğrultuda hisse senetleri fiyatlarındaki düzeltmeler; ekonomik, politik, parasal vb. yönlerden değişimleri yansıtmaktadır. Aynı zamanda yaşanan değişimlerle ilgili bilgiler, gelecekteki fiyatları karakterize eden piyasa faaliyetlerini tetiklemektedir. Böylece finansal piyasalarda ortaya çıkan süreç; temeldeki değişimlerden, bilgilerin gelişinden ve yeni beklentilerden etkilenmektedir (Kalotychou & Staikouras, 2009, s. 5).

Finansal piyasalardaki süreçlerin merkezinde yer alan birçok yatırımcı, yanlış bir şekilde, satıcılardan daha fazla alıcı olması durumunda fiyatların yükseldiğine veya alıcılardan daha fazla satıcı olması halinde fiyatların düştüğüne inanmaktadır. Oysa tanım olarak, herhangi bir işlemin iki tarafı olduğuna göre, her zaman eşit sayıda alıcı ve satıcıya ihtiyaç

duyulmaktadır. Bu nedenle bir sonraki işlem fiyatı, en yüksek satın alma ve en düşük satış fiyatına göre belirlenmektedir. Her iki fiyat eşitlendiğinde, satın alınacak ya da satılacak diğer fiyat tekliflerinin sayısından bağımsız olarak, alım-satım işlemi gerçekleşmektedir. Bu tür fiyat ayarlamaları, çoğu piyasada uzun süre almasına rağmen borsalarda anında gerçekleşmektedir (Augen, 2008, s. 6). Anında oluşan yeni fiyatlar ise, hızlı ve yoğun dalgalanmalara zemin hazırlamaktadır. Bununla birlikte pay, borçlanma araçları, döviz kuru, kıymetli maden, enerji, kripto varlık veya diğer finansal piyasalarda ortaya çıkan dalgalanmaların düzeyi, gerek piyasada uygulanan kurallara gerekse de piyasanın özelliklerine bağlı olarak değişmektedir. Örneğin, bir gün içinde herhangi bir kripto varlık piyasasında yaşanan maksimum dalgalanma düzeyi ile herhangi bir organize pay piyasasında meydana gelen en yüksek volatilité seviyesi farklılık sergilemektedir. Çünkü organize pay piyasalarında, aşırı volatilitenin yol açtığı sert fiyat hareketlerini sınırlandırmak amacıyla, gün içi hareket aralığını belirleyen fiyat marjları düşürülmektedir. Hatta bazı organize piyasalarda, olağanüstü durumlardan kaynaklanan panik sonucunda bireysel yatırımcıların zarar görmesini engellemek ve aşırı dalgalanmaları önlemek amacıyla, otomatik seans durdurma sistemleri (devre kesiciler) gibi birtakım mekanizmalar üzerinden alım-satım işlemleri geçici olarak durdurulabilmektedir. Bu piyasalarda işlemlerin geçici süreyle askıya alınması; bireysel ve kurumsal yatırımcıların sağlıklı düşünebilmeleri, panikle alım-satım yapmamaları ve doğru bilgiye ulaşmada zaman kazanmaları bakımından önem arz etmektedir. Sonuç olarak, otomatik seans durdurma sistemleri aracılığıyla belirli bir süreliğine sürekli fiyat yönteminden vazgeçilse dahi, bu mekanizmaların kullanılması, piyasadaki aşırı dalgalanmaları yavaşlatmaktadır.



## İKİNCİ BÖLÜM

### VOLATİLİTE TAHMİNİNDE KULLANILAN MODELLER

Finansal piyasalarda volatilitenin tahmin edilmesi hususu, başta akademik araştırmalar olmak üzere opsiyon fiyatlandırma formülleri, optimal portföy seçimi, politika yapıcılarının kararları, düzenleyici çerçevelerin geliştirilmesi ve riske maruz değer modellemesi gibi birçok konuda yakından takip edilmektedir. Artarak devam eden bu ilgi, modern finansal piyasalar açısından volatilitenin merkezi rolünü ortaya koymaktadır. Bununla birlikte günümüz finansal piyasalarının karmaşık ve çapraşık bir yapıda oldukları iyi bilinmektedir. Bundan dolayı volatilitate tahminlerinin, mevcut ticaret ortamı bağlamında yapılmasında fayda bulunmaktadır.

Bir varlığa ait getiri serisinin volatilitesi, bahse konu varlığın hâlihazırdaki ve gelecekteki fiyatlarına temel teşkil etmektedir. Bu nedenle volatilitate sürecinin, başarılı bir şekilde modellenmesi gerekmektedir. Yani modelin, verilerdeki değişen varyans gibi birtakım özellikleri yakalaması icap etmektedir. Bu kapsamda kendi avantajları ve dezavantajları bulunan çok sayıda volatilitate tahmin modeli geliştirilmiştir. Fakat getiri serisinin tüm yönlerini eksiksiz karşılayan bir model henüz tasarlanamamıştır (Mostafa vd., 2017, s. 22).

Volatilitiyi ölçmek, fiyatı ölçmek gibi değildir. Volatilitiyi ölçmek bir sanattır ve çeşitli istatistiksel tahminciler arasından seçim yapılmasını gerektirmektedir. Kesin bir cevap bulmak yerine bir dizi farklı tahmin ediciye bakmak, onların güçlü ve zayıf yönlerini dikkate almak ve her birinin en iyi nerede uygulanacağını bilmek daha doğru bir yaklaşım olarak karşımıza çıkmaktadır (Sinclair, 2013, s. 14). Bu bağlamda ilgili literatür göz önünde bulundurulmuş ve kavramsal çerçeve; zaman serisi tahmin modelleri, otoregresif koşullu değişen varyans tahmin modelleri, zımnî volatilitate tahmin modelleri ve stokastik volatilitate tahmin modelleri olmak üzere dört başlık halinde sunulmuştur:

#### 2.1. ZAMAN SERİSİ TAHMİN MODELLERİ

Volatilitate tahmininde yaygın şekilde kullanım alanı bulan modellerin başında, geçmiş getiri ya da standart sapmanın baz alındığı ve bu doğrultuda istatistiksel yöntemlerin uygulandığı zaman serisi tahmin



modelleri gelmektedir. Bu modeller; uygulama kolaylığı sunmaları, şeffaf bir yapı sergilemeleri ve kimi zaman karmaşık modellere nazaran daha iyi sonuç verebilmeleri bakımından ön plana çıkmaktadırlar (Körs, 2021, s. 18).

Bu çalışmada zaman serisi tahmin modelleri; rassal yürüyüş modeli, tarihsel ortalama modeli, basit hareketli ortalama modeli, ağırlıklı hareketli ortalama modeli, üstel düzeltme modeli, üstel ağırlıklı hareketli ortalama modeli, basit regresyon modeli, otoregresif hareketli ortalama modeli ve otoregresif bütünüleşik hareketli ortalama modeli başlıkları altında sırasıyla açıklanmıştır:

### 2.1.1. Rassal Yürüyüş Modeli

En basit volatilite tahmin modeli, rassal yürüyüş modelidir. Rassal yürüyüş modelinde, ardışık dönem volatiliteleri arasındaki fark, rassal bir gürültü şeklinde modellenmiştir. Dolayısıyla gelecek dönem volatilitesi için yapılacak en iyi tahmin, mevcut volatiliteden meydana gelmektedir (Poon, 2005, s. 32-33). Buna göre (Poon & Granger, 2003, s. 507):

$$\hat{\sigma}_t = \sigma_{t-1} \quad (2.1)$$

Bu modelde “ $\sigma_{t-1}$ ”, “ $\hat{\sigma}_t$ ” için bir tahmin olarak kullanılmaktadır. Şayet volatilite rastgele dalgalanıyorsa, sonraki dönem volatilitelerinin optimal tahmini, basitçe mevcut volatiliteden oluşmaktadır. Anlaşılacağı üzere rassal yürüyüş modeli, gelecek dönem volatilitelerinin, son gerçek volatilite gözlemine göre hiçbir değişikliğe uğramayacağını ileri sürmektedir. Model, ekonometrik tahminlerde karşılaştırmalı bir yöntem olarak alternatif bir kıyaslama sağlamaktadır (McMillan vd., 2000, s. 438).

### 2.1.2. Tarihsel Ortalama Modeli

Rassal yürüyüş modelinin aksine tarihsel ortalama modeli, geçmiş dönemlerin tümünü dikkate alarak volatilite tahmini yapmaktadır (Poon, 2005, s. 33). Buna göre (Poon & Granger, 2003, s. 507):

$$\hat{\sigma}_t = \frac{(\sigma_{t-1} + \sigma_{t-2} + \dots + \sigma_1)}{t-1} \quad (2.2)$$

Bu yaklaşımda, eğer volatilite dağılımı durağan bir ortalamaya sahip ise, volatilitedeki tüm değişimler, geçmiş dönem volatilitelerinin ağırlıklandırılmamış ortalaması üzerinden hesaplanan tarihsel ortalamaya atfedilmektedir (McMillan vd., 2000, s. 438). Diğer bir ifadeyle, geçmiş dönemlere ait fiyat değişimleri gelecekteki fiyat değişimlerinin göstergesi

olduğundan, volatilité tahmini için geçmiş tüm dönemler boyunca gerçekleşen volatilitelerin ortalaması alınmaktadır.

### 2.1.3. Basit Hareketli Ortalama Modeli

Basit hareketli ortalama modeli, daha eski bilgilerin atılması dışında tarihsel ortalama modeline benzemektedir (Poon, 2005, s. 33). Buna göre (Poon & Granger, 2003, s. 507):

$$\hat{\sigma}_t = \frac{(\sigma_{t-1} + \sigma_{t-2} + \dots + \sigma_{t-\tau})}{\tau} \quad (2.3)$$

Burada “ $\tau$ ” değeri yani kullanılan geçmiş bilgilere olan gecikme uzunluğu ya da belirlenen gözlem dönemi, öznél olarak seçilebilmekte veyahut örneklem içi tahmin hatasını en aza indirmeye dayalı olabilmektedir.

### 2.1.4. Ağırlıklı Hareketli Ortalama Modeli

Bu modelde, belirlenen gözlem dönemi içinde bulunan volatilité değerlerine, azalan düzeyde ağırlıklar verilerek gelecek dönem volatilitesi tahmin edilmektedir. Buna göre (Korkmaz ve Bostancı, 2011, s. 6):

$$\hat{\sigma}_t = \frac{\tau \times \sigma_{t-1} + (\tau - 1) \times \sigma_{t-2} + \dots + 1 \times \sigma_{t-\tau}}{[\tau + (\tau - 1) + \dots + 1]} \quad (2.4)$$

Ağırlıklı hareketli ortalama modelinde, basit hareketli ortalama modelinden farklı olarak, yakın geçmişteki volatilité değerlerine daha yüksek, uzak geçmişteki volatilité değerlerine ise daha düşük ağırlıklar verilmektedir. Böylece gözlem dönemi içinde yer alan daha eski volatilité değerleri, gelecek döneme ait volatilité tahminini daha az etkilemektedir.

### 2.1.5. Üstel Düzeltme Modeli

Üstel düzeltme yaklaşımında, ağırlıklı hareketli ortalama modeline benzer şekilde geçmiş volatilité değerlerine azalan düzeyde ağırlıklar verilmektedir. Ancak, üstel düzeltme modelinde, doğrusal olarak azalan bir ağırlıklandırma ziyade tüm geçmiş dönemler için doğrusal olmayan bir ağırlıklandırma söz konusudur (Korkmaz ve Bostancı, 2011, s. 6). Buna göre (Poon & Granger, 2003, s. 507):

$$\hat{\sigma}_t = (1 - \beta)\sigma_{t-1} + \beta\hat{\sigma}_{t-1} \quad (2.5)$$

Burada;

$$0 \leq \beta \leq 1 \quad (2.6)$$

Formül 2.5'e bakıldığında, bir sonraki dönem volatilite tahmininin, bir önceki döneme ait volatilite tahmini ve bir önceki dönemde gerçekleşen volatilitenin ağırlıklı bir fonksiyonu olduğu görülmektedir. Eşitlikteki “ $\beta$ ” parametresi ise, ağırlıklandırma veya düzeltme faktörünü temsil etmektedir. Ağırlıklandırma faktörünün sıfır olması durumunda, üstel düzeltme modeli rassal yürüyüş modeline dönüşmektedir.

Bu modele göre, bir önceki dönem için tahmin edilen volatiliteden daha düşük bir volatilite meydana geldiğinde, ağırlıklandırma faktörü arttıkça, bir sonraki dönem volatilitesi de artmaktadır. Bir sonraki dönem volatilitesinin alabileceği değerler ise, “ $\sigma_{t-1} \leq \hat{\sigma}_t \leq \hat{\sigma}_{t-1}$ ” aralığında yer almaktadır. Bunun aksine bir önceki dönem için tahmin edilen volatiliteden daha yüksek bir volatilite yaşandığında, ağırlıklandırma faktörü arttıkça, bir sonraki dönem volatilitesi azalmaktadır. Yine bir sonraki dönem volatilitesinin alabileceği değerler, “ $\hat{\sigma}_{t-1} \leq \hat{\sigma}_t \leq \sigma_{t-1}$ ” aralığında bulunmaktadır. Bir önceki dönem için tahmin edilen volatilite tam olarak gerçekleştiğinde ise, bir sonraki dönem için tahmin edilen volatilite değeri, her bir ağırlıklandırma faktörü için sabit kalmaktadır (Korkmaz ve Bostancı, 2011, s. 7).

### 2.1.6. Üstel Ağırlıklı Hareketli Ortalama Modeli (EWMA)

EWMA modeli, doğrusal olmayan ağırlıklara sahip hareketli ortalama modelini ifade etmektedir (Poon, 2005, s. 33). Bu modelde, “ $\tau$ ” zamanı için tahmini volatilite, geçmiş tahminlerin ağırlıklı ortalaması şeklinde hesaplanmakta ve yakın dönemdeki fiyat değişimlerine daha fazla ağırlık verilmektedir (Çelik ve Kaya, 2010, s. 24). Böylece yapılacak tahminlerde güncel fiyat değişimlerinin ağırlığı artmakta, geçmiş dönemlerde ortaya çıkan olağan dışı fiyat değişimlerinin etkisi azalmaktadır. Yani yaşanan olaylara karşı duyarlı olan piyasa, bu duyarlılığını volatiliteye yansıtmaktadır (Yıldırım ve Çolakyan, 2014, s. 14). Buna göre (Poon & Granger, 2003, s. 507):

$$\hat{\sigma}_t = \frac{\sum_{i=1}^{\tau} \beta^i \sigma_{t-i}}{\sum_{i=1}^{\tau} \beta^i} \quad (2.7)$$

Üstel düzeltme modelinde tüm geçmiş dönem tahminleri kullanılırken, EWMA yaklaşımında, yalnızca daha yeni tahminler dikkate alınmaktadır (Poon & Granger, 2003, s. 483). Bu nedenle “ $\tau$ ” değeri belirlenen gözlem

dönemini, “0” ile “1” arasında değerler alabilen “ $\beta$ ” parametresi ise ağırlıklandırma faktörünü simgelemektedir.

Volatilitenin zamana bağlı olarak modellendiği EWMA modeli, finansal bir danışmanlık şirketi olan RiskMetrics’in hesaplamalarında bu modeli benimsemesinin ardından yaygınlık kazanmıştır. Bu modelde, varlık getirilerinin simetrik ve bağımsız dağıldığı varsayılmaktadır. Yaşanabilecek ani bir şoku volatilitenin hesaplamasına hemen yansıtması ve üstel olarak azalan ağırlıklarla şokun diğer gözlemler üzerindeki etkisini hızla düşürmesi, bu modelin avantajları olarak karşımıza çıkmaktadır (Akgün, 2016, s. 23). Buna karşın EWMA modelinde, ardışık getiriler ile volatilitenin ortalamaya dönüş eğilimi arasındaki korelasyonlar göz ardı edilmektedir (Natenberg, 2014, s. 395).

### 2.1.7. Basit Regresyon Modeli

Basit regresyon modeli, sabit ya da azalan düzeydeki ağırlıklandırmalar yerine önceden tespit edilmemiş ağırlıklandırma şemaları içermektedir. Bu modelde, gelecek dönem volatilitesi, gerçekleşen volatilitenin doğrusal bir fonksiyonu şeklinde tanımlanmaktadır. Buna göre (Poon, 2005, s. 33-34):

$$\sigma_t = \gamma + \beta_1 \sigma_{t-1} + \beta_2 \sigma_{t-2} + \dots + \beta_n \sigma_{t-n} + \nu_t \quad (2.8)$$

$$\hat{\sigma}_{t+1} = \gamma + \beta_1 \sigma_t + \beta_2 \sigma_{t-1} + \dots + \beta_n \sigma_{t-n+1} \quad (2.9)$$

Basit regresyon modelinde, geçmiş dönemlere ait volatilitenin verileri en küçük kareler yöntemi üzerinden regresyona tabi tutularak gelecek dönem volatilitesi tahmin edilmektedir (McMillan vd., 2000, s. 439). Ayrıca model, özbağılanımsal (otoregresif) modelin bir gösterimini oluşturmaktadır. Basit regresyon modeline geçmiş dönem volatilitenin hataları dâhil edildiğinde, otoregresif hareketli ortalama modeline ulaşılmaktadır (Körs, 2021, s. 21).

### 2.1.8. Otoregresif Hareketli Ortalama Modeli (ARMA)

Otoregresif hareketli ortalama modeli (ARMA), adından da anlaşılacağı gibi, otoregresif (AR) ve hareketli ortalama (MA) süreçlerinin bir arada uygulandığı ve iki sürece ilişkin özelliklerin de geçerli olduğu volatilitenin tahmin modelini belirtmektedir. AR ve MA süreçlerinin kombinasyonu sonucunda ARMA modeline ulaşıldığından, bu süreçlerin açıklanması, ARMA modelinin öngörü kapasitesinin anlaşılmasına katkıda bulunacaktır.

### 2.1.8.1. Otoregresif Süreçler: AR (p)

Otoregresif süreçler, herhangi bir değişkene ait mevcut değer, bu değişkenin belirli sayıdaki geçmiş dönem değerine ve bir hata terimine bağlı olduğu modelleri ifade etmektedir. Bu doğrultuda “AR (p)” şeklinde gösterilen “p” dereceden otoregresif bir modele ait eşitlik aşağıda sunulmuştur (Brooks, 2019, s. 340-341):

$$y_t = \mu + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + u_t \quad (2.10)$$

Eşitlikte yer alan “ $u_t$ ”; sıfır ortalamalı, sabit varyanslı ve özilintisiz bir beyaz gürültü (pür rassal) hata terimidir. Yine “ $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ ” parametreleri, geçmiş gözlem değerleri için katsayıları; “ $y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-p}$ ” ise, ilgili değişkenin geçmiş dönemlerde aldığı değerleri temsil etmektedir. Öte yandan büyük sigma notasyonu aracılığıyla Formül 2.10 yeniden düzenlenebilir:

$$y_t = \mu + \sum_{i=1}^p \phi_i y_{t-i} + u_t \quad (2.11)$$

Durağan zaman serileri için otokorelasyon katsayılarının sıfıra üstel olarak yaklaşması durumunda AR modellerinden bahsedilmektedir (Önder ve Hasgül, 2009, s. 66). Bununla birlikte kısmi otokorelasyon fonksiyonu (PACF), bir AR modelinin derecesinin tespitinde kullanılabilir. Çünkü PACF, bir AR sürecinde, “p” gecikme sonra kesilmektedir (Tsay, 2005, s. 56).

### 2.1.8.2. Hareketli Ortalama Süreçleri: MA (q)

Hareketli ortalama süreçleri, pür rassal süreçlerin nispeten basit bir doğrusal birleşiminden meydana gelmektedir. Dolayısıyla bu süreçler, herhangi bir değişkene ait mevcut değer, hata teriminin cari ve belirli sayıdaki geçmiş dönem değerlerine bağlı olduğunu izhar etmektedir. Bu kapsamda “MA (q)” şeklinde ifade edilen “q” dereceden bir hareketli ortalama modeli aşağıda gösterilmiştir (Brooks, 2019, s. 336):

$$y_t = \mu + u_t + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2} + \dots + \theta_q u_{t-q} \quad (2.12)$$

Denklemden kullanılan “ $u_t$ ”; sıfır ortalamalı, sabit varyanslı ve zamana göre bağımsız dağılım sergileyen bir beyaz gürültü hata terimini; “ $u_{t-1}, u_{t-2}, \dots, u_{t-q}$ ”, geçmiş dönemlere ilişkin hata terimlerini; “ $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ ” parametreleri ise, geçmiş dönem hata terimlerine ait katsayıları

simgelemektedir. Bunun yanı sıra büyük sigma notasyonu kullanılarak Formül 2.13'e ulaşılabilir:

$$y_t = \mu + \sum_{i=1}^q \theta_i u_{t-i} + u_t \quad (2.13)$$

Durağan zaman serileri için kısmi otokorelasyon katsayılarının sifıra üstel olarak yaklaşması, MA modellerinin söz konusu olduğunu göstermektedir (Önder ve Hasgül, 2009, s. 66). Ayrıca, otokorelasyon fonksiyonu (ACF) üzerinden bir MA modelinin derecesi tespit edilebilir. Nitekim ACF, bir MA sürecinde, “q” gecikme sonra kesilmektedir (Tsay, 2005, s. 56).

### 2.1.8.3. Otoregresif Hareketli Ortalama Süreçleri: ARMA (p, q)

AR veya MA modelleri, bazı durumlarda kullanışsız olabilir. Örneğin, verilerin dinamik yapısı tanımlanırken, çok sayıda parametreye sahip yüksek dereceli bir modele ihtiyaç duyulabilir. Buna benzer zorlukların üstesinden gelebilmek amacıyla ARMA modelleri geliştirilmiştir (Tsay, 2005, s. 56). Bu bağlamda AR (p) ve MA (q) süreçlerinin kombinasyonu sonucunda ARMA (p, q) modeli elde edilmektedir. Bir ARMA modeli, herhangi bir değişkene ait mevcut değeri, bu değişkenin belirli sayıdaki geçmiş dönem değerini, hata teriminin cari ve belirli sayıdaki geçmiş dönem değerini içermektedir (Brooks, 2019, s. 351):

$$y_t = \mu + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2} + \dots + \theta_q u_{t-q} + u_t \quad (2.14)$$

Burada “ $u_t$ ”; sıfır ortalamalı, sabit varyanslı ve özilintisiz bir beyaz gürültü hata terimini; “ $y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-p}$ ”, ilgili değişkenin geçmiş dönemlerde aldığı değerleri; “ $u_{t-1}, u_{t-2}, \dots, u_{t-q}$ ”, geçmiş dönemlere ilişkin hata terimlerini; “ $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ ”, geçmiş gözlem değerlerine ait katsayıları; “ $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ ” ise, geçmiş dönem hata terimlerine ait katsayıları ifade etmektedir.

Formül 2.14'e göre “q” sifıra eşit olduğunda, ARMA modeli, saf otoregresif bir sürece yani AR (p)'ye evrilmektedir. Buna karşın “p” sifıra eşit olduğunda, saf hareketli ortalama sürece yani MA (q)'ya dönüşmektedir (Enders, 2014, s. 51).

Yukarıda açıklanan bilgiler ışığında ve Formül 2.14'den hareketle, gelecek dönem volatilitésinin tahmini için aşağıdaki ARMA modeli kullanılabilir:

$$\hat{\sigma}_t = \mu + \phi_1 \sigma_{t-1} + \phi_2 \sigma_{t-2} + \dots + \phi_p \sigma_{t-p} + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2} + \dots + \theta_q u_{t-q} + u_t \quad (2.15)$$

Bu modelde, ilk olarak geçmiş dönemlere ait volatilite değerleri hesaplanarak bir volatilite zaman serisi elde edilmektedir. Zaman serisinin oluşturulmasında, günlük gerçekleşen getirilerin kareleri veya günlük en yüksek ve en düşük fiyatlar arasındaki fark gibi gerçekleşen volatilite hesaplama yöntemleri tercih edilebilir. Daha sonra ise, en küçük kareler yöntemi veya maksimum olabilirlik fonksiyonu aracılığıyla ARMA modeli tahmin edilmektedir (Körs, 2021, s. 21).

### 2.1.9. Otoresif Bütünleşik Hareketli Ortalama Modeli (ARIMA)

Yukarıda ifade edilen AR, MA ve ARMA modelleri, zaman serisinin durağan olduğu varsayımı altında, Box-Jenkins metodolojisine dayanan tek değişkenli tahmin modelleridir. Bu modeller, ortalama ve varyansın sabit, kovaryansın ise zamana göre bağımsız olmasını gerektirmektedir. Fakat literatürde, finansal ve ekonomik zaman serilerinin genellikle birim kök içerdikleri yaygın olarak kabul görmektedir.

Durağan olmayan zaman serileri; trend, düzenli-düzensiz dalgalanmalar ve tesadüfi dalgalanmalar gibi birtakım özellikler barındırabilmektedir (Kaynar ve Taştan, 2009, s. 166). Bu özelliklere sahip zaman serilerinin durağan hale getirilmesi, ARMA modellerinin uygulanmasını mümkün kılmaktadır. Bilindiği üzere durağanlaştırma işlemi, zaman serisinin farkı alınarak yapılmaktadır. Zaman serisi doğrusal bir trende sahipse birinci, eğrisel bir trende sahipse ikinci farkı alınarak durağanlaştırılmaktadır. Şu hâlde bir ARMA modelinde kullanılan zaman serisinin durağanlığının sağlanması ile ortaya çıkan model, otoresif bütünleşik hareketli ortalama modeli yani ARIMA (p, d, q) modeli olarak ifade edilmektedir. ARIMA modelinin isminde yer alan “d” parametresi, zaman serisinin durağanlaşma ya da bütünleşme düzeyini göstermektedir (Hamzaçebi ve Kutay, 2004, s. 228). Sonuç olarak, volatilite zaman serisinin durağan bir yapıda olmaması halinde, ilgili varsayımlar altında ARIMA modeli uygulanarak, gelecek dönem volatilitesi tahmin edilebilmektedir.

### 2.2. OTOREGRESİF KOŞULLU DEĞİŞEN VARYANS TAHMİN MODELLERİ

Zaman serisi tahmin modelleri, uygulama kolaylığı sunmaları ve şeffaf bir yapı sergilemelerine rağmen birtakım dezavantajlar barındırmaktadır. EWMA yöntemi de dâhil olmak üzere “daha basit” olarak

nitelendirilebilecek bu yöntemler, volatilité kalıcılığını volatilité şoklarından ayıramamaktadır. Zaman serisi tahmin modellerinin çoğu, volatilitenin ortalamaya dönüş eğilimini de ihmal etmektedir (Poon & Granger, 2003, s. 494). Buna karşın otoregresif koşullu değişen varyans tahmin modellerinde, volatilitenin ortalamaya dönüş eğilimi hesaba katılmaktadır (Brooks, 2019, s. 506). Ayrıca, zaman serisi tahmin modelleri, genellikle daha büyük değerlere sahip volatilité tahminleri yapma eğilimindedir (Poon, 2005, s. 44).

Daha önce belirtildiği gibi doğrusal yapıdaki ARMA/ARIMA modellerinde, hata terimi için sabit bir varyans varsayılmaktadır. Özellikle döviz kurları ve hisse senedi getirileri gibi finansal serilerde, volatilitede meydana gelen değişimler, bu modeller tarafından açıklanamamaktadır (Xiao & Aydemir, 2007, s. 3). Çünkü finansal zaman serileri, volatilité kümelenmesi ve değişen varyans gibi birtakım temel özelliklere sahiptir. Bu sorun, ilk olarak, varyansın geçmiş varyansların bir fonksiyonu şeklinde ele alındığı otoregresif koşullu değişen varyans [ARCH, Engle (1982)] modelinde formüle edilmiştir. ARCH modelinin arkasındaki temel düşünce, geçmiş volatilité şoklarının bugünün volatilitesini doğrudan etkilediği yaklaşımına dayanmaktadır. Dolayısıyla ARCH modelinde, volatilité kümelenmesi ve değişen varyans gibi temel özellikler dikkate alınmaktadır. ARCH ve GARCH modelleri başta olmak üzere volatilité tahmininde kullanılan başlıca otoregresif koşullu değişen varyans tahmin modelleri aşağıda açıklanmıştır:

### **2.2.1. Tek Değişkenli Otoregresif Koşullu Değişen Varyans Modelleri**

Bu modellerde, belirli bir finansal varlığın getirilerine ait koşullu volatilité, bağımsız ya da otonom bir şekilde modellenmektedir. Bu kapsamda literatürde en çok kullanılan tek değişkenli otoregresif koşullu değişen varyans modelleri aşağıda sunulmuştur:

#### *2.2.1.1. Otoregresif Koşullu Değişen Varyans (ARCH)*

Klasik bir doğrusal regresyon modelinde, hata terimine ilişkin varyansın zaman içinde sabit kaldığı yani homoskedastik bir karakter sergilediği varsayılmaktadır. Ancak; hisse senedi fiyatı, döviz kuru ve enflasyon oranı gibi bazı finansal zaman serilerinin tahmin edildiği modellerde, hata terimine ait varyansın zaman içinde değişebildiği gözlemlenmiştir. Ekonometrik açıdan bu kavram, değişen varyans yani heteroskedastisite olarak adlandırılmaktadır (Pabuçcu ve Değirmenci, 2018, s. 335). Heteroskedastik karakterdeki bir hata teriminin homoskedastik



varsayılması, standart hata tahminlerinin yanlış hesaplanmasına neden olabilmektedir.

Mandelbrot (1963)'un çalışmasında, her iki işarettten büyük getirileri büyük getirilerin, küçük getirileri küçük getirilerin izlediği tespit edilmiştir. Volatilite kümelenmesi olarak adlandırılan bu senaryoya göre, yüksek volatiliteye sahip bir dönemi çalkantılı bir dönemin, düşük volatiliteye sahip bir dönemi ise sakin bir dönemin takip etmesi beklenmektedir. Şu hâlde volatilite kümelenmesi, volatilitenin, önceki gözlemleri ile ilişkili olduğu anlamına gelmektedir.

Engle (1982) tarafından geliştirilen ARCH modelinde, koşullu varyansın zamana bağlı olarak değişmesine izin verilerek, zaman serisinin varyansı tahmin edilmektedir. Bu yöntem sayesinde finansal zaman serilerinde sıklıkla ortaya çıkan değişen varyans ve volatilite kümelenmesi modellenmektedir.

Bir ARCH modelinin nasıl çalıştığını anlayabilmek için ilk olarak rassal bir değişkene ait koşullu varyansın tanımlanması gerekmektedir. Burada koşullu ve koşulsuz varyanslar arasındaki ayrım, koşullu ve koşulsuz ortalamalar arasındaki ayrımla tamamen aynıdır. Koşullu varyans, zaman içinde ortaya çıkan yeni bilgilere bağlı olarak değişmekte; koşulsuz varyans ise, sabit kalmaktadır. Bu kapsamda rassal bir değişken olarak kabul edilen “ $u_t$ ”nin koşullu varyansı ve ARCH modelinin genel gösterimi aşağıda sunulmuştur (Brooks, 2019, s. 508-509):

$$\sigma_t^2 = \text{var}(u_t | u_{t-1}, u_{t-2}, \dots) = E[(u_t - E(u_t))^2 | u_{t-1}, u_{t-2}, \dots] \quad (2.16)$$

Genellikle “ $E(u_t) = 0$ ” olarak varsayıldığından;

$$\sigma_t^2 = \text{var}(u_t | u_{t-1}, u_{t-2}, \dots) = E[u_t^2 | u_{t-1}, u_{t-2}, \dots] \quad (2.17)$$

Eşitlik 2.17'ye göre, sıfır ortalamaya ve normal dağılıma sahip olduğu varsayılan rassal değişken “ $u_t$ ”nin koşullu varyansı ( $\sigma_t^2$ ), “ $u_t$ ”nin karesinin koşullu beklenen değerine eşit görünmektedir. Buradan hareketle bir ARCH modelinde, hata teriminin koşullu varyansı, kendinden önce gelen ve karesi alınan hata terimlerine bağlı olmakta böylece volatilitedeki otokorelasyon modellenmektedir. Örneğin, ARCH(1) modeli şu şekildedir:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 \quad (2.18)$$

ARCH(1) modeline bakıldığında, “1” dönem gecikmeli hatanın karesi ile koşullu varyansın modellendiği anlaşılmaktadır. ARCH(q) şeklinde ifade edilen ve karesi alınan hataların “q” sayıdaki gecikmesine bağlı olarak koşullu varyansın modellendiği genel gösterim ise, Formül 2.19 ve 2.20’de yer almaktadır:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2 + \dots + \alpha_q u_{t-q}^2 \quad (2.19)$$

Literatürde koşullu varyans genellikle “ $h_t$ ” şeklinde kullanılmaktadır:

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2 + \dots + \alpha_q u_{t-q}^2 \quad (2.20)$$

ARCH(q) modeli kısmi bir model olduğundan, eş anlı şekilde koşullu ortalama denkleminin de tahmin edilmesi gerekmektedir. Bu kapsamda ARCH(q) altında “ $y_t$ ” bağımlı değişkeninin zamanla nasıl değiştiğini açıklayan koşullu ortalama denklemi yani tam bir ARCH modeli Formül 2.21 ve 2.22’de gösterilmiştir:

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{2t} + \beta_3 x_{3t} + \beta_4 x_{4t} + u_t \quad u_t \sim N(0, \sigma_t^2) \quad (2.21)$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2 + \dots + \alpha_q u_{t-q}^2 \quad (2.22)$$

Anlaşılabacağı üzere koşullu varyans, önceki dönem hata terimlerine ait karelerin bir fonksiyonudur. Bu nedenle ARCH modelinde, zaman serisine ait koşullu ortalama ve koşullu varyans denklemleri eş anlı olarak modellenmektedir. Formül 2.21’de ifade edilen koşullu ortalama denklemi, modelin bağımlı değişkeni olan “ $y_t$ ”nin zaman içindeki değişimini açıklamaktadır. Formül 2.22’de sunulan koşullu varyans denklemi ise, koşullu varyans olan “ $h_t$ ” ile kare hataların “q” sayıdaki gecikmesi arasındaki ilişkiyi göstermektedir (Söylemez, 2020, s. 1326).

Gerçekleşen volatilitiyi kullanan tahmin modellerinin aksine ARCH sınıfı tahmin modellerinde, örnekleme ait standart sapmalar yerine getirilene ait koşullu varyanslar formüle edilmektedir. Bu modellerin oluşturulma biçiminden görüleceği üzere “t-1” zamanında “ $h_t$ ” değeri bilinmektedir (Poon & Granger, 2003, s. 484). Bunun yanı sıra bir ARCH modelinde, varyans tahminlerinin mantıksız sonuçlar üretmemesi için “ $h_t$ ”ye ait değerlerin pozitif olması gerekmektedir. Bu amaçla Formül 2.22’in sağ tarafında yer alan hata terimlerinin gecikmeli değerleri karesel formda ifade edilmekte, dolayısıyla da pozitif şekilde hesaplanmaktadır (Körs, 2021, s. 24). Yine ARCH modelinde; “ $\alpha_0 > 0$ ”, “ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q \geq 0$ ”

ve “ $\alpha$  katsayılarının sabit terim hariç her birinin ve toplamının 1’den küçük olması” kısıtları bulunmaktadır (Demir ve Çene, 2012, s. 217).

ARCH modelinde, hata terimlerinin kareleri alındığı için pozitif ve negatif hata terimlerinin model üzerindeki etkisi simetrik varsayılmaktadır. Fakat bu yaklaşım, kaldıraç etkisi ile çalışmaktadır. Öyle ki finansal piyasalara ulaşan belirli bir düzeydeki olumsuz bilgi ya da haberin, aynı seviyedeki olumlu gelişmeye göre daha fazla volatiliteye yol açtığı görülmektedir. Yine bir ARCH modelinde, volatilitenin kalıcılığı yani uzun dönem hafıza etkisi de göz ardı edilmektedir.

ARCH modeli, volatilitte tahmininde büyük bir kilometre taşı olmasına rağmen birtakım eksiklikleri bulunmaktadır (Mostafa vd., 2017, s. 24). ARCH modelinin eksiklikleri, aşağıdaki şekilde özetlenebilir (Körs, 2021, s. 24):

- \*Hata terimlerinin karelerine ait gecikme uzunluğunun tespitinde, geçerliliği kanıtlanmış bir yöntem bulunmamaktadır. Bu nedenle gecikme uzunluğunun olası değerlerine ilişkin soru işaretleri mevcuttur.
- \*En uygun ARCH modelinin gecikme uzunluğu, çok yüksek hesaplanabilir. Yani ulaşılan model, tutumlu ya da verimli bir yapı ortaya koyamayabilir.
- \*Bazı durumlarda, negatif olmama koşulu sağlanamayabilir. Öyle ki geniş bir gecikme uzunluğu altında, negatif katsayılar ve negatif varyans tahminleri elde edilebilir.

ARCH modelinin yukarıda ifade edilen sınırlılıklarının üstesinden gelebilmek amacıyla geliştirilmiş otoregresif koşullu değişen varyans [GARCH, Bollerslev (1986)] modeli geliştirilmiştir. Devamında ise, volatilitteyi karakterize eden diğer kalıpların da dikkate alındığı çok sayıda otoregresif koşullu değişen varyans tahmin modeli ortaya atılmıştır.

#### 2.2.1.2. *Genelleştirilmiş Otoregresif Koşullu Değişen Varyans (GARCH)*

ARCH modelinde, özellikle büyük sayıda gecikme uzunlukları kullanıldığında bazı sıkıntılar yaşanmakta ve katsayıların pozitiflik özelliği bozulmaktadır (Demir ve Çene, 2012, s. 217). Bu sorunun üstesinden gelmek ve negatif varyanslı parametre tahminlerini engellemek amacıyla Bollerslev (1986) tarafından Genelleştirilmiş ARCH (GARCH) modeli geliştirilmiştir (Pabuçcu ve Değirmenci, 2018, s. 335). Bir GARCH modeli, ARCH modeline kıyasla daha esnek bir gecikme yapısına imkân tanımakta ve daha genelleştirilmiş bir süreci ifade etmektedir. Temel anlamda ARCH sürecinin GARCH sürecine genişletilmesi, standart bir zaman serisi için AR sürecinin ARMA sürecine genişletilmesine oldukça

benzemektedir (Bollerslev, 1986, s. 308). Nitekim bir GARCH modelinde, hata teriminin koşullu varyansı, hem hata teriminin geçmiş dönem değerlerinin karesine hem de kendi geçmiş dönem değerlerine bağlı olarak modellenmektedir.

GARCH modeli, ARCH modeline kıyasla daha tutumlu/verimli bir yapı ortaya koymakta olup; bu model ile katsayıların pozitif olma kısıtı daha yüksek bir ihtimalle sağlanmaktadır (Körs, 2021, s. 24). GARCH modelinin ARCH modeline nazaran daha tutumlu/verimli bir yapıya sahip olduğu, GARCH (1, 1) modeli aracılığıyla kolaylıkla gösterilebilir (Brooks, 2019, s. 512-514):

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \quad (2.23)$$

GARCH (1, 1) modeli incelendiğinde, “t” dönemindeki koşullu varyansın ( $\sigma_t^2$ ), “1” dönem önceki hatanın karesi ( $u_{t-1}^2$ ) ve “1” dönem önceki koşullu varyans değerinin ( $\sigma_{t-1}^2$ ) bir fonksiyonu şeklinde modellendiği anlaşılmaktadır. Bu modeldeki her bir zaman alt indisinden “1” çıkartıldığında ise, Formül 2.24’e ulaşılmaktadır:

$$\sigma_{t-1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-2}^2 + \beta \sigma_{t-2}^2 \quad (2.24)$$

Formül 2.24’deki her bir zaman alt indisinden bir kez daha “1” çıkartıldığında, Formül 2.25 elde edilmektedir:

$$\sigma_{t-2}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-3}^2 + \beta \sigma_{t-3}^2 \quad (2.25)$$

Formül 2.23’de, sırasıyla “ $\sigma_{t-1}^2$ ” yerine “ $\alpha_0 + \alpha_1 u_{t-2}^2 + \beta \sigma_{t-2}^2$ ” ve “ $\sigma_{t-2}^2$ ” yerine “ $\alpha_0 + \alpha_1 u_{t-3}^2 + \beta \sigma_{t-3}^2$ ” konulduktan sonra, Formül 2.26 ortaya çıkmaktadır:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_0 \beta + \alpha_1 \beta u_{t-2}^2 + \alpha_0 \beta^2 + \alpha_1 \beta^2 u_{t-3}^2 + \beta^3 \sigma_{t-3}^2 \quad (2.26)$$

Formül 2.26, gecikme operatörü (L) yardımıyla sadeleştirilebilir. Bu kapsamda “ $u_{t-1}^2$ ”in bir gecikmeli değeri ( $u_{t-2}^2$ ), “ $Lu_{t-1}^2$ ”; iki gecikmeli değeri ( $u_{t-3}^2$ ), “ $L^2 u_{t-1}^2$ ”; “1” gecikmeli değeri ( $u_{t-i-1}^2$ ) ise, “ $L^i u_{t-1}^2$ ” şeklinde gösterilebilir:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_0 \beta + \alpha_1 \beta L u_{t-1}^2 + \alpha_0 \beta^2 + \alpha_1 \beta^2 L^2 u_{t-1}^2 + \beta^3 \sigma_{t-3}^2 \quad (2.27)$$

Eşitlikteki “ $\alpha_0$ ” ve “ $\alpha_1 u_{t-1}^2$ ” parametreleri için ortak paranteze alma işlemi uygulandığında, Formül 2.28’e ulaşılmaktadır:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0(1 + \beta + \beta^2) + \alpha_1 u_{t-1}^2(1 + \beta L + \beta^2 L^2) + \beta^3 \sigma_{t-3}^2 \quad (2.28)$$

Koşullu varyans denklemi için sonsuz gecikme varsayımı altında ise, Formül 2.29 elde edilmektedir:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0(1 + \beta + \beta^2 + \dots) + \alpha_1 u_{t-1}^2(1 + \beta L + \beta^2 L^2 + \dots) + \beta^\infty \sigma_{t-3}^2 \quad (2.29)$$

Eşitliğin sağ tarafında bulunan ilk kısım, basitçe bir sabit terimi belirtmekte; “ $\beta^\infty$ ” ise, gözlem sayısı sonsuza giderken sifıra doğru yaklaşmaktadır. Bu doğrultuda GARCH (1, 1) modeli, aşağıdaki şekilde yeniden formüle edilebilir:

$$\sigma_t^2 = \gamma_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2(1 + \beta L + \beta^2 L^2 + \dots) \quad (2.30)$$

$$\sigma_t^2 = \gamma_0 + \gamma_1 u_{t-1}^2 + \gamma_2 u_{t-2}^2 + \dots, \quad (2.31)$$

Formül 2.31, aynı zamanda sonsuz gecikmeli ARCH modelini göstermektedir. Dolayısıyla yalnızca 3 parametre ile koşullu varyansı tahmin eden GARCH (1, 1) modeli, karesi alınmış sonsuz sayıdaki geçmiş hataya izin veren çok daha tutumlu/verimli bir model olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu durum, GARCH modelinin ARCH modeline kıyasla çok daha esnek bir gecikme yapısına imkân tanıdığını izhar etmektedir. Öte yandan koşullu varyansın “p” sayıdaki gecikmesine ve karesi alınmış hataların “q” sayıdaki gecikmesine bağlı olarak koşullu varyansın modellendiği GARCH(p, q)’nın gösterimi, Formül 2.32 ve 2.33’de sunulmuştur (Brooks, 2019, s. 514):

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2 + \dots + \alpha_q u_{t-q}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \beta_2 \sigma_{t-2}^2 + \dots + \beta_p \sigma_{t-p}^2 \quad (2.32)$$

Ya da;

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i u_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (2.33)$$

Eşitliklerde yer alan “ $\alpha_0$ ”, koşullu varyans denklemi için sabit terimi; “ $\alpha_i$ ” yani ARCH etkisi, geçmişteki şokların volatilite üzerindeki etkisini;

“ $\beta_j$ ” yani GARCH etkisi ise, volatilité kümelenmesindeki kalıcılığı temsil etmektedir (Çevik vd., 2021, s. 123). Genel anlamda geçmiş şokların volatilité üzerindeki etkisi, volatilitenin kalıcılığına göre daha düşük hesaplanmaktadır. Bununla birlikte “ $p$ ” terimi sifıra eşit olduğunda, GARCH( $p, q$ ) süreci ARCH( $q$ ) sürecine indirgenmekte; “ $p$  ve  $q$ ” sifıra eşit olduğunda ise, “ $u_t$ ” bir beyaz gürültü hata terimine dönüşmektedir. GARCH modelinde; “ $p \geq 0$ ”, “ $q > 0$ ”, “ $\alpha_0 > 0$ ”, “ $\alpha_i \geq 0$ ” ve “ $\beta_j \geq 0$ ” kısıtları bulunmaktadır (Bollerslev, 1986, s. 309). İlaveten varyansa ilişkin sürecin durağanlık koşulunu sağlaması için  $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1$  olması gerekmektedir (Koy ve Ekim, 2016, s. 9). Bu değerin 1’e yakın hesaplanması, volatilitéye ait devamlılığın yüksek olduğuna ve volatilitenin ortalamasına geç döndüğüne işaret etmektedir.

GARCH modelinin finansal getiri serilerinde çok yaygın olarak uygulanmasının sebebi, volatilité kümelenmesini ve otokorelasyonunu iyi bir şekilde modellemesinden kaynaklanmaktadır (Oduncu vd., 2013, s. 46). Bilhassa GARCH (1, 1) modeli, verilerdeki volatilité kümelenmesini yakalama konusunda yeterli bir model olarak akademik finans literatüründe sıklıkla kullanılmaktadır.

### 2.2.1.3. Üssel GARCH (EGARCH)

Standart ARCH ve GARCH modellerinde, hata terimlerinin kareleri kullanıldığı için yukarı ve aşağı yönlü şokların koşullu varyans üzerindeki etkisi simetrik kabul edilmektedir. Diğer bir ifadeyle, meydana gelen şokların büyüklüğü hesaba katılmakta fakat işaretleri (yönü) göz ardı edilmektedir. Oysa ilk olarak Black (1976a) tarafından dile getirilen kaldıraç etkisine göre, olumsuz şoklar, aynı büyüklükteki olumlu şoklara kıyasla daha fazla volatilitéye neden olmaktadır. Bu asimetrik etki, Nelson (1991) tarafından geliştirilen Üssel GARCH (EGARCH) modelinde dikkate alınmaktadır.

EGARCH modelinde, bir zaman serisinin koşullu varyansının logaritması, kendi gecikmeli değerlerinin ve standardize edilmiş hataların asimetrik bir fonksiyonudur. Bu kapsamda EGARCH (1, 1) modeline ait koşullu varyans denklemi aşağıdaki gibi oluşturulmaktadır (Eyüboğlu ve Eyüboğlu, 2022, s. 706):

$$\log(h_t^2) = \omega + \beta \log(h_{t-1}^2) + \alpha \left( \left| \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}^2}} \right| - E \left[ \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}^2}} \right] \right) + \gamma \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sqrt{h_{t-1}^2}} \quad (2.34)$$

Burada  $\log(h_t^2) = \omega + [1 - \beta(L)]^{-1} + [1 + \alpha(L)]g(z_{t-1})$  ve  $g(z_t) = \gamma_1 z_t + \gamma_2 [|z_t| - E|z_t|]$  olmak üzere; “ $\omega$ ” sabit bir değeri, “ $\alpha$ ” ve “ $\beta$ ” sabit

parametreleri, “ $\gamma$ ” ise kaldıraç etki parametresini ifade etmektedir. İstatistiki açıdan anlamlı olarak “ $\gamma \neq 0$ ”, “ $\gamma < 0$ ” ya da “ $\gamma > 0$ ” sonucu, modelin asimetrik bir yapıda olduğunu yani asimetrik etkinin varlığını göstermektedir. “ $\gamma < 0$ ” durumunda, aşağı yönlü şoklar yukarı yönlü şoklara oranla daha fazla volatilitéye yol açmaktadır (Verbeek, 2017, s. 337). “ $\gamma > 0$ ” durumunda ise, yukarı yönlü şoklar aşağı yönlü şoklara kıyasla daha fazla volatilitéye neden olmaktadır. Bu noktada kullanılan veri tipine göre asimetrik etkinin farklılık sergileyebileceği unutulmamalıdır. Örneğin, petrol piyasası verileri açısından “ $\gamma > 0$ ” olarak hesaplanması olası karşılanmaktadır. Çünkü bu piyasadaki yukarı yönlü şoklar, resesyon riskine işaret edebilmekte, dolayısıyla olumsuz haber niteliği taşıyabilmektedir. Ayrıca, bazı ekonometrik paket programlarında iki ayrı “ $\gamma$ ” parametresi ( $\gamma_1$  ve  $\gamma_2$ ) tahmin edilmektedir. Bu tahminlerden “ $\gamma_1$ ” işaret etkisini (asimetrik etkiyi), “ $\gamma_2$ ” ise boyut etkisini (asimetrik etkinin büyüklüğünü) temsil etmektedir.

Formül 2.34’den anlaşılacağı gibi, “ $\varepsilon_{t-1}/\sqrt{h_{t-1}^2}$ ” değeri pozitif hesaplandığında, yaşanan şokun koşullu varyansın logaritması üzerindeki etkisi “ $\alpha + \gamma$ ” kadar; negatif hesaplandığında ise, “ $-\alpha + \gamma$ ” kadar olmaktadır (Enders, 2014, s. 156).

EGARCH modeli log-doğrusal formda tanımlandığından, tahmin edilen tüm katsayıların pozitif olma kısıtı bulunmamaktadır. Çünkü tahmin edilen parametreler negatif olsa dahi, logaritmik dönüşüm uygulandığından, koşullu varyansın negatif değerler alması mümkün değildir. Bu yaklaşım, GARCH modeli karşısında EGARCH modeline avantaj sağlamaktadır. Öte yandan modelde, “ $\varepsilon_{t-1}^2$ ” değeri yerine “ $\varepsilon_{t-1}$ ”in standardize edilmiş değeri ( $\varepsilon_{t-1}/\sqrt{h_{t-1}^2}$ ) kullanılmaktadır. Bu hususta Nelson (1991), hata teriminin geçmiş değerlerine ait karelerin yerine standardize edilmiş hataların kullanılmasının, şokların büyüklüğü ve kalıcılığı hakkında daha doğal bir açıklama yapma imkânı sunduğunu ileri sürmüştür (Enders, 2014, s. 156).

EGARCH modelinin orijinal formülasyonunda, Genelleştirilmiş Hata Dağılımı (GED) kullanılmaktadır (Brooks, 2019, s. 523). Bilindiği üzere doğrusal modellere ait varsayımlardan biri de, verilerin normal dağılımasıdır. Normal bir dağılımda, basıklık katsayısı 3’e, çarpıklık değeri ise 0’a eşittir. Bu kapsamda normal dağılım, mezokurtik ve simetrik bir yapı sergilemektedir. Fakat zaman serilerinin dağılımı, genellikle kalın kuyruklar içermektedir. Bu nedenle Bollerslev (1987), simetrik bir yapı sergileyen ve kalın kuyruk sorununun çözümüne karşı etkin bir yaklaşım olan Student-t dağılımını önermiştir. Spekülatif veri hareketlerinin olduğu durumlarda ise, kalın kuyruk sorunu, Student-t dağılımı ile

çözümlemeyebilmektedir. Nitekim Nelson (1991), spekülâtif hareketlerin varlığında, Student-t dağılımı tarafından çözümlenemeyen kalın kuyruk sorununu gidermek amacıyla GED dağılımını geliştirmiştir (Ural ve Adakale, 2009, s. 26-28). Bu bağlamda GED dağılımı, birçok zaman serisi için uygulanabilen geniş bir dağılım ailesini ifade etmektedir. Ancak, EGARCH modellerinin neredeyse tümünde, hesaplama kolaylığı ve sezgisel yorumlamadan dolayı, GED dağılımı yerine koşullu normal hatalar kullanılmaktadır (Brooks, 2019, s. 523).

#### 2.2.1.4. Glosten-Jaganathan-Runkle GARCH (GJR-GARCH) ve Eşik GARCH (TGARCH)

Asimetrik etkiyi modelleyen GARCH tipi spesifikasyonlardan biri de, Glosten vd. (1993) tarafından geliştirilen ve yazarlarının ismiyle anılan Glosten-Jaganathan-Runkle GARCH (GJR-GARCH) modelidir. Bu model, Eşik Değerli ARCH (TARCH) olarak da bilinmektedir. GJR-GARCH modeli, standart GARCH modeline kukla değişken eklenmek suretiyle oluşturulmaktadır. Bu kukla değişken sayesinde standart GARCH modeli, asimetrik bir yapı kazanmaktadır.

GJR-GARCH modeli, geçmiş şokların işaretine bağlı olarak koşullu varyansın farklı tepkiler vermesine imkân tanımaktadır. Bu kapsamda modelin genel gösterimi Formül 2.35’de sunulmuştur (Erer vd., 2016, s. 43):

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{k=1}^r \gamma_k \varepsilon_{t-k}^2 d_{t-k} + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (2.35)$$

Formül 2.35’de kullanılan “ $\omega$ ”, sabit bir değeri; “ $\alpha_i$ ”, ARCH etkisini; “ $\beta_j$ ”, GARCH etkisini; “ $d_{t-k}$ ”, kukla değişkeni; “ $\gamma_k$ ”, kaldıraç etki parametresini temsil etmektedir. Burada “ $d_{t-k}$ ” kukla değişkeni (bazı çalışmalarda “ $d$ ” yerine “ $T$ ” olarak ifade edilmiştir) olumlu şoklarda ( $\varepsilon_{t-k} \geq 0$ ), “0”; olumsuz şoklarda ( $\varepsilon_{t-k} < 0$ ), “1” değerini almaktadır. Şu hâlde “ $\gamma_k > 0$ ” sonucu, olumsuz şokların olumlu şoklara nazaran daha fazla volatiliteye yol açtığını göstermektedir (Shahzad vd., s. 28-29). Yani asimetrik etki, istatistiki açıdan anlamlı fakat sıfıra eşit olmayan “ $\gamma$ ” parametresi ile yakalanmaktadır. “ $\gamma_k = 0$ ” olduğunda ise, GJR-GARCH modeli standart GARCH modeline dönüşmektedir. Bununla birlikte olumlu şokların koşullu varyans üzerindeki etkisinin büyüklüğü “ $\alpha_i$ ”, olumsuz şoklarınki ise “ $\alpha_i + \gamma_k$ ” ile ölçülmektedir. Tipik olarak, hisse senedi endeks getirileri için oluşturulan GJR-GARCH modelinde, “ $\gamma_k$ ” parametresinin pozitif hesaplanması beklenmektedir (Bollerslev, 2010, s. 151).



GJR-GARCH modeli, standart GARCH modelinin bir uzantısıdır. Bu nedenle koşullu varyansın pozitif çıkması için “ $\omega > 0$ ”, “ $\alpha_i \geq 0$ ”, “ $\beta_j \geq 0$ ” ve “ $\alpha_i + \gamma_k \geq 0$ ” kısıtları bulunmaktadır. Ayrıca, varyansa ilişkin sürecin durağanlık şartını sağlaması açısından  $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1$  olması gerekmektedir.

GJR-GARCH modeline oldukça benzeyen Eşik GARCH (TGARCH) modeli de, volatilitedeki asimetriyi yakalamak üzere tasarlanmıştır. Buna göre Zakoian (1994) tarafından geliştirilen TGARCH modeli, hata terimlerinin işaretlerine bağlı olarak volatilitenin üzerindeki farklı tepkileri gösteren parçalı doğrusal bir fonksiyon şeklinde tanımlanmıştır (Akgün, 2016, s. 34). GJR-GARCH ve TGARCH modelleri arasındaki benzerliği göstermesi bakımından GJR-GARCH (1, 1) ve TGARCH (1, 1) modelleri sırasıyla aşağıda belirtilmiştir (Bollerslev, 2010, s. 150-161):

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma \varepsilon_{t-1}^2 I(\varepsilon_{t-1} < 0) + \beta \sigma_{t-1}^2 \quad (2.36)$$

$$\sigma_t = \omega + \alpha |\varepsilon_{t-1}| + \gamma |\varepsilon_{t-1}| I(\varepsilon_{t-1} < 0) + \beta |\sigma_{t-1}| \quad (2.37)$$

Görüldüğü üzere, Formül 2.37’de yer alan TGARCH modeli, GJR-GARCH modeline oldukça benzemektedir. GJR-GARCH modelinden farklı olarak bu modelde, koşullu varyanslar yerine koşullu standart sapmalar kullanılmaktadır (Akgün, 2016, s. 32).

#### 2.2.1.5. *Bütünleşik GARCH (IGARCH)*

Daha önce ifade edildiği gibi, mutlak getirilerde ya da getirilerin karelerinde; istatistiki açıdan anlamlı, pozitif yönlü ve yavaş yavaş azalan bir otokorelasyon fonksiyonu mevcuttur (Cont, 2007, s. 290). Bu durum, volatilitenin şoklarının uzun bir süre devam ettiği anlamına gelmekte olup; volatilitenin uzun dönem hafıza etkisi olarak bilinmektedir. Özellikle yüksek frekanslı verilerde, volatilitenin oldukça kalıcıdır ve koşullu varyans süreci birim kök davranışına yakınlık sergilemektedir (Aydemir, 2002, s. 4). Bu bağlamda Engle & Bollerslev (1986) tarafından geliştirilen Bütünleşik GARCH (IGARCH) modeli, volatilitenin uzun dönem hafıza etkisini göz önünde bulundurmaktadır (Poon, 2005, s. 45).

Standart bir GARCH modelinde, varyansa ilişkin sürecin sonlu ya da durağan bir yapıda olması için  $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1$  koşulu bulunmaktadır. Bu toplamın 1’e yakın tahmin edilmesi, volatilitenin yüksek olduğuna ve volatilitenin ortalamasına geç döndüğüne işaret etmektedir. 1’den büyük hesaplanması ise, koşullu varyansın durağan olmadığını

göstermektedir. Öte yandan  $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j$  toplamı, daha uzun vadeli örneklemeler için genellikle 1'e yakın tahmin edilmekte; daha kısa vadeli örneklemelerde ise, çok küçük olmamakla birlikte 1'den uzaklaşmaktadır. Buna, IGARCH etkisi de denilmektedir (Rachev vd., 2007, s. 302).

IGARCH modeli, standart GARCH modeline yönelik farklı bir bakış açısını ifade etmektedir. Buna göre,  $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j = 1$  iken, koşullu varyans tahmininin kalıcılığı modellenenmektedir. Diğer bir ifadeyle,  $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j = 1$  olduğunda, şokların kalıcılığı yakalanmaktadır (Erer vd., 2019, s. 86). Bu doğrultuda model, aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır (Rachev vd., 2007, s. 302-303):

$$\alpha_0 > 0 \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j = 1 \quad (2.38)$$

IGARCH modelinde, ilk olarak ARCH parametresi ( $\alpha$ ) tahmin edilmektedir. Daha sonra ise, “1- $\alpha$ ” işlemi üzerinden GARCH parametresine ( $\beta$ ) ulaşılmaktadır. Bununla birlikte gecikme operatörü (L) kullanılarak “ $h_t = \alpha_0 + \alpha(L)\varepsilon_t^2 + \beta(L)h_t$ ” şeklinde ifade edilen GARCH(p, q) modeli, durağan bir ARMA modeli formunda yeniden düzenlenebilir (Türkyılmaz ve Balıbey, 2014, s. 3-4):

$$[1 - \alpha(L) - \beta(L)]\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + [1 - \beta(L)](\varepsilon_t^2 - h_t) \quad (2.39)$$

Eğer Formül 2.39'da yer alan “1 -  $\alpha(L)$  -  $\beta(L)$ ” polinomu birim köklü ise (yani  $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j = 1$  ise), IGARCH(p, q) modeli elde edilmektedir:

$$\phi(L)(1 - L)\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + [1 - \beta(L)]v_t \quad (2.40)$$

Burada “ $\phi(L) = [1 - \alpha(L) - \beta(L)](1 - L)^{-1}$ ”dir. Ayrıca, “ $\phi(L)$ ” ve “ $[1 - \beta(L)]$ ”nin kökleri, birim çemberin dışında kalmaktadır. Dolayısıyla sonsuz hafızalı şokların etkisi zaman içinde sona ermemekte, yaşanan şoklar, gelecekteki volatilité üzerinde sonsuz bir etkiye sahip olmaktadır.

Özetle, standart GARCH süreci,  $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1$  koşulu altında varyansta kalıcı değilken;  $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j = 1$  koşuluna sahip bir IGARCH süreci, varyansta kalıcı olmaktadır. Bu nedenle standart GARCH modelinde, koşullu varyansa yönelik şoklar  $(\alpha_i + \beta_j)^t$  üstel oranında ortadan kalkmakta; IGARCH modelinde ise, hiçbir zaman sona

ermemektedir (Rachev vd., 2007, s. 303). Yani IGARCH modelindeki bir şok, sonsuz bir ufukta gelecekteki volatiliteye etki etmektedir. Ancak, bir IGARCH modelinde, koşulsuz varyans bulunmamaktadır (Poon, 2005, s. 45).

### 2.2.1.6. Asimetrik Güç ARCH (APARCH)

Taylor (1986) tarafından, koşullu standart sapma, hata terimlerine ait gecikmeli mutlak değerlerin bir dağılımı olarak gösterilmiştir. Buradan hareketle Ding vd. (1993) tarafından, Asimetrik Güç ARCH (APARCH) modeli ortaya atılmıştır (Kayral, 2020, s. 156). APARCH modeli ile finansal zaman serilerine ait kalın kuyruk ve aşırı basıklık özellikleri iyi bir şekilde tanımlanmaktadır. İlâveten modelde, asimetrik etki de dikkate alınmaktadır (Ding, 2011, s. 6). Bu kapsamda APARCH modelinin genel yapısı aşağıda sunulmuştur (Ding vd., 1993, s. 98):

$$s_t^\delta = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i (|\varepsilon_{t-i}| - \gamma_i \varepsilon_{t-i})^\delta + \sum_{j=1}^q \beta_j s_{t-j}^\delta \quad (2.41)$$

APARCH modelinde “ $\varepsilon_t = s_t e_t$ ” ve “ $e_t \sim N(0,1)$ ” olmak üzere; “ $\alpha_0 > 0$ ”, “ $\delta \geq 0$ ”, “ $\alpha_i \geq 0$ ”, “ $\beta_j \geq 0$ ” ve “ $-1 < \gamma_i < 1$ ” aralığında yer almaktadır. Bununla birlikte  $0 \leq \sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j \leq 1$  kısıtı bulunmaktadır (Emeç ve Özdemir, 2014, s. 89).

Formül 2.41’de geçen “ $\gamma_i$ ”, kaldıraç etki parametresini ifade etmektedir. “ $\gamma_i$ ” parametresinin pozitif hesaplanması, olumsuz bilgi şoklarının olumlu bilgi şoklarına kıyasla daha fazla volatiliteye neden olduğunu göstermektedir. “ $\delta$ ” parametresi ise, güç terimi olarak adlandırılmaktadır. Bu terim “1” olduğunda koşullu standart sapma, “2” olduğunda ise koşullu varyans yakalanmaktadır (Carroll & Kearney, 2009, s. 79). Yani APARCH modelinde, “ $\delta$ ” parametresi doğrudan “2” olarak kabul edilmemekte, bu parametre model içerisinde belirlenmektedir (Büberkökü, 2021, s. 20).

Esnek bir yapıda olan APARCH modeli, bünyesinde birçok otoregresif koşullu değişen varyans modelini barındırmaktadır. Bu kapsamda;

- \* “ $\delta = 2$ ”, “ $\beta_j = 0$ ” ve “ $\gamma_i = 0$ ”  $\Rightarrow$  ARCH modeli,
- \* “ $\delta = 2$ ” ve “ $\gamma_i = 0$ ”  $\Rightarrow$  GARCH modeli,
- \* “ $\delta = 2$ ”  $\Rightarrow$  GJR-GARCH modeli,
- \* “ $\beta_j = 0$ ” ve “ $\gamma_i = 0$ ”  $\Rightarrow$  NARCH modeli,
- \* “ $\delta = \infty$ ”  $\Rightarrow$  log-ARCH modeli elde edilmektedir (Ding D. , 2011, s. 6-7).

Nispeten kapsayıcı bir yapıda olan APARCH modelinde, pozitif ve negatif yönlü şokların volatilité üzerindeki etkisi ayrıştırılmaktadır. Ek olarak, güç parametresi olan “ $\delta$ ”nın değeri, model tarafından tespit edilmektedir.

### 2.2.1.7. Parçalı Bütünleşik GARCH (FIGARCH)

Hurst (1951) tarafından hidroloji alanındaki akış verilerinin kalıcılığını ve rezervuarların tasarımı anlamak amacıyla yapılan araştırmalar, 1980’li yıllardan itibaren ekonometristlerin uzun hafıza modellerine yönelmelerinde etkili olmuştur. Bu kapsamda Granger & Joyeux (1980) ve Hosking (1981), zaman serilerine ilişkin parçalı süreçler üzerine çalışmalar gerçekleştirmiştir. Söz konusu çalışmalarda, tam sayılardan ziyade parçalı/kesirli bütünleşme derecesine sahip zaman serilerinin de olabileceğine dikkat çekilmiştir. Öte yandan Engle & Bollerslev (1986), volatilitenin uzun dönem hafıza etkisini hesaba katan IGARCH modelini tanıtmıştır. Parçalı süreçler üzerine yapılan çalışmalar ve IGARCH modelinin tanıtılması ise, Baillie vd. (1996) tarafından FIGARCH modelinin geliştirilmesine zemin hazırlamıştır.

FIGARCH modeli, standart GARCH ve IGARCH modelleri arasındaki boşluğu kapatmayı hedeflemiştir. Nitekim GARCH modelinde, şokların volatilité üzerindeki etkisinin hemen ortadan kaybolduğu, IGARCH modelinde ise şokların sonsuz bir ufukta gelecekteki volatilitéyi etkilediği varsayılmaktadır. Buna karşılık FIGARCH modelinde, şokların volatilité üzerindeki etkisi, yavaş bir şekilde hiperbolik olarak azalmaktadır (Çevik ve Sezen, 2020, s. 341). Böylece süreç, I(0) ve I(1) paradigmaları arasında ek bir esneklik sağlamaktadır (Baillie, 1996, s. 6). Koşullu volatilitédeki uzun hafızanın varlığını belirlemek üzere geliştirilen FIGARCH modeli, aşağıda yer almaktadır (Baillie vd., 1996, s. 8):

$$\phi(L)(1-L)^d \varepsilon_t^2 = \omega + [1 - \beta(L)]v_t \quad (2.42)$$

Burada  $\{v_t\}$  süreci, koşullu varyans için değişimleri göstermektedir. Şu hâlde “ $v_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$ ”, sıfır ortalamalı ve ilişkisiz hatalardan meydana gelmektedir. Ayrıca modelde, “ $\phi(L)$ ” ve “ $[1 - \beta(L)]$ ”ye ait tüm köklerin, birim çemberin dışında olduğu varsayılmaktadır (Türkyılmaz ve Balıbey, 2014, s. 4). Formül 2.42’nin alternatif versiyonu ise Formül 2.43’de sunulmuştur (Baillie vd., 1996, s. 8):

$$[1 - \beta(L)]\sigma_t^2 = \omega + [1 - \beta(L) - \phi(L)(1-L)^d]\varepsilon_t^2 \quad (2.43)$$

Buradan hareketle koşullu varyans denklemi;

$$\sigma_t^2 = \omega[1 - \beta(1)]^{-1} + \{1 - [1 - \beta(L)]^{-1}\phi(L)(1 - L)^d\}\varepsilon_t^2 \quad (2.44)$$

Görüldüğü gibi FIGARCH modelinde, koşullu varyans denkleminin gecikme yapısında,  $L$ 'nin gecikme operatörü olduğu  $(1 - L)^d$  şeklinde parçalı/kesirli bir fark operatörü kullanılmaktadır (Harvey, 2007, s. 352). Reel bir sayıyı temsil eden “ $d$ ”, parçalı bütünleşme parametresi olarak volatilitenin uzun dönemli dinamiklerini modellemeye imkân tanımaktadır. Bu parametrenin “0” değerini alması halinde FIGARCH süreci GARCH modeline, “1” değerini alması halinde ise IGARCH modeline dönüşmektedir. Bundan dolayı istatistiki açıdan anlamlı olarak “ $d = 0$ ” bulunduğu, süreç kısa hafızalı olarak adlandırılmakta; “ $0 < d < 0.5$ ” olduğunda ise, uzun hafıza özelliği sergilemektedir. İkinci durum, volatilitenin serisinde uzun dönemli bir bağımlılığa işaret etmektedir. O hâlde geçmiş volatilitenin değerleri, gelecekteki volatilitenin değerlerini tahmin etme noktasında faydalı kabul edilmekte, dolayısıyla da zayıf formdaki etkin piyasalar hipotezi ret edilmektedir. “ $d \geq 0.5$ ” hesaplandığında ise, süreç durağan olmamaktadır. Son olarak, bir FIGARCH modelinde, “ $0 \leq d \leq 1$ ”, “ $\omega > 0$ ” ve “ $\alpha, \beta < 1$ ” olmak üzere tüm parametrelerin pozitif olma koşulunu sağlaması gerekmektedir (Çevik ve Sezen, 2020, s. 341).

#### 2.2.1.8. Hiperbolik GARCH (HYGARCH)

Davidson (2004) tarafından geliştirilen Hiperbolik GARCH (HYGARCH) modeli, FIGARCH modelinin genelleştirilmiş bir formunu ifade etmektedir. Bu kapsamda HYGARCH, içerisinde GARCH, IGARCH ve FIGARCH modellerini barındırmaktadır (Bollerslev, 2010, s. 152). HYGARCH modeline ait koşullu varyans denklemini ise, aşağıda gösterilmiştir (Eyüboğlu ve Eyüboğlu, 2022, s. 707):

$$h_t^2 = \omega[1 - \beta(L)]^{-1} + \left[1 - (1 - \beta(L))^{-1}\rho(L)\{1 + \alpha(1 - L)^d\}\right]\varepsilon_t^2 \quad (2.45)$$

Formül 2.45'e göre; “ $\omega > 0$ ”, “ $\alpha \geq 0$ ” ve “ $\beta < 1$ ” koşullarının sağlanması beklenmektedir (Büberkökü, 2021, s. 21). Bunun yanında model sonuçları, “ $\alpha$ ” yerine “ $\log(\alpha)$ ” şeklinde raporlanmaktadır.

Koşullu volatilitenin yapısını hiperbolik olarak modelleyen HYGARCH modeli, FIGARCH modelinin durağan bir yapıda olup olmadığını sınamak amacıyla oluşturulmuştur. Bu doğrultuda HYGARCH, fark operatöründeki ağırlıkları tanıtmak suretiyle FIGARCH modeline ait koşullu varyansı genişletmektedir (Eyüboğlu ve Eyüboğlu, 2022, s. 707).

HYGARCH modelinin oluşturulma biçimine bakıldığında, standart GARCH modeli “ $\alpha = 0$ ”, FIGARCH modeli ise “ $\alpha = 1$ ” [ya da  $\log(\alpha) = 0$ ] ve “ $0 < d < 1$ ” koşullarına karşılık gelmektedir. “ $d = 1$ ” olarak tespit edildiğinde ise, HYGARCH modeli, “ $\alpha < 1$ ” veya “ $\alpha = 1$ ” olma durumlarına bağlı olarak standart GARCH veya IGARCH modellerine indirgenmektedir (Bollerslev, 2010, s. 152).

### 2.2.1.9. Parçalı Bütünleşik Üssel GARCH (FIEGARCH)

FIGARCH ve HYGARCH modelleri, koşullu volatilitenin kalıcılığını yani uzun dönem hafıza etkisini yakalamalarına rağmen asimetrik etkiyi modelleyememektedir. Bundan dolayı Bollerslev & Mikkelsen (1996) tarafından, EGARCH modeli, parçalı fark alma yapısına olanak sağlayacak şekilde Parçalı Bütünleşik Üssel GARCH (FIEGARCH) modeline genişletilmiştir. Böylece bir FIEGARCH modeli kullanılarak, getiri oynaklığındaki uzun dönem hafıza ve asimetrik etkiyi bir arada modellemek mümkün olmuştur.

GARCH modelinin EGARCH modeline genişletilmesi gibi, FIGARCH modeli de FIEGARCH modeline genişletilebilir. Öyle ki “ $\phi(z) = 0$ ”a ait tüm köklerin birim çemberin dışında yer aldığı varsayıldığında,  $[1 - \phi(L)] = \phi(L)(1 - L)^d$  otoregresif polinomu çarpanlarına ayrılarak FIEGARCH (p, d, q) modeline ulaşılabilir (Güleç ve Aktaş, 2019, s. 496):

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \phi(L)^{-1}(1 - L)^{-d}[1 + \alpha(L)]g(z_{t-1}) \quad (2.46)$$

Formül 2.46’da ifade edilen FIEGARCH modeli, “ $d = 0$ ” olması durumunda EGARCH, “ $d = 1$ ” olması halinde ise Bütünleşik EGARCH (IEGARCH) modeline evrilmektedir. Buna karşın “ $0 < d < 1$ ” iken, meydana gelen şokun koşullu volatilitenin üzerindeki etkisi, yavaş bir hiperbolik bozulma hızında ortadan kalkmaktadır (Rachev vd., 2007, s. 304). Yine  $g(z_t) = \theta z_t + \gamma[|z_t| - E|z_t|]$  olmak üzere; “ $\theta z_t$ ” terimi işaret etkisini (asimetrik etkiyi), “ $\gamma[|z_t| - E|z_t|]$ ” terimi ise boyut etkisini (asimetrik etkinin büyüklüğünü) göstermektedir.

Bir FIEGARCH modelinde koşullu varyans süreci, “-0.5” ile “0.5” aralığındaki herhangi bir “d” değeri için tersinir ve kovaryans durağan görünmektedir. Bununla beraber logaritmik formda tanımlanan FIEGARCH modeli için parametrelerin pozitif hesaplanma kısıtı bulunmamaktadır (Bollerslev & Mikkelsen, 1996, s. 160).

### 2.2.1.10. Parçalı Bütünleşik Asimetrik Güç ARCH (FIAPARCH)

Ding vd. (1993) tarafından geliştirilen APARCH modeli, getiri serisine ilişkin asimetrik etkiyi kısa dönemli olarak yakalamaktadır. Buna karşın model, uzun dönemde asimetrik etkiyi hesaba katmamaktadır. Bu eksikliği gidermek üzere Tse (1998) tarafından Parçalı Bütünleşik Asimetrik Güç ARCH (FIAPARCH) modeli tasarlanmıştır. FIAPARCH modelinde, FIGARCH modeline benzer şekilde, koşullu volatilitéye ait uzun dönem hafıza ve asimetrik etki birlikte ele alınmaktadır.

FIAPARCH modelindeki koşullu varyans,  $(|\varepsilon_t| - \gamma\varepsilon_t^2)^\delta$ 'nin parçalı bütünleşik dağıtılmış gecikmesi olarak modellenmektedir. Bu kapsamda model, FIGARCH ve APARCH süreçlerinin birleştirilmesi ile ortaya çıkmaktadır (Bollerslev, 2010, s. 147). Nitekim bir FIAPARCH (p, d, q) modeli, aşağıdaki gibi formüle edilmektedir (Çevik vd., 2021, s. 123):

$$h_t^2 = \omega(1 - \beta)^{-1} + [1 - (1 - \beta L)^{-1}(1 - \phi L)(1 - L)^d](|\varepsilon_t| - \gamma\varepsilon_t^2)^\delta \quad (2.47)$$

Burada “d”, uzun dönem hafıza parametresi olarak “ $0 \leq d \leq 1$ ” aralığında yer almaktadır. Ayrıca modelde, “ $\omega > 0$ ”, “ $\delta > 0$ ”, “ $\phi < 1$ ”, “ $\beta < 1$ ” ve “ $-1 < \gamma < 1$ ” kısıtları mevcuttur.

FIAPARCH modelinde, “ $\gamma > 0$ ” olduğunda, olumsuz bilgi şokları olumlu bilgi şoklarına kıyasla daha fazla volatilitéye yol açmaktadır. “ $\gamma < 0$ ” hesaplandığında ise, bu durumun tersi geçerlidir. Öte yandan “ $0 < d < 1$ ” aralığındaysa, getiri serisine ait koşullu volatilitenin uzun dönem hafıza özelliği gösterdiği anlaşılmaktadır (Eyüboğlu ve Eyüboğlu, 2022, s. 708). Bir FIAPARCH modeli, içerisinde APARCH modelini de barındırdığından, güç terimi olan “ $\delta$ ” parametresinin değeri model tarafından tespit edilmektedir. Bunun yanı sıra “ $\gamma = 0$ ” ve “ $\delta = 2$ ” ise, FIAPARCH süreci FIGARCH sürecine dönüşmektedir (Büberkökü, 2021, s. 21).

### 2.2.1.11. Spline-GARCH

Spline teknikler, bir araya getirilen farklı parçalar üzerinden sürekli karakterli bir fonksiyona ulaşılmasını ifade etmektedir. Bu kapsamda polinom fonksiyonları, verilerin farklı bölümlerine parçalı bir şekilde uygulanmaktadır. Örneğin, “y” ve “x” değişkenleri arasındaki ilişki, “x” değerinin “x\*” eşik değerinden küçük veya büyük olmasına göre değişmekte ise, bu olgu, kukla değişkenler aracılığıyla yakalanabilir. Bu durumda “ $D_t$ ” kukla değişkeni, aşağıdaki gibi tanımlanabilir (Brooks, 2019, s. 586-587):

$$D_t = \begin{cases} 0 & \text{eğer } x_t < x^* \\ 1 & \text{eğer } x_t \geq x^* \end{cases} \quad (2.48)$$

Formül 2.48’de gösterilen yaklaşım, basit bir örnek üzerinden somutlaştırılabilir. Bilindiği üzere tik büyüklüğü limitleri, bazen finansal varlığın fiyatına bağlı olarak değişmektedir. Örneğin, 3 \$ ya da daha yüksek fiyatlı opsiyonlarda tik büyüklüğü 1/8 \$, 3 \$’dan düşük fiyatlı opsiyonlarda ise 1/16 \$ olarak sınırlandırılabilir. Şu hâlde izin verilen minimum fiyat hareketi, bu iki opsiyon grubu arasında farklılık sergileyecektir. Buradan hareketle “y” bir opsiyonun alış ve satış fiyatları arasındaki fark, “x” ise bu farkın büyüklüğünü kısmen açıklayan opsiyon fiyatı olarak kabul edilirse, bu durumda “y”, tik büyüklüğü limitinden dolayı “x” ile kısmen parçalı bir şekilde değişecektir. Dolayısıyla “y” ve “x” değişkenleri arasındaki ilişkinin tespitinde aşağıdaki model kullanılabilir (Brooks, 2019, s. 587):

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \beta_3 D_t + \beta_4 D_t x_t + u_t \quad (2.49)$$

Formül 2.49’da tanımlanan model, “y<sub>t</sub>”nin ikiden fazla rejimden alındığı veya daha karmaşık şekilde üretildiği diğer durumlara genelleştirilebilir. Ayrıca modelde, çşik veya düğüm değerinin önceden bilindiği varsayılmaktadır.

Yukarıdaki bilgiler ışığında, üssel ikinci dereceden spline’lara dayanan Spline-GARCH modeli, Engle & Rangel (2008) tarafından, yüksek frekanslı finansal verileri daha düşük frekanslı makroekonomik verilerle ilişkilendirmek amacıyla geliştirilmiştir (Amado vd., 2019, s. 222). Modelde, günlük volatiliteye ait yüksek frekanslı bir haber bileşeni ile makroekonomik olaylara karşı piyasa tepkilerini yansıtan düşük frekanslı ikinci bir bileşen bulunmaktadır. İkinci bileşende, volatilitenin zaman serisindeki doğrusal olmayan uzun dönemli eğilimin yakalanması için ikinci dereceden bir spline fonksiyonu yer almaktadır (Karali & Power, 2013, s. 725).

Yapısal kırılmaları dikkate alan Spline-GARCH modeline göre, sabit bir yapıda olmayan koşulsuz varyans, zamanın bir fonksiyonu olarak değişmektedir. Öyle ki GARCH modeli için “ $\varepsilon_t = \sigma_t z_t$ ” olarak tanımlanan hata terimi, Spline-GARCH modelinde “ $\varepsilon_t = \tau_t \sigma_t z_t$ ” şeklinde genişletilmiştir. Her iki varsayım altında da “z<sub>t</sub>”, “0” ortalamalı ve sabit varyanslı i.i.d. sürecine sahip (bağımsız ve özdeş dağılmış) gözlemlenemeyen bir rassal değişkeni belirtmektedir. Bu doğrultuda GARCH(1, 1) için Spline-GARCH modeli, Formül 2.50 ve 51’de sunulmuştur (Bauwens vd., 2012, s. 13):



$$\sigma_t^2 = (1 - \alpha - \beta) + \beta\sigma_{t-1}^2 + \alpha(\varepsilon_{t-1}/\tau_{t-1})^2 \quad (2.50)$$

$$\tau_t^2 = \omega \exp\left(\delta_0 t + \sum_{i=1}^k \delta_i [(t - t_{i-1})_+]^2\right) \quad (2.51)$$

Formül 2.50 ve 2.51'e göre; “ $\alpha$ ” ARCH terimini, “ $\beta$ ” GARCH terimini, “ $\omega$ ” sabit bir değeri, “ $\delta_0 t$ ” düşük frekanslı volatilitenin zaman trendini,  $\sum_{i=1}^k \delta_i [(t - t_{i-1})_+]^2$  ise düşük değeri ikinci dereceden bir spline fonksiyonunu simgelemektedir (Karali & Power, 2013, s. 725). Modelde bulunan üssel fonksiyonel form, volatiliteye ait düşük frekanslı bileşenin her zaman pozitif hesaplanmasını garanti etmektedir. Yine “ $(t - t_i)_+$ ”, “ $t > t_i$ ” için “ $(t - t_i)$ ”ye diğer durumlarda ise “0”a eşit olmaktadır. Düğüm sayısı olan “ $k$ ” belirtilmediğinden, bu sayıyı optimum şekilde saptamak için bir bilgi kriteri kullanılabilir. Burada daha büyük “ $k$ ” değerleri, daha fazla döngü anlamına gelmektedir (Engle & Rangel, 2008, s. 1192-1193). Bunun yanı sıra spline fonksiyonunun tahminini kolaylaştırmak amacıyla düğümlerin eşit uzaklıklarda oldukları varsayılmaktadır (Amado vd., 2019, s. 222). Sonuç olarak, Spline-GARCH modeli ile yavaş hareket eden veya düşük frekansa sahip olan volatilité bileşenlerinin makroekonomik nedenleri araştırılabilir (Bollerslev, 2010, s. 160).

#### 2.2.1.12. Genişletilmiş GARCH (ICSS-GARCH)

Getiri serisinin varyansında meydana gelen yapısal kırılmalar, özellikle GARCH sınıfı modellerde kullanılan parametrelerin daha yüksek tahmin edilmesine ve sahte durağan dışı ya da uzun hafıza süreçlerinin oluşmasına neden olabilmektedir. Bu kapsamda ilk olarak Inclán & Tiao (1994) tarafından geliştirilip daha sonra Sansó vd. (2004) tarafından modifiye edilen ve ICSS (İteratif Kümülatif Kareler Toplamı) metoduna dayanan prosedürler yardımıyla, getiri serisine ait varyanstaki çoklu yapısal kırılmaların varlığı incelenebilmektedir (Çevik ve Sezen, 2020, s. 341). Öyle ki Inclán & Tiao (1994) tarafından tasarlanan test prosedürü, hata terimlerine ait kareler toplamı üzerinden hesaplanan “IT” istatistiğine dayanmaktadır. Buna göre (Demireli ve Torun, 2010, s. 135):

$$IT = \sup_k |\sqrt{T/2} D_k| \quad (2.52)$$

Burada;

$$D_k = \frac{C_k}{C_T} - \frac{k}{T} \quad (2.53)$$

Formül 2.53'de yer alan “ $C_T$ ” toplam kümülatif kareler toplamını, “ $T$ ” gözlem sayısını, “ $k$ ” volatilité kırılması olan gözlemi, “ $C_k$ ” ise volatilité kırılması belirlenen gözleme kadarki kümülatif kareler toplamını temsil etmektedir (Akgün, 2016, s. 8). Bunun yanı sıra “ $C_k$ ”, “ $C_k = \sum_{t=1}^k \varepsilon_t^2$ ,  $k = 1, \dots, T$ ,  $\varepsilon_t \sim i.i.d. (0, \sigma^2)$ ” şeklinde ifade edilmekte olup; hata teriminin, i.i.d. (independent and identically distributed) sürecine sahip olduğu varsayılmaktadır. Fakat yapılan araştırmalar incelendiğinde, finansal zaman serilerinin genellikle leptokurtik dağıldığı ve varyanslarının zaman içinde değiştiği gözlemlenmiştir. Nitekim Sansó vd. (2004), hata teriminin i.i.d. sürecine sahip olmadığı durumlarda, IT test istatistiğinin gerçek değerinden daha yüksek bulunduğunu ortaya koymuştur (Demireli ve Torun, 2010, s. 135). Bu nedenle Sansó vd. (2004) tarafından, varyanstaki kırılmalarının saptanması amacıyla yeniden formüle edilen “ $K_2$ ” istatistiği, aşağıda gösterilmiştir (Çevik ve Sezen, 2020, s. 342):

$$K_2 = \sup_k |T^{-1/2} G_k| \quad (2.54)$$

Burada “ $G_k$ ”, “ $G_k = \hat{\omega}_4^{-1/2} \left( C_k - \frac{k}{T} C_T \right)$ ” şeklinde hesaplanmaktadır. Ayrıca  $\hat{\omega}_4$ ,  $\omega_4$ 'ün tutarlı bir tahmincisi olarak Formül 2.55'e göre elde edilmektedir:

$$\hat{\omega}_4 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (\varepsilon_t^2 - \hat{\sigma}^2)^2 + \frac{2}{T} \sum_{l=1}^m \omega(l, m) \sum_{t=l+1}^T (\varepsilon_t^2 - \hat{\sigma}^2) (\varepsilon_{t-1}^2 - \hat{\sigma}^2) \quad (2.55)$$

Bartlett gibi bir gecikmeyi ifade eden “ $\omega(l, m)$ ”, “ $\omega(l, m) = 1 - l/(m + 1)$ ” olarak ya da kuadratik spektral biçimde tanımlanmaktadır. Bununla birlikte gecikme parametresi olan “ $m$ ”, Newey & West (1994) prosedürü ile tespit edilmektedir.

De Pooter & Van Dijk (2004)'e göre, ICSS yaklaşımının birtakım dezavantajları da söz konusudur. Bu yaklaşımda, maksimum yapısal kırılma sayısının kaç tane olması gerektiği bilinmemektedir. Ayrıca, minimum mesafe kısıtlaması uygulanmadığından, yapısal kırılmalar arasındaki zaman dilimlerinin en az ne kadar olması gerektiği hakkında herhangi bir sınırlandırma bulunmamaktadır (Büberkökü, 2021, s. 21). Oysa bir zaman serisindeki geçici şokların kırılma olarak algılanma ihtimalini düşürmek için kırılmalar arasında minimum bir uzunluğa ihtiyaç duyulmaktadır (Poon, 2005, s. 55).

Sonuç itibariyle getiri serisine ait varyansta kırılmaların mevcut olması halinde uygulanan ICSS-GARCH modeli, aşağıda ifade edilmiştir (Eyüboğlu ve Eyüboğlu, 2022, s. 708):

$$h_t^2 = \omega_t + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1}^2 \quad (2.56)$$

$$\omega_t = \omega_0 + \sum_{i=1}^k \omega_i D_i \quad (2.57)$$

Formül 2.57’de gösterilen “ $D_i$ ”, ani değişim kukla değişkenleri olarak temel volatilitede bir kırılmanın yaşanması durumunda “1”, aksi taktirde “0” değerini almaktadır. “ $k$ ” ise, ICSS prosedürüne göre saptanan ve kukla değişken şeklinde GARCH modeline eklenmesi gereken kırılmaların sayısını simgelemektedir.

### 2.2.1.13. Adaptif FIGARCH (A-FIGARCH)

Baillie & Morana (2009) tarafından formüle edilen Adaptif FIGARCH (A-FIGARCH) modeli, standart FIGARCH modelinin genişletilmesiyle oluşturulmuştur. Böylece bir A-FIGARCH modelinde, hem şokların volatilitte üzerindeki uzun dönem hafıza etkisi hem de getiri serisine ait koşulsuz varyanstaki yapısal kırılmaların varlığı birlikte modellenebilmiştir.

Formül 2.42, 2.43 ve 2.44’de, standart FIGARCH süreci ve bu sürece ilişkin koşullu varyans denklemi gösterilmiştir. Bahse konu eşitliklerden yola çıkılarak, A-FIGARCH modeline ulaşılmaktadır. Bu kapsamda FIGARCH sürecinden türetilen A-FIGARCH modeli, Formül 2.58 ve 2.59’da sunulmuştur (Baillie & Morana, 2009, s. 1579):

$$\sigma_t^2 = \omega_t + \{1 - \phi(L)(1 - L)^d [1 - \beta(L)]^{-1}\} \varepsilon_t^2 \quad (2.58)$$

$$\omega_t = \exp \left( \omega_0 + \sum_{j=1}^k [\gamma_j \sin(2\pi j t/T) + \delta_j \cos(2\pi j t/T)] \right) \quad (2.59)$$

Formül 2.59’da yer alan “ $\omega_0$ ” sabit bir değeri, “ $T$ ” ise getiri serisinin uzunluğunu temsil etmektedir. Bununla beraber “ $\omega_t$ ”, olası yapısal kırılmaları dikkate almak için kullanılmakta iken; “ $\gamma_j$ ” ve “ $\delta_j$ ”, sinüs ve kosinüs fonksiyonlarına ilişkin katsayıları belirtmektedir. Diğer taraftan A-FIGARCH modeli, “ $\omega_t = \omega [1 - \beta(1)]^{-1}$ ” eşitliği altında FIGARCH sürecine, “ $d = 0$ ” olduğunda ise Adaptif GARCH (A-GARCH) sürecine indirgenmektedir (Luo & Huang, 2018, s. 329).

Görüldüğü üzere A-FIGARCH modeli, trigonometrik fonksiyon değerlerinden oluşan Fourier terimlerinin, koşullu varyans denklemine eklenmesi yaklaşımına dayanmaktadır. Yani modelde, koşullu varyans denkleminde bulunan sabit terimin zaman içinde değişmesine imkân sağlayan trigonometrik terimler kullanılmaktadır (Çevik ve Sezen, 2020, s. 342). A-FIGARCH modelindeki esnek fonksiyonel form yaklaşımı, kırılma noktalarının gerçek konumunu tespit etmek için ön test yapılmasına gerek kalmaksızın, yapısal değişimleri oldukça etkin bir şekilde modelleyebilmektedir (Baillie & Morana, 2009, s. 1579).

A-FIGARCH modelinde, “k”nın alacağı değer belirlenirken, farklı değerler ve model seçim kriterleri hesaba katılarak, en uygun “k” değeri saptanmaktadır (Çevik & Sezen, 2020, s. 342). Ayrıca, koşullu varyansın zamanın her noktasında pozitif çıkması için FIGARCH modelinde ifade edilen kısıtlar bu modelde de geçerlidir (Baillie & Morana, 2009, s. 1579).

A-FIGARCH modelinde kullanılan Fourier dönüşümleri, diğer GARCH sınıfı modellere de uygulanabilmektedir. Şu hâlde herhangi bir GARCH modeline Fourier serileri eklenmek suretiyle, koşullu varyansın ortalamasında zaman içinde meydana gelen değişimleri yakalamak mümkün olmaktadır.

#### 2.2.1.14. Ortalamada GARCH (GARCH-M)

Önceki bölümlerde belirtildiği gibi, volatilité, bir kavram ve olgu olarak modern finansal piyasaların merkezinde yer almaktadır. Belirsizliğin bir ölçüsü olan volatilité, risk kavramı ile birebir aynı anlama gelmese de, piyasa risklerinin öncü bir göstergesi olarak, Harry Max Markowitz tarafından 1952 yılında temelleri atılan modern portföy teorisini akıllara getirmektedir. Bu teoriye göre, rasyonel yatırımcılar, belirli bir risk seviyesinde maksimum getiriye veya minimum risk seviyesinde belirli bir getiriye hedeflemektedir. Dolayısıyla teorik açıdan bakıldığında, üstlenilen risk ile beklenen getiri arasında pozitif yönlü bir ilişki bulunmaktadır.

Engle vd. (1987) tarafından, zamanla değişen risk primlerinin zamanla değişen koşullu varyans aracılığıyla tahmin edilmesi için Ortalamada ARCH (ARCH-M) modeli önerilmiştir. Fakat bu modelin geliştirilmiş versiyonu olan Ortalamada GARCH (GARCH-M) modeli, daha yaygın bir şekilde uygulanmaktadır (Carroll & Kearney, 2009, s. 76). Bir GARCH-M modelinde, koşullu volatilité, getiri serisine ait koşullu ortalama denklemine açıklayıcı bir değişken olarak eklenmektedir. Böylece bir finansal varlığın getirisi, bu finansal varlığın koşullu volatilitesine bağlı olarak modellenmektedir. GARCH-M (1, 1) modelinin matematiksel gösterimi ise, aşağıda ifade edilmiştir (Tsay, 2005, s. 123):

$$r_t = \mu + c\sigma_t^2 + \varepsilon_t \quad (2.60)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \quad (2.61)$$

Formül 2.60'de yer alan “c” parametresi, “risk primi parametresi” olarak da adlandırılmaktadır. İstatistiki açıdan anlamlı şekilde pozitif hesaplanan “c” değeri, finansal varlık getirisinin, kendi koşullu volatilitesi ile pozitif yönlü bir ilişkiye sahip olduğu anlamına gelmektedir. Bu durum, koşullu volatilitede meydana gelen bir artışın, finansal varlığın getirisinde de bir artışa yol açtığını göstermekte ve modern finans teorisi ile tutarlılık sergilemektedir. “c” katsayısının anlamlı olması, getiri serisinde seri korelasyonların bulunduğunu da ima etmektedir. Bu perspektiften ele alındığında, risk priminin varlığı, bazı hisse senedi getirilerinin seri korelasyonlara sahip olmasının başka bir nedeni olarak karşımıza çıkmaktadır (Tsay, 2005, s. 123).

GARCH-M modeli, finansal analizlerde oldukça yaygın kullanılmaktadır. Buna karşın bazı ampirik uygulamalarda; koşullu standart sapma, koşullu volatilitenin logaritması ya da koşullu volatilitenin bir gecikmeli değeri gibi diğer risk primi spesifikasyonları da, koşullu ortalama denklemde tercih edilmektedir.

### 2.2.2. Çok Değişkenli Otoresif Koşullu Değişen Varyans Modelleri

Tek değişkenli otoresif koşullu değişen varyans modelleri, doğaları gereği yalnızca tek bir değişkenden meydana gelmektedirler. Bu modellerde, her bir serinin koşullu varyansı, diğer tüm serilerden tamamen bağımsız bir şekilde modellenmekte, böylece finansal varlık getirisinin zamana bağlı olarak değişen koşullu varyans yapısı tahmin edilebilmektedir. Öte yandan çok değişkenli koşullu değişen varyans modelleri ile birden fazla finansal varlığın zamanla değişen koşullu kovaryans yapısı, dolayısıyla da bu varlıklara ait koşullu volatiliteler arasındaki ilişki, etkileşim veya aktarım tahmin edilebilmektedir. Yani çok değişkenli koşullu değişen varyans modelleri üzerinden, herhangi bir finansal varlığın volatilitesine gelebilecek bir şoka, diğer finansal varlık ya da varlıkların volatilitesinin nasıl tepki göstereceği ölçülebilmektedir. Bununla birlikte çok değişkenli modeller, tıpkı tek değişkenli modellerde olduğu gibi, her bir değişkenin koşullu varyans yapısının tahmin edilmesine de olanak sağlamaktadır.

Finansal piyasalar veya varlıkların volatiliteleri genellikle birlikte hareket etme eğiliminde olduklarından, modellemedeki ortak yaklaşım, her bir

piyasa veya varlığı ayrı ayrı ele almaktan daha verimli olabilmektedir. Bu kapsamda çok değişkenli bir model kullanılarak, herhangi bir piyasa ya da varlıkta ortaya çıkan volatilitenin, diğer piyasa ya da varlıkta yaşanan volatiliteye öncülük mü ettiği yoksa bir gecikmeye mi neden olduğu belirlenebilmektedir. Yine çok değişkenli modeller sayesinde, koşullu varyansların yanı sıra koşullu kovaryanslar için de tahminler yapıldığından, bu modellerden, potansiyel olarak faydalı bir dizi çıktı daha elde edilmektedir. Örneğin; riskten korunma oranları, portföy risk değeri tahminleri ve CAPM betaları gibi bazı hesaplanmalar için girdi olarak kullanılan kovaryans değerlerine, çok değişkenli modeller aracılığıyla ulaşılabilmektedir (Brooks, 2019, s. 544-545).

Kronolojik bir perspektiften bakıldığında, çok değişkenli otoregresif koşullu değişen varyans modellerinin, neredeyse tek değişkenli modeller ile aynı zamanda ortaya çıktığı görülmektedir. Bu kapsamda ilk çok değişkenli ARCH modelleri, Kraft & Engle (1982) ile Engle vd. (1984) tarafından tanıtılmıştır. Finansal uygulamalara geçiş ise, çok değişkenli ARCH'ı çok değişkenli GARCH'a genişleten Bollerslev vd. (1988) tarafından sağlanmıştır. Bu çalışmada, sermaye varlıklarını fiyatlandırma modeli, koşulsuz momentler yerine koşullu momentler çerçevesinde ele alınmıştır. Fakat makalede kullanılan ve VECH modeli olarak bilinen bu çok değişkenli yaklaşım, ikiden fazla varlık getirisini birlikte modelleme açısından yararlı olamayacak düzeyde fazla parametre içermektedir. Bu nedenle daha büyük boyutlar için tahmin edilebilecek çok değişkenli modellerin tasarlanması fikri gündeme gelmiştir. Öyle ki Bollerslev (1990)'in Sabit Koşullu Korelasyon GARCH (CCC-GARCH), Engle & Kroner (1995)'in Baba-Engle-Kraft-Kroner GARCH (BEKK-GARCH) ve Tse & Tsui (2002) ile Engle (2002)'in Dinamik Koşullu Korelasyon GARCH (DCC-GARCH) modelleri, zaman içinde geliştirilen ve çok değişkenli otoregresif koşullu değişen varyans literatürünü zenginleştiren önemli kilometre taşları olarak karşımıza çıkmaktadır (Bauwens vd., 2012, s. 18).

Anlaşılabacağı üzere ortak hareket ve yayılma etkisi, finansal varlık getirilerinin varyans-kovaryans yapısını tahmin etmede, çok değişkenli bir çerçeveyi desteklemektedir. Nitekim varlıkların karşılıklı bağımlılığının yanı sıra volatiliteler ve kovaryans/korelasyon dinamiklerini modellemek amacıyla çok değişkenli otoregresif koşullu değişen varyans modelleri önerilmiştir (Kalotychou & Staikouras, 2009, s. 16-17). Ancak; parametreler arasındaki doğrusal olmayan ilişkiler, tutumluluk ve varyans-kovaryans matrisini pozitif tanımlı tutma gerekliliği, bu modellerdeki en büyük zorlukları oluşturmaktadır (Poon, 2005, s. 65). Buna rağmen çok değişkenli modeller, finansal uygulamalarda ve akademik çalışmalarda

oldukça geniş bir yer edinmektedir. Örneğin, farklı finansal piyasalarda ya da varlıklarda meydana gelen volatiliteler arasındaki olası hareketlerin tespit edilmesinde, zamanla değişen varlık fiyatlandırma modellerinde ve portföy tahsisi ya da riskinin daha etkin bir şekilde yönetilmesinde bu modeller ön plana çıkmaktadır (Mills & Markellos, 2008, s. 326). Ayrıca, her ne kadar tek değişkenli modellere nazaran daha karmaşık yöntemler içerse de, çok değişkenli otoregresif koşullu değişen varyans modellerinin karmaşık yapısını hafifletmek ve sistemin bütününe ilişkin daha basit bir yapı ortaya koymak üzere birçok teknik geliştirilmiştir (Bozkurt, 2009a, s. 128). Buradan hareketle literatürde en çok kullanılan çok değişkenli otoregresif koşullu değişen varyans modelleri aşağıda açıklanmıştır:

### 2.2.2.1. VECH-GARCH

Çok değişkenli GARCH yaklaşımının temel çerçevesi, ilk olarak Bollerslev vd. (1988) tarafından ortaya konulmuş olup; tek değişkenli GARCH modeli, vektörleştirilmiş koşullu kovaryans matrisini kapsayacak şekilde genişletilmiştir (Mills & Markellos, 2008, s. 324). VECH-GARCH yaklaşıma göre çok değişkenli bir GARCH(p,q) modeli, “N × 1” boyut için aşağıdaki genel yapıyı almaktadır (Bollerslev vd., 1988, s. 119):

$$y_t = b + \delta H_t \omega_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2.62)$$

$$\text{vec}(H_t) = C + \sum_{i=1}^q A_i \text{vech}(\varepsilon_{t-i} \varepsilon'_{t-i}) + \sum_{j=1}^p B_j \text{vech}(H_{t-j}) \quad (2.63)$$

$$\varepsilon_t | \psi_{t-1} \sim N(0, H_t) \quad (2.64)$$

Burada “ $y_t$ ”, zaman serisi gözlemlerinin bir “N × 1” vektörünü; “ $\text{vec}(\cdot)$ ”, simetrik bir matrisin alt kısmına uygulanan sütun kümelendirme operatörünü; “ $b$ ”, “N × 1” sabitler vektörünü; “ $\varepsilon_t$ ”, “N × 1” inovasyon vektörünü; “ $H_t$ ”, “N × N” koşullu varyans-kovaryans matrisini; “ $C$ ”, koşullu varyans-kovaryans sabitlerinin bir “N(N + 1)/2 × 1” sütun vektörünü; “ $\psi_{t-1}$ ”, “t – 1” zamanındaki bilgi setini; sırasıyla ARCH ve GARCH parametrelerini içeren “ $A_i$  (i = 1, ..., q)” ve “ $B_j$  (j = 1, ..., p)” ise, “N(N + 1)/2 × N(N + 1)/2” boyutlu kare parametre matrislerini temsil etmektedir. Öte yandan VECH modelinin yaygın bir spesifikasyonu, şu şekilde ifade edilmektedir (Brooks, 2019, s. 550):

$$\text{VECH}(H_t) = C + \text{AVECH}(\Xi_{t-1} \Xi'_{t-1}) + \text{BVECH}(H_{t-1}) \quad (2.65)$$

$$\Xi_t | \psi_{t-1} \sim N(0, H_t) \quad (2.66)$$

İki değişkenli bir durumda (yani  $N = 2$  olduğunda), “C” “ $3 \times 1$ ” parametre vektörü, “A ve B” ise “ $3 \times 3$ ” parametre matrisleri olmaktadır. VECH modelinin durağanlığı ise, mutlak değer olarak her bir “A + B” özdeğerinin birden küçük hesaplanmasını gerektirmektedir. Daha anlaşılabilir olması bakımından, iki değişkenli VECH modelinin matris formundaki elemanları aşağıda sunulmuştur (Brooks, 2019, s. 550):

$$H_t = \begin{bmatrix} h_{11t} & h_{12t} \\ h_{21t} & h_{22t} \end{bmatrix} \quad \Xi_t = \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{21} \\ C_{31} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

Burada VECH operatörü, matrisin üst üçgen kısmını almakta ve her bir elemanı tek sütunlu bir vektör halinde kümelemektedir. Örneğin  $VECH(H_t)$ ;

$$VECH(H_t) = \begin{bmatrix} h_{11t} \\ h_{22t} \\ h_{12t} \end{bmatrix}$$

matrisine dönüşmektedir. Buna göre “ $h_{ijt}$ ”, iki farklı varlığa ait getiri serisinin ( $i = 1$  ve  $2$ ) “ $t$ ” zamanındaki koşullu varyanslarını; “ $h_{ijt}$  ( $i \neq j$ )” ise, bahse konu varlık getirileri arasındaki koşullu kovaryansları simgelemektedir. Ayrıca,  $VECH(\Xi_t \Xi_t')$ 'yi, aşağıdaki gibi ifade etmek mümkündür (Brooks, 2019, s. 551):

$$\begin{aligned} VECH(\Xi_t \Xi_t') &= VECH\left(\begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1t} & u_{2t} \end{bmatrix}\right) \\ &= VECH\left(\begin{bmatrix} u_{1t}^2 & u_{1t}u_{2t} \\ u_{1t}u_{2t} & u_{2t}^2 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} u_{1t}^2 \\ u_{2t}^2 \\ u_{1t}u_{2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$



Şu hâlde iki değişkenli VECH-GARCH(1,1) modelinin matris formundaki notasyonu aşağıdaki gibi olmaktadır:

$$H_t = \begin{bmatrix} h_{11,t} \\ h_{22,t} \\ h_{12,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{21} \\ C_{31} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,t-1}^2 \\ u_{2,t-1}^2 \\ u_{1,t-1}u_{2,t-1} \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11,t-1} \\ h_{22,t-1} \\ h_{12,t-1} \end{bmatrix}$$

Buradan hareketle VECH modelinin tam bir gösterimi ise, Formül 2.67, 2.68 ve 2.69'da sunulmuştur:

$$h_{11t} = C_{11} + \alpha_{11}u_{1t-1}^2 + \alpha_{12}u_{2t-1}^2 + \alpha_{13}u_{1t-1}u_{2t-1} + b_{11}h_{11t-1} + b_{12}h_{22t-1} + b_{13}h_{12t-1} \quad (2.67)$$

$$h_{22t} = C_{21} + \alpha_{21}u_{1t-1}^2 + \alpha_{22}u_{2t-1}^2 + \alpha_{23}u_{1t-1}u_{2t-1} + b_{21}h_{11t-1} + b_{22}h_{22t-1} + b_{23}h_{12t-1} \quad (2.68)$$

$$h_{12t} = C_{31} + \alpha_{31}u_{1t-1}^2 + \alpha_{32}u_{2t-1}^2 + \alpha_{33}u_{1t-1}u_{2t-1} + b_{31}h_{11t-1} + b_{32}h_{22t-1} + b_{33}h_{12t-1} \quad (2.69)$$

Görüldüğü gibi koşullu varyanslar ve koşullu kovaryanslar; serideki tüm varlık getirilerinin koşullu varyanslarına, bu getiriler arasındaki koşullu kovaryanslara, gecikmeli karesel hatalara ve hatalara ait çapraz çarpımların gecikmeli değerlerine bağlı olmaktadır. Dolayısıyla kısıtlanmamış VECH modeli, oldukça fazla parametre içermekte ve bu modelin tahmin edilmesi bir hayli zor görünmektedir. Nitekim  $N = 2$  olduğunda  $C$  için 3,  $A$  için 9 ve  $B$  için 9 olmak üzere toplam 21 parametrenin tahmini söz konusudur. Bununla birlikte  $N = 3$  iken toplam 78 parametreye,  $N = 4$  olduğunda ise toplam 210 parametreye ulaşılmaktadır (Brooks, 2019, s. 551).

VECH modeli, prensipte maksimum olabilirlik yöntemi ile verimli bir şekilde tahmin edilebilmektedir (Harvey vd., 2005, s. 160). Fakat model, birçok dezavantaja da sahiptir (Belasri & Ellaia, 2017, s. 386). Her ne kadar esnek bir yapıda olsa da, VECH modeli, her bir “t” değeri için

“ $H_t$ ”nin pozitif tanımlı olmasını garanti etmemektedir (Carroll & Kearney, 2009, s. 81). Ayrıca, pratikte ikiden fazla değişken için tahmin edilmesi olası görünmemektedir. Bu nedenle Bollerslev vd. (1988) tarafından, tahmin edilmesi gereken parametre sayısını azaltmak üzere bir dizi kısıtlama ve özellik tavsiye edilmiştir (Mills & Markellos, 2008, s. 324). Örneğin Bollerslev (1990) tarafından, koşullu korelasyonların sabit varsayıldığı bir yaklaşım öne sürülmüştür (Harvey vd., 2005, s. 160).

#### 2.2.2.2. Diagonal (Köşegen) VECH-GARCH

Bollerslev vd. (1988) tarafından, VECH-GARCH modelinde yer alan ve tahmin edilmesi gereken parametre sayısından tasarruf sağlamak amacıyla Diagonal (Köşegen) VECH-GARCH modeli geliştirilmiştir. Bu modele göre koşullu varyanslar, yalnızca kendi gecikmeli karesel kalıntılarına ve gecikmeli değerlerine bağlı olmaktadır. Böylece A ve B matrisleri diagonal hale gelmekte ve tahmin edilen parametre sayısı oldukça azalmaktadır. “ $p = q = 1$ ” eşitliği altında, Diagonal VECH modeli aşağıdaki gibi oluşturulmaktadır (Carroll & Kearney, 2009, s. 81):

$$H_t = C^* + A^* \circ (\varepsilon_{t-1} \varepsilon'_{t-1}) + B^* \circ H_{t-1} \quad (2.70)$$

Formül 2.70’de kullanılan A ve B parametreleri simetrik matrisleri, “ $\circ$ ” terimi ise Hadamard çarpımını (eleman-eleman çarpımını) temsil etmektedir. Bunun yanı sıra iki değişkene sahip bir Diagonal VECH(1,1) modelinin matris formundaki notasyonu aşağıda sunulmuştur (Engle & Kroner, 1995, s. 126):

$$H_t = \begin{bmatrix} h_{11,t} \\ h_{12,t} \\ h_{22,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{01} \\ C_{02} \\ C_{03} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t-1}^2 \\ \varepsilon_{1,t-1} \varepsilon_{2,t-1} \\ \varepsilon_{2,t-1}^2 \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11,t-1} \\ h_{12,t-1} \\ h_{22,t-1} \end{bmatrix}$$

Buradan hareketle Diagonal VECH(1,1) modelinin tam bir gösterimi ise, Formül 2.71, 2.72 ve 2.73’de ifade edilmiştir:

$$h_{11,t} = C_{01} + a_{11} \varepsilon_{1,t-1}^2 + b_{11} h_{11,t-1} \quad (2.71)$$

$$h_{12,t} = C_{02} + \alpha_{22}\varepsilon_{1,t-1}\varepsilon_{2,t-1} + b_{22}h_{12,t-1} \quad (2.72)$$

$$h_{22,t} = C_{03} + \alpha_{33}\varepsilon_{2,t-1}^2 + b_{33}h_{22,t-1} \quad (2.73)$$

Buna göre “ $H_t$ ”nin her elemanı, sadece kendi geçmiş değerine ve “ $\varepsilon_{t-1}\varepsilon'_{t-1}$ ”deki ilgili çarpım terimine bağlı olmaktadır. Şu hâlde Diagonal VECH modelinin her bir elemanı, GARCH(1,1) tipi bir modeli takip etmektedir. Model basit görünse de, pozitif tanımlı bir kovaryans matrisi üretmeyebilmektedir. İlaveten model, volatilité serileri arasında dinamik bir bağımlılığa izin vermemektedir (Tsay, 2005, s. 448-449).

Diagonal VECH-GARCH modelinde, standart bir VECH modelinde kullanılan koşullu varyans-kovaryans matrisi, A ve B'nin köşegen yapıda olduğu varsayılan bir formla sınırlandırılmaktadır. Bu sınırlama, bir seriden diğerine doğrudan volatilité yayılımı olmadığı anlamına gelmekte, dolayısıyla da tahmin edilecek parametre sayısı, iki değişkenli bir sistemde 9'a, üç değişkenli bir sistemde ise 18'e düşmektedir. Bununla beraber model, sonsuz dereceli ve çok değişkenli bir ARCH modeli olarak da ifade edilebilir. Bu ARCH modeline göre kovaryans, son gözlemlerin daha yüksek ağırlıklar taşıdığı bir durumda, beklenmedik getirilerin geçmiş çapraz çarpımlarının geometrik şekilde azalan ağırlıklı ortalamasını belirtmektedir (Brooks, 2019, s. 551-552).

### 2.2.2.3. Baba-Engle-Kraft-Kroner GARCH (BEKK-GARCH)

Bera & Higgins (1993) tarafından, VECH yaklaşımı ile yapılacak tahminlerde, “ $H_t$ ” matrisine ilişkin pozitif tanımlılık şartının sağlanmasının ve kontrol edilmesinin kolay olmadığına işaret edilmiştir (Carroll & Kearney, 2009, s. 82). Buna karşın bir varyans-kovaryans veya korelasyon matrisinin, her zaman “pozitif yarı-tanımlı” olması gerekmektedir. Burada VECH yaklaşımının önemli bir dezavantajı, “pozitif yarı-tanımlı” kovaryans matrisini garanti etmemesinden kaynaklanmaktadır (Brooks, 2019, s. 552). Bu kapsamda Engle & Kroner (1995) tarafından önerilen Baba-Engle-Kraft-Kroner GARCH (BEKK-GARCH) modeli ile çok değişkenli otoregresif koşullu değişen varyans süreçleri için yeni bir parametризasyona gidilerek, koşullu kovaryans matrisinin pozitif tanımlılığı sağlanmıştır. Ayrıca modelde, kovaryans durağanlığına yönelik yeterli ve gerekli olan koşullar da sunulmuştur (Gök ve Kalaycı, 2015, s. 47).

Herhangi bir parametrelendirmenin akla yatkın olabilmesi açısından, örnek uzayda yer alan “ $\varepsilon_t$ ” ve “ $x_t$ ”ye ait tüm değerler için “ $H_t$ ”nin pozitif tanımlı olması gerekmektedir. VECH hatta diagonal VECH gösteriminde

dahi, bu kısıtlamayı uygulamak ya da kontrol etmek bir hayli zor olabilmektedir (Engle & Kroner, 1995, s. 126). Bu noktada Engle & Kroner (1995) tarafından, VECH yaklaşımının sınırlı bir versiyonu olan BEKK modeli tanıtılmıştır (Belasri & Ellaia, 2017, s. 386). BEKK modeli ile varyans-kovaryans matrisini pozitif tanımlı tutma koşulu sağlanmaktadır (Carroll & Kearney, 2009, s. 82). Öyle ki modele ilişkin denklemin sağ kısmında yer alan terimlerin kuadratik yapısı, kovaryans matrisinin pozitif tanımlılığını mümkün kılmaktadır (Brooks, 2019, s. 551). Bu kapsamda BEKK modelinin genel gösterimi aşağıda ifade edilmiştir (Engle & Kroner, 1995, s. 127):

$$H_t = \underbrace{C_0^{*'} C_0^*}_K + \underbrace{\sum_{k=1}^K C_{1k}^{*'} x_t x_t' C_{1k}^*}_P + \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^q A_{ik}^{*'} \varepsilon_{t-i} \varepsilon_{t-i}' A_{ik}^* \quad (2.74)$$

Burada “ $C_0^*$ ” üçgen matris olmak üzere “ $C_0^{*}$ ”, “ $A_{ik}^*$ ” ve “ $G_{ik}^*$ ”, “ $N \times N$ ” parametre matrislerini; “ $C_{1k}^*$ ”, “ $J \times N$ ” parametre matrisini; “ $K$ ” toplama limiti ise sürecin genelliğini simgelemektedir. Öte yandan Formül 2.74, tüm pozitif tanımlı diagonal gösterimleri ve neredeyse tüm pozitif tanımlı VECH gösterimleri içerecek şekilde genelleştirilmiştir. Dışsal etkilerin yokluğunda “ $K = 1$ ” iken GARCH(1,1) modeli ele alındığında, aşağıdaki BEKK modeline ulaşılmaktadır (Engle & Kroner, 1995, s. 127):

$$H_t = C_0^{*'} C_0^* + A_{11}^{*'} \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}' A_{11}^* + G_{11}^{*'} H_{t-1} G_{11}^* \quad (2.75)$$

İki değişkenli BEKK(1,1) modelinin matris formundaki notasyonu ise aşağıdaki gibidir:

$$H_t = C_0^{*'} C_0^* + \begin{bmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t-1}^2 & \varepsilon_{1,t-1} \varepsilon_{2,t-1} \\ \varepsilon_{2,t-1} \varepsilon_{1,t-1} & \varepsilon_{2,t-1}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} g_{11}^* & g_{12}^* \\ g_{21}^* & g_{22}^* \end{bmatrix}' H_{t-1} \begin{bmatrix} g_{11}^* & g_{12}^* \\ g_{21}^* & g_{22}^* \end{bmatrix}$$

Ya da;

$$H_t = \begin{bmatrix} h_{11,t} & h_{12,t} \\ h_{21,t} & h_{22,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11,0} & C_{12,0} \\ C_{21,0} & C_{22,0} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} C_{11,0} & C_{12,0} \\ C_{21,0} & C_{22,0} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& + \begin{bmatrix} \alpha_{11,1} & \alpha_{12,1} \\ \alpha_{21,1} & \alpha_{22,1} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t-1}^2 & \varepsilon_{1,t-1}\varepsilon_{2,t-1} \\ \varepsilon_{2,t-1}\varepsilon_{1,t-1} & \varepsilon_{2,t-1}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11,1} & \alpha_{12,1} \\ \alpha_{21,1} & \alpha_{22,1} \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} b_{11,1} & b_{12,1} \\ b_{21,1} & b_{22,1} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} h_{11,t-1} & h_{12,t-1} \\ h_{21,t-1} & h_{22,t-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11,1} & b_{12,1} \\ b_{21,1} & b_{22,1} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

A ve B matrislerinin kendi transpozeleri ile çarpımlarının söz konusu olduğu iki gösterimde de, BEKK formu modelin VECH formu ile kıyaslandığında, denklemler arasında ve içerisinde getirilen kısıtlamalar sayesinde parametre tasarrufuna gidildiği görülmektedir. Nitekim  $N = 2$  olduğunda, sabit parametreler hariç olmak üzere VECH modelindeki toplam 18 parametreye karşılık, BEKK modelinde sadece 8 parametrenin tahmini yapılmaktadır (Engle & Kroner, 1995, s. 127).

Birinci gösterim için zaman alt simgeleri ve GARCH terimleri ihmal edildiğinde BEKK modeli şu şekilde olmaktadır (Engle & Kroner, 1995, s. 127):

$$h_{11} = C_{11} + \alpha_{11}^* \varepsilon_1^2 + 2\alpha_{11}^* \alpha_{21}^* \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \alpha_{21}^{*2} \varepsilon_2^2 \quad (2.76)$$

$$h_{12} = C_{12} + \alpha_{11}^* \alpha_{12}^* \varepsilon_1^2 + (\alpha_{21}^* \alpha_{12}^* + \alpha_{11}^* \alpha_{22}^*) \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \alpha_{21}^* \alpha_{22}^* \varepsilon_2^2 \quad (2.77)$$

$$h_{22} = C_{13} + \alpha_{12}^{*2} \varepsilon_1^2 + 2\alpha_{12}^* \alpha_{22}^* \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \alpha_{22}^{*2} \varepsilon_2^2 \quad (2.78)$$

İkinci gösterime bakıldığında ise, sırasıyla ARCH ve GARCH etkilerini ölçen “ $\alpha_{11,1}$ ” ve “ $b_{11,1}$ ” parametreleri, birinci finansal varlığa ilişkin volatilitenin kalıcılığını yakalamaktadır. Benzer şekilde “ $\alpha_{22,1}$ ” ve “ $b_{22,1}$ ” parametreleri, ikinci finansal varlığa ait volatilitenin kalıcılığını hesaplamaktadır. Bununla birlikte tek değişkenli GARCH modelleri için geçerli olan kısıtlar, çok değişkenli BEKK modeli için de geçerlidir. Dolayısıyla her iki finansal varlık için de, “a” ve “b” parametrelerinin istatistikî açıdan anlamlı olarak “0”dan büyük ve toplamlarının “1”den küçük olması beklenmektedir. Öte yandan “ $\alpha_{21,1}$ ” ve “ $b_{21,1}$ ” parametreleri, birinci finansal varlığın volatilitelerinden ikinci finansal varlığın volatilitelerine doğru aktarımı ölçmektedir. Bu nedenle her iki parametreden birinin veya ikisinin istatistikî açıdan anlamlı olması, birinci finansal varlığın volatilitelerinden ikinci finansal varlığın volatilitelerine doğru bir aktarım olduğunu ifade etmektedir. Buna paralel olarak “ $\alpha_{12,1}$ ” ve “ $b_{12,1}$ ”

parametreleri, ikinci finansal varlığın volatilitésinden birinci finansal varlığın volatilitésine doğru aktarım olup olmadığını göstermektedir. O hâlde bu parametrelerden herhangi birinin veya ikisinin istatistiki açıdan anlamlı olması, ikinci finansal varlığın volatilitésinden birinci finansal varlığın volatilitésine doğru bir aktarım olduğu anlamına gelmektedir. Son olarak, bir finansal varlığın volatilitésinden diğer finansal varlığın volatilitésine doğru meydana gelen aktarımın büyüklüğü hesaplanırken, istatistiki açıdan anlamlı olan parametrenin katsayısına ait büyüklük dikkate alınmaktadır. Şayet her iki parametre de anlamlı ise, aktarımın büyüklüğü, her iki parametreye ait katsayı büyüklüklerinin toplamından oluşmaktadır.

#### 2.2.2.4. Sabit Koşullu Korelasyon GARCH (CCC-GARCH)

VECH ve BEKK modellerinde, getiri serileri arasındaki kovaryans dinamikleri tespit edilebilmektedir. Bu modellerde, zamanın her noktası için herhangi bir seri çifti arasındaki koşullu korelasyonlar, koşullu kovaryansların koşullu standart sapmaların çarpımına bölünmesi ile elde edilebilmektedir. Bu noktada farklı bir yaklaşım ise, korelasyon dinamiklerini doğrudan modellemektir (Brooks, 2019, s. 553). Koşullu kovaryans matrisinin, koşullu standart sapmalar ve koşullu korelasyonlar şeklinde ayrıştırıldığı bu yaklaşıma göre oluşturulan modeller, “Koşullu Korelasyon GARCH Modelleri” olarak da bilinmektedir. Bu doğrultuda Bollerslev (1990) tarafından geliştirilen Sabit Koşullu Korelasyon GARCH (CCC-GARCH) modeli, “Koşullu Korelasyon GARCH Modelleri”nden biri olarak karşımıza çıkmaktadır (İmre, 2021, s. 6). Dolayısıyla bir CCC-GARCH modelinde, koşullu varyansların yanı sıra koşullu korelasyonlar da göz önünde bulundurulmaktadır (Hepsağ ve Yaşar Akçalı, 2016, s. 57).

CCC-GARCH modeline göre; “ $y_t$ ”, “ $N \times 1$ ” boyutunda bir vektör ve “ $H_t$ ”, zamana göre değişen koşullu kovaryans matrisi olarak tanımlandığında (Bollerslev, 1990, s. 499);

$$y_t = E(y_t | \psi_{t-1}) + \varepsilon_t \quad (2.79)$$

$$\text{Var}(\varepsilon_t | \psi_{t-1}) = H_t \quad (2.80)$$

çeşitliklerine ulaşılmaktadır. Burada “ $\psi_{t-1}$ ”, “ $t - 1$ ” zamanına kadar mevcut tüm bilgiler tarafından oluşturulmakta, “ $H_t$ ” ise pozitif tanımlı bir matrisi temsil etmektedir. Ayrıca; “ $h_{ij,t}$ ”, “ $H_t$ ”nin “ $ij$ ”inci elemanı, “ $y_{it}$ ” ve “ $\varepsilon_{it}$ ” ise sırasıyla “ $y_t$ ” ve “ $\varepsilon_t$ ”nin “ $i$ ”inci elemanları olmak üzere, “ $t - 1$ ” zamanında “ $y_{it}$ ” ve “ $y_{jt}$ ” arasındaki tutarlılığın zamana bağlı olmayan ölçüsü (koşullu korelasyon),  $\rho_{ij,t} = h_{ij,t} / \sqrt{(h_{ii,t} h_{jj,t})}$  şeklinde ifade

edilmektedir. Burada tüm “ $\rho$ ” değerleri için  $-1 < \rho_{ij,t} < 1$  aralığı söz konusudur (Bollerslev, 1990, s. 499).

Her ne kadar koşullu kovaryansların zaman içindeki değişimi ile paralel olarak koşullu korelasyonların da zamanla farklılaşacağı beklense de, bazı uygulamalarda, koşullu korelasyonların zamandan bağımsız olarak sabit kalacağı kabul edilebilir. Bu doğrultuda koşullu kovaryanslar (Bozkurt, 2009a, s. 132);

$$h_{ij,t} = \rho_{ijt} \sqrt{(h_{ii,t} h_{jj,t})}, \quad j = 1, \dots, N \quad i = 1, \dots, N \quad (2.81)$$

şeklinde tanımlanabilir. Bununla birlikte sabit koşullu korelasyonlara sahip bir modelin çekiciliği, doğrudan basitleştirilmiş olan tahmin ve çıkarım prosedürlerinden kaynaklanmaktadır. Bu kapsamda koşullu varyansların her biri, aşağıdaki gibi yeniden formüle edilebilmektedir (Bollerslev, 1990, s. 499):

$$h_{ii,t} \equiv \omega_i \sigma_{it}^2 \quad i = 1, \dots, N \quad (2.82)$$

Burada “ $\omega_i$ ” pozitif sabit bir sayıyı belirtmekte iken, “ $\sigma_{it}^2 > 0$ ” olarak kabul edilmektedir. Formül 2.81 ve 2.82 dikkate alındığında, tam bir koşullu kovaryans matrisi ise, şu şekilde bölümlendirilebilmektedir:

$$H_t = D_t \Gamma D_t \quad (2.83)$$

Formül 2.83’deki “ $D_t$ ”, “ $\sigma_{1t}, \dots, \sigma_{Nt}$ ” elemanlı ve “ $N \times N$ ” boyutlu stokastik bir diagonal matrisi; “ $\Gamma$ ” ise, karakteristik olarak  $\rho_{ij} \sqrt{(\omega_i \omega_j)}$  elemanına sahip olan ve zamana göre değişmeyen “ $N \times N$ ” boyutlu bir matrisi simgelemektedir (Bollerslev, 1990, s. 499). Şu hâlde bir CCC-GARCH modelinin matris formundaki gösterimi aşağıdaki gibi olmaktadır (Bozkurt, 2009a, s. 133):

$$H_t = \begin{bmatrix} \sqrt{h_{11,t}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{h_{22,t}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{h_{NN,t}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1N} \\ \rho_{21} & 1 & \dots & \rho_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{N1} & \rho_{N2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{h_{11,t}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{h_{22,t}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{h_{NN,t}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} h_{11,t} & \rho_{12}\sqrt{h_{11,t}h_{22,t}} & \dots & \rho_{1N}\sqrt{h_{11,t}h_{NN,t}} \\ \rho_{21}\sqrt{h_{22,t}h_{11,t}} & h_{22,t} & \dots & \rho_{2N}\sqrt{h_{22,t}h_{NN,t}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{N1}\sqrt{h_{NN,t}h_{11,t}} & \rho_{N2}\sqrt{h_{NN,t}h_{22,t}} & \dots & h_{NN,t} \end{bmatrix}$$

Buna göre sabit bir koşullu korelasyon varsayımı altında, koşullu kovaryanslar, koşullu standart sapmalar tarafından belirlenmektedir. Fakat koşullu korelasyonların zamana içinde sabit olduğu varsayımı, ampirik olarak sorgulanmaktadır. Nitekim Bera & Kim (2002)'in bilgi matrisine dayalı testi ve Tse (2000)'nin Lagrange Çarpanı testi de dâhil olmak üzere sabit koşullu korelasyon varsayımına yönelik çeşitli testler geliştirilmiştir. Ulaşılan sonuçlar, kullanılan teste bağlı olarak farklılık göstermektedir. Buna karşın özellikle pay getirileri açısından sabit korelasyonlara ilişkin göz ardı edilemeyecek kanıtların varlığı da dikkat çekmektedir (Brooks, 2019, s. 554). Diğer taraftan tek değişkenli bir sistem içinde tahmin edilen CCC-GARCH modeli, büyük kovaryans matrislerinin hesaplanabilmesine olanak sağlamaktadır (Bozkurt, 2009b, s. 73).

Sonuç olarak CCC-GARCH yaklaşımı, zaman içinde varyans ve kovaryansların değişebildiği ancak korelasyonların sabit olduğu varsayımına dayanmaktadır. Modelin tahmininde en çok olabilirlik yöntemi kullanılırken, VECH ve BEKK modellerine nazaran daha az sayıda parametre tahmin edilmektedir. Bunun yanı sıra bir CCC-GARCH modelinde, getiri serileri arasındaki ilişki de modellenenmektedir. Çünkü bu modelde, değişkenler arasında zamandan bağımsız olarak bir korelasyon katsayısı (sabit bir korelasyon katsayısı) hesaplanmaktadır.

#### 2.2.2.5. Dinamik Koşullu Korelasyon GARCH (DCC-GARCH)

Zamandan bağımsız olan sabit bir koşullu korelasyon varsayımı, birçok ampirik uygulama açısından gerçekçi bulunamayabilmektedir. Bu nedenle Christodoulakis & Satchell (2002), Tse & Tsui (2002) ve Engle (2002) tarafından gerçekleştirilen çalışmalarda, zamana bağlı kılınan bir koşullu korelasyon matrisi üzerinden, CCC-GARCH modelinin farklı bir genellemesi geliştirilmiştir. Bu yaklaşım, Dinamik Koşullu Korelasyon GARCH (DCC-GARCH) yaklaşımı olarak da bilinmektedir (Bauwens vd., 2006, s. 89). Bunlardan Christodoulakis & Satchell (2002) tarafından tanıtılan model, sadece iki değişkenli bir yapıya uygulanabilmekte iken; Tse & Tsui (2002) ve Engle (2002) tarafından ortaya atılan modeller, çok



değişkenli ve yüksek boyutlu veri setlerine genişletilebilmektedir (Davaslıgil Atmaca, 2018, s. 290).

Zamanla değişebilen bir koşullu korelasyon varsayımından yola çıkan Tse & Tsui (2002) tarafından, “ $H_t = D_t \Gamma D_t$ ” eşitliği altında çok değişkenli bir GARCH modeli geliştirilmiştir. Bu modelde, koşullu varyansların her biri tek değişkenli bir GARCH modeli aracılığıyla hesaplanırken, koşullu korelasyon matrisi, otoregresif hareketli ortalama (ARMA) formu üzerinden ifade edilmektedir. Bununla birlikte VECH yaklaşımı üzerine oluşturulan model, en çok olabilirlik yöntemi ile tahmin edilmektedir (Bozkurt, 2009a, s. 133). Böylece VECH-diagonal formülasyonuna dayalı olarak, her bir koşullu varyans terimi, Formül 2.84’de gösterilen tek değişkenli bir GARCH(p,q) sürecini takip etmektedir (Tse & Tsui, 2002, s. 352):

$$\sigma_{it}^2 = \omega_i + \sum_{h=1}^p \alpha_{ih} \sigma_{i,t-h}^2 + \sum_{h=1}^q \beta_{ih} y_{i,t-h}^2, \quad i = 1, \dots, K \quad (2.84)$$

Eşitlikte kullanılan “ $\omega_i$ ”, “ $\alpha_{ih}$ ” ve “ $\beta_{ih}$ ” parametreleri negatif olmamak şartıyla; “ $i = 1, \dots, K$ ” için  $\sum_{h=1}^p \alpha_{ih} + \sum_{h=1}^q \beta_{ih} < 1$  kısıtı söz konusudur. Öte yandan Diagonal VECH yaklaşımını benimseyen araştırmacılar tarafından, “ $1 \leq i < j \leq K$ ” iken “ $\alpha_{it}^2$ ” yerine “ $\alpha_{ijt}$ ”nin, “ $y_{it}^2$ ” yerine ise “ $y_{it}y_{jt}$ ”nin kullanıldığı koşullu kovaryans terimleri için de Formül 2.84’ün geçerli olduğu kabul edilmiştir. Fakat bu varsayımdan sapıldığında ve koşullu korelasyon matrisine odaklanıldığında, zamanla değişen koşullu korelasyon matrisi şu şekilde tanımlanabilmektedir (Tse & Tsui, 2002, s. 352):

$$\Gamma_t = (1 - \theta_1 - \theta_2)\Gamma + \theta_1\Gamma_{t-1} + \theta_2\Psi_{t-1} \quad (2.85)$$

Buna göre “ $\Gamma = \{\rho_{ij}\}$ ”, “ $K \times K$ ” boyutuna ve birim köşegen elemanlara sahip pozitif tanımlı bir matrisi; “ $\Psi_{t-1}$ ” ise, “ $K \times K$ ” boyutlu ve elemanları “ $y_t$ ” değişkenine ait geçmiş gözlemlerin fonksiyonları olan bir matrisi simgelemektedir. “ $0 \leq \theta_1, \theta_2 < 1$ ” ve “ $\theta_1 + \theta_2 \leq 1$ ” kısıtları, “ $\Gamma$ ” koşullu korelasyon matrisinin pozitif tanımlı olmasını sağlamakta iken; “ $\Psi_{t-1}$ ”in, tek değişkenli bir GARCH(1,1) modelindeki “ $y_{i,t-1}^2$ ” ile benzerlik taşıdığı gözlemlenebilmektedir. Ayrıca, “ $\Gamma_t$ ” standardize edilmiş bir ölçüt olduğundan, “ $\Psi_{t-1}$ ”in de standardize edilmiş kalıntıların ( $\varepsilon_t$ ) gecikmeli değerlerine bağlı olması beklenmektedir. Dolayısıyla “ $\Psi_t = \{\psi_{ijt}\}$ ” eşitliği altında ve Formül 2.86 aracılığıyla “ $\Psi_{t-1}$ ”e ulaşılabilir (Tse & Tsui, 2002, s. 352-353):

$$\psi_{ij,t-1} = \frac{\sum_{h=1}^M \varepsilon_{i,t-h} \varepsilon_{j,t-h}}{\sqrt{(\sum_{h=1}^M \varepsilon_{i,t-h}^2)(\sum_{h=1}^M \varepsilon_{j,t-h}^2)}} \quad 1 \leq i < j \leq N \quad (2.86)$$

Burada “ $\Psi_{t-1}$ ”, “ $\{\varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-M}\}$ ”e ait örneklem korelasyon matrisi; “ $E_{t-1}$ ”, “ $E_{t-1} = (\varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-M})$ ” eşitliği tarafından sağlanan “ $K \times M$ ” boyutlu bir matris; “ $B_{t-1}$ ” ise, ikinci köşegen elemanın  $\sqrt{(\sum_{h=1}^M \varepsilon_{i,t-h}^2)}$  şeklinde olduğu “ $K \times K$ ” boyutlu diagonal bir matris olarak ele alındığında, “ $\Psi_{t-1}$ ” aşağıdaki gibi yazılabilmektedir:

$$\Psi_{t-1} = B_{t-1}^{-1} E_{t-1} E_{t-1}' B_{t-1}^{-1} \quad (2.87)$$

Normallik varsayımında modelin tahmini için uygulanan koşullu log olabilirlik fonksiyonu ise, Formül 2.88 ve 89’da belirtilmiştir (Tse & Tsui, 2002, s. 353):

$$\ell_t = -\frac{1}{2} \ln |D_t \Gamma_t D_t| - \frac{1}{2} y_t' D_t^{-1} \Gamma_t^{-1} D_t^{-1} y_t \quad (2.88)$$

$$\ell_t = -\frac{1}{2} \ln |\Gamma_t| - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^K \ln \sigma_{it}^2 - \frac{1}{2} y_t' D_t^{-1} \Gamma_t^{-1} D_t^{-1} y_t \quad (2.89)$$

Tse & Tsui (2002)’ye benzer şekilde Engle (2002) tarafından da, dinamik koşullu korelasyonlara sahip çok değişkenli bir GARCH modeli tanımlanmıştır. Model; “ $H_t = D_t R_t D_t$ ”, “ $D_t = \text{diag}\{\sqrt{h_{i,t}}\}$ ”, “ $R_t = D_t^{-1} H_t D_t^{-1}$ ”, “ $r_t | \mathcal{I}_{t-1} \sim N(0, D_t R_t D_t)$ ” ve “ $\varepsilon_t = D_t^{-1} r_t$ ” olmak üzere aşağıda sunulmuştur (Engle, 2002, s. 341-342):

$$D_t^2 = \text{diag}\{\omega_i\} + \text{diag}\{K_i\} \circ r_{t-1} r_{t-1}' + \text{diag}\{\lambda_i\} \circ D_{t-1}^2 \quad (2.90)$$

$$Q_t = S \circ (u' - A - B) + A \circ \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}' + B \circ Q_{t-1} \quad (2.91)$$

$$R_t = \text{diag}\{Q_t\}^{-1} Q_t \text{diag}\{Q_t\}^{-1} \quad (2.92)$$

Eşitliklerde yer alan “ $D_t$ ”, baş köşegendeki koşullu standart sapmaları içeren diagonal bir matrisi; “ $R_t$ ” ise, koşullu korelasyon matrisini temsil etmektedir. Öyle ki “ $R_t$ ”yi zaman içinde sabit bırakmak, CCC-GARCH modeline geri dönülmesi anlamına gelmektedir. Yine “ $S$ ”, standardize

edilmiş kalıntılar vektörünün koşulsuz korelasyon matrisini; “ $\iota$ ”, 1’lerden meydana gelen bir vektörü; “ $Q_t$ ”, “ $N \times N$ ” boyutlu, simetrik ve pozitif tanımlı varyans-kovaryans matrisini; “ $\circ$ ” terimi ise Hadamard matris çarpma prosedürünü ifade etmektedir (Brooks, 2019, s. 554-555). Modele göre, her bir varlığın tek değişkenli bir GARCH sürecini takip ettiği varsayılmaktadır. Modelin tahmininde kullanılan log olabilirlik fonksiyonu ise, Formül 2.93’de gösterilmiştir (Engle, 2002, s. 342):

$$L = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (n \log(2\pi) + 2 \log |D_t| + r_t' D_t^{-1} D_t^{-1} r_t - \varepsilon_t' \varepsilon_t + \log |R_t| + \varepsilon_t' R_t^{-1} \varepsilon_t) \quad (2.93)$$

Tse & Tsui (2002)’nin modeli, Engle (2002) tarafından önerilen modele göre biraz farklılık sergilemektedir. Nitekim Formül 2.91’de kullanılan “A” ve “B” parametreleri, tek skaler şekilde belirtmek suretiyle basitleştirilebilir. Böylece tüm koşullu korelasyonlar, aynı süreci takip edecektir. Bunun yanında Engle (2002), sistemdeki her bir değişkenin öncelikle tek değişkenli bir GARCH süreci şeklinde ayrı ayrı modellendiği iki aşamalı bir tahmin prosedürünü savunmuştur. Bu durumda ortak bir log olabilirlik fonksiyonu oluşturulabilir. Basitçe bireysel GARCH modelleri için tüm log olabilirliklerin toplamı alınabilir. İkinci aşamada ise, korelasyon matrisindeki bilinmeyen parametrelere göre koşullu olabilirlik maksimize edilecektir. Bu kapsamda ikinci aşamanın tahmini için kullanılan log olabilirlik fonksiyonu, Formül 2.94’de sunulmuştur (Brooks, 2019, s. 555-556):

$$\ell(\theta_2 | \theta_1) = \sum_{t=1}^T (\ln |R_t| + \varepsilon_t' R_t^{-1} \varepsilon_t) \quad (2.94)$$

Formül 2.94’de yer alan “ $\theta_1$ ”, ilk aşamada tahmin edilen tüm bilinmeyen parametreleri; “ $\theta_2$ ” ise, ikinci aşamada tahmin edilen tüm parametreleri temsil etmektedir. Bu iki aşamalı prosedürün uygulandığı tahmin tutarlı olmaktadır. Buna karşın ilk aşamadaki herhangi bir parametre belirsizliğinin ikinci aşamaya taşınması, yapılan tahminin tutarlı ancak verimsiz olmasına yol açmaktadır (Brooks, 2019, s. 556). Yukarıdaki açıklamalara ilave olarak, iki değişkenli bir DCC-GARCH(1,1) modelinin genel yapısını aşağıdaki formda ifade etmek de mümkündür (Hepsağ ve Yaşar Akçalı, 2016, s. 58):

$$r_t = \alpha + \sum_{i=1}^k \beta r_{t-i} + y_t \quad (2.95)$$

$$\rho_t = \text{cov}(\varepsilon_{A,t}, \varepsilon_{B,t}) = (1 - \theta_1 - \theta_2)\rho + \theta_1\rho_{t-1} + \theta_2\rho_{t-2} \quad (2.96)$$

$$\begin{bmatrix} h_{A,t} \\ h_{B,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{A,t-1}^2 \\ y_{B,t-1}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{A,t-1} \\ h_{B,t-1} \end{bmatrix}$$

Burada  $y_{A,t} = \sqrt{h_{A,t}}\varepsilon_{A,t}$  ve  $y_{B,t} = \sqrt{h_{B,t}}\varepsilon_{B,t}$  olmak üzere; Formül 2.95, k'inci mertebeden vektör otoregresif süreci takip eden ortalama modelini;  $r_t = (r_{A,t}, r_{B,t})'$  ve  $y_t = (y_{A,t}, y_{B,t})'$ , iki değişkenli bir yapıyı; “ $\rho_t$ ”, zamana bağlı olarak değişen korelasyon katsayısını; “ $\rho$ ”, “ $N \times N$ ” boyutlu ve köşegen elemanları “1” olan pozitif tanımlı bir matrisi; “ $h_{A,t}$ ”, “A” getiri serisinin volatilitesi; “ $h_{B,t}$ ” ise, “B” getiri serisinin volatilitesi göstermektedir. Yine “ $0 \leq \theta_1, \theta_2 < 1$ ” ve “ $\theta_1 + \theta_2 \leq 1$ ” kısıtları, “ $\rho$ ” koşullu korelasyon matrisinin pozitif tanımlı olmasını sağlamaktadır. Bu notasyona göre “ $\phi_{11}$ ” ve “ $\delta_{11}$ ” parametreleri, “A” finansal varlığının volatilitesindeki kalıcılığı; “ $\phi_{22}$ ” ve “ $\delta_{22}$ ” parametreleri ise, “B” finansal varlığının volatilitesindeki kalıcılığı ölçmektedir. “ $\phi_{11}$ ”, “ $\delta_{11}$ ” ve “ $\phi_{22}$ ”, “ $\delta_{22}$ ” parametrelerinin istatistiki açıdan anlamlı olarak 1'e yakın hesaplanmaları, sırasıyla “A” ve “B” finansal varlıklarının volatilitelerinde kümelenmelerin varlığına işaret etmektedir. Ayrıca, “ $\phi_{21}$ ” ve “ $\delta_{21}$ ”, “A” finansal varlığının volatilitesinde “B” finansal varlığının volatilitesine doğru aktarımı; “ $\phi_{12}$ ” ve “ $\delta_{12}$ ” ise, “B” finansal varlığının volatilitesinde “A” finansal varlığının volatilitesine doğru aktarımı yakalamaktadır. Bu parametrelerden en az birinin istatistiki açıdan anlamlı bulunması, “A” ve “B” finansal varlıklarına ait volatiliteler arasında en az tek yönlü bir aktarımın olduğu anlamı taşımaktadır. Son olarak, bir DCC-GARCH modelinde, finansal varlıkların getirileri arasında zamana bağlı olarak değişen bir korelasyon ilişkisi de ölçülebilmekte; tahmin aşamasındaki iterasyonlar (yinelemeler), Berndt-Hall-Hall-Hausman (BHHH) ve Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) algoritmaları ile yapılabilmektedir (Hepsağ ve Yaşar Akçalı, 2016, s. 58).

#### 2.2.2.6. Çok Değişkenli VAR-EGARCH

Daha önce belirtildiği üzere, standart ARCH ve GARCH modellerinde, hata terimlerinin kareleri kullanıldığı için yukarı ve aşağı yönlü şokların koşullu varyans üzerindeki etkisi simetrik kabul edilmektedir. Yani

meydana gelen şokların büyüklüğü hesaba katılmakta fakat işaretleri ihmal edilmektedir. Oysa ilk olarak Black (1976a) tarafından öne sürülen kaldıraç etkisine göre, olumsuz şoklar, aynı büyüklükteki olumlu şoklara göre daha fazla volatiliteye neden olabilmektedir. Bu asimetrik etki, Nelson (1991) tarafından geliştirilen tek değişkenli EGARCH modelinde dikkate alınmaktadır. Dolayısıyla bir EGARCH modelinde, getiri serisinin koşullu varyansının logaritması, kendi gecikmeli değerlerinin ve standardize edilmiş hataların asimetrik bir fonksiyonu olarak modellenmektedir.

Nelson (1991)'un tasarlamış olduğu tek değişkenli EGARCH modeli, Koutmos & Booth (1995) tarafından çok değişkenli bir yapıya genişletilmiştir. Daha sonra ise, bu yaklaşımın farklı bir versiyonu olan Çok Değişkenli VAR-EGARCH Modeli, Koutmos (1996) tarafından tanıtılmıştır (Çelik vd., 2018a, s. 222).

Çok değişkenli EGARCH yaklaşımı, tek değişkenli yaklaşıma kıyasla birtakım avantajlar barındırmaktadır. Öyle ki iki aşamalı işlem prosedürünü ortadan kaldırarak tahmini regresyona ilişkin sorunlardan kaçınılmasına olanak sunmakta ve piyasalar arasındaki yayılmaları tespit etmek amacıyla kullanılan testlerin etkinliğini ve gücünü arttırmaktadır. Ayrıca yayılmaların, küresel haberlerin herhangi bir piyasa üzerindeki etkisinin tezahürleri şeklinde gerçekleştiği düşüncesi ile metodolojik olarak tutarlılık sergilemektedir. Yine çok değişkenli yaklaşım, volatilite aktarım mekanizmasındaki asimetri olasılığının test edilmesi noktasında da oldukça ideal görünmektedir. Çünkü belirli bir piyasadaki şoklar ile çapraz piyasa şoklarının, koşullu volatilite üzerinde asimetrik bir etki oluşturmaya imkân tanımaktadır. Diğer bir ifadeyle, belirli bir piyasada ortaya çıkan haberlerin, işlem yapılacak bir sonraki piyasa tarafından hem büyüklük hem de işaret yönüyle dikkate alınmasını sağlamaktadır (Koutmos & Booth, 1995, s. 749). Buradan hareketle bir Çok Değişkenli VAR-EGARCH Modeli'ne ait ortalama denklemi aşağıda gösterilmiştir (Koutmos, 1996, s. 977):

$$R_{i,t} = \beta_{i,0} + \sum_{j=1}^n \beta_{i,j} R_{j,t-1} + \varepsilon_{i,t} \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (2.97)$$

Formül 2.97'ye göre, “n” sayıdaki piyasanın getirileri, bir vektör otoregresyon (VAR) şeklinde tanımlanmaktadır. Dolayısıyla her bir piyasanın koşullu ortalaması, kendi geçmiş getirilerinin ve çapraz piyasaya ait geçmiş getirilerin bir fonksiyonu olarak modellenmektedir. Bununla birlikte eşitlikte yer alan “ $R_{i,t}$ ”, “i” piyasanının “t” zamanındaki yüzde getirisini; “ $i \neq j$ ” olmak üzere “ $\beta_{i,j}$ ” ise, piyasalar arasındaki öncül/ardıl

ilişkileri belirtmektedir. İstatistiki açıdan anlamlı olan “ $\beta_{i,j}$ ” katsayısı, “i” piyasasının “j” piyasasına öncülük ettiğini ifade etmektedir. Bu durum, “j” piyasasına ait mevcut getiriler kullanılarak, “i” piyasasının gelecekteki getirilerinin tahmin edilebileceği anlamına gelmektedir. Çok Değişkenli VAR-EGARCH Modeli’ne ait koşullu varyans denklemi ise, Formül 2.98’de sunulmuştur (Koutmos, 1996, s. 977):

$$\sigma_{i,t}^2 = \exp \left\{ \alpha_{i,0} + \sum_{j=1}^n \alpha_{i,j} f_j(z_{j,t-1}) + \gamma_i \ln(\sigma_{i,t-1}^2) \right\} \quad i, j \quad (2.98)$$

Formül 2.98’de, her bir piyasaya ait getirilerin koşullu varyansı, hem kendi geçmiş dönem hem de piyasalar arası standardize edilmiş şokların üssel bir fonksiyonu şeklinde modellenmektedir. Burada “ $i \neq j$ ” olarak varsayıldığından, “ $\alpha_{i,j}$ ”, “i” ve “j” piyasaları arasındaki volatilitite etkileşimini göstermekte; “ $\gamma_i$ ” ise, koşullu volatilitenin kalıcılığı hakkında bilgi sağlamaktadır. Buna göre “ $\gamma_i < 0$ ” iken koşulsuz varyans sonlu bir yapı sergilemekte, “ $\gamma_i = 1$ ” olduğunda ise koşulsuz varyans söz konusu olmamaktadır. Böylece koşullu varyans, birinci dereceden bütünleşik bir süreci takip etmektedir (Polat ve Kılıç, 2022, s. 543). Öte yandan “ $f_j(z_{j,t-1})$ ”in özel fonksiyonel formu Formül 2.99’da belirtilmiştir (Koutmos, 1996, s. 977):

$$f_j(z_{j,t-1}) = [|z_{j,t-1}| - E(|z_{j,t-1}|)] + \delta_j z_{j,t-1} \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (2.99)$$

“ $f(\cdot)$ ”, geçmiş dönem standardize edilmiş şokların asimetric bir fonksiyonunu simgelemektedir. Matematiksel olarak “ $f(\cdot)$ ”nin eğimi, “ $z_{j,t-1} < 0$ ” iken “ $-1 + \delta_j$ ” değerine, “ $z_{j,t-1} > 0$ ” olduğunda ise “ $1 + \delta_j$ ” değerine eşit olmaktadır. Bu kapsamda her bir piyasanın koşullu varyansı, piyasaya ve çapraz piyasaya ait standardize edilmiş şoklar tarafından asimetric bir şekilde etkilenmektedir. Denklemden geçen “ $|z_{j,t-1}| - E(|z_{j,t-1}|)$ ” terimi, büyüklük etkisini ölçmektedir. Pozitif bir “ $\alpha_{i,j}$ ” varsayımı altında, “ $z_{j,t-1}$ ”nin büyüklüğü, beklenen değeri “ $E|z_{j,t-1}|$ ”den büyük (küçük) ise, “ $z_{j,t-1}$ ”in koşullu varyans ( $\sigma_{i,t}^2$ ) üzerindeki etkisi pozitif (negatif) olmaktadır. Kısmi fonksiyonel biçimde ifade edilen “ $\delta_j z_{j,t-1}$ ” terimi ise, işaret etkisini ölçmektedir. Katsayının ve şokun işaretine bağlı olarak işaret etkisi güçlenebilmekte veyahut büyüklük etkisini kısmen dengeleyebilmektedir. Örneğin “ $\delta_j < 0$ ” iken, “j” piyasasındaki düşüşleri ( $z_{j,t-1} < 0$ ), yükselişlere ( $z_{j,t-1} > 0$ ) kıyasla daha yüksek bir volatilitenin takip etmesi beklenmektedir. Bu fenomen, piyasa düşüşlerinin daha yüksek bir volatilitite ürettiği kaldıraç etkisi ile tutarlı görünmektedir (Koutmos,

1996, s. 977-978). İstatistiki açıdan anlamlı ve pozitif hesaplanan “ $\alpha_{i,j}$ ” ile birlikte değerlendirildiğinde negatif “ $\delta_j$ ”, “ $j$ ” piyasasında yaşanan negatif şokların, pozitif şoklara nazaran “ $i$ ” piyasasının koşullu varyansını daha fazla etkilediğini ifade etmektedir. Bu durum ise, söz konusu piyasalar arasındaki volatilité etkileşim mekanizmasının asimetric bir yapıda olduğunu izhar etmektedir (Bayramoğlu ve Abasız, 2017, s. 189). Bunun yanı sıra Koutmos (1996)’a göre, piyasalara ait getiriler arasındaki eşzamanlı ilişki, Formül 2.100’de sunulan koşullu kovaryans eşitliği tarafından yakalanmaktadır:

$$\sigma_{i,j,t} = \rho_{i,j}\sigma_{i,t}\sigma_{j,t} \quad i, j = 1,2,3, \dots, n \quad i \neq j \quad (2.100)$$

Burada “ $i$ ” ve “ $j$ ” piyasalarının getirileri arasındaki korelasyonun sabit olduğu yani kovaryansın standart sapmaların çarpımıyla orantılı olduğu ima edilmektedir. Bu yaklaşım, modelin tahminini büyük ölçüde basitleştirmektedir. Çok Değişkenli VAR-EGARCH Modeli için log olabilirlik fonksiyonu ise, normallik varsayımı altında aşığıdaki gibi formülüze edilmiştir (Koutmos, 1996, s. 978):

$$L(\theta) = -0.5(NT)\ln(2\pi) - 0.5 \sum_{t=1}^T (\ln|S_t| + \varepsilon_t' S_t^{-1} \varepsilon_t) \quad (2.101)$$

Formül 2.101’de kullanılan “ $N$ ”, her bir değişken için denklem sayısını; “ $T$ ”, gözlem sayısını; “ $\theta$ ”, tahmin edilecek parametre vektörünü; “ $\varepsilon_t' = [\varepsilon_{1,t}\varepsilon_{2,t} \dots \varepsilon_{i,t}]$ ”, “ $t$ ” zamanındaki şokların “ $1 \times i$ ” vektörünü; “ $S_t$ ” ise, “ $i, j = 1,2, \dots, n$ ” ve “ $i \neq j$ ” için çapraz köşegen elamanlarını veren “ $i \times i$ ” boyutlu ve zamana bağlı olarak değişen koşullu varyans-kovaryans matrisini temsil etmektedir (Sayın vd., 2020, s. 452-453).

### 2.3. ZİMNİ VOLATİLİTE TAHMİN MODELLERİ

Finans teorisinde, bir piyasa fiyatının bir modele uydurulması suretiyle modelde yer alan parametrelere ait gelecekteki değerlerin, geriye dönük bir tümevarımla elde edilen güncel tahminlerine, zimni değerler olarak atıfta bulunmaktadır. Bu kapsamda zimni değerler, hâlihazırda gözlemlenen piyasa fiyatlarına dayanan tahminleri ifade etmektedir. Zimni volatilité ise, piyasanın gelecekteki volatilitésinin beklenen değeri şeklinde tanımlanabilmektedir (Derman & Miller, 2016, s. 50).

Daha önce belirtildiği gibi zimni volatilité, herhangi bir opsiyon sözleşmesinin nakit fiyatını tespit edebilmek amacıyla, diğer birçok parametreyle beraber opsiyon fiyatlandırma modellerinde kullanılmaktadır. Çünkü finansal opsiyonlara yönelik fiyatlandırma modelleri, girdi olarak bir

volatilité tahmini gerektirmektedir. Bununla birlikte piyasada işlem gören bir opsiyon sözleşmesinin mevcut fiyatı üzerinden model geriye doğru çalıştırıldığında, opsiyonun kalan ömrü boyunca bir volatilité tahminine ulaşmak mümkündür. Bu durum, opsiyon fiyatlandırma modellerinde, bilinmeyen tek parametrenin volatilité tahmini olmasından kaynaklanmaktadır.

Bir opsiyonun zımni volatilitesi, bu opsiyonun işlem gördüğü güncel piyasa fiyatından türetilmektedir. Geriye dönük yapılan hesaplamalar sonucunda elde edilen zımni volatilité, dayanak sözleşmenin gelecekteki volatilitésinin ne olacağı hakkında piyasadaki fikir birliğini yansıtmaktadır. Uygulamada opsiyon fiyatları ve diğer piyasa koşulları sürekli değiştiğinden, zımni volatilité de sürekli değişmektedir. Bu değişim, piyasa yatırımcıları tarafından yapılan bir oylamadan ziyade opsiyonun kullanım fiyatları için yapılan teklifleri, dolayısıyla da arz ve talep arasındaki dengeyi temsil etmektedir (Natenberg, 2014, s. 88-90). Şu hâlde zımni volatilité, farklı kullanım fiyatlarına ve vadelere göre farklılık sergilemektedir. Yani belirli bir vade için farklı kullanım fiyatlarına, belirli bir kullanım fiyatı için de farklı vadelere göre değişmektedir (Zhou vd., 2013, s. 2).

Belirli bir vadede, farklı kullanım fiyatları altında ve opsiyon piyasasının türüne göre zımni volatilitenin düzeyi farklılık göstermektedir. Fakat standart Black-Scholes teorisinde, volatilité eğrisinin tamamen düz bir yapıda olduğu kabul edilmektedir. Bu nedenle standart model, hisse senedi dağılımının leptokurtik karakterini ve volatilité gülümsemesini yakalayamamakta; dayanak varlıkta gözlemlenen volatilité davranışı, bu aykırı varsayım ile çelişmektedir.

Lognormal olasılık dağılımı ve sabit bir volatilité varsayımı gibi sınırlamalara rağmen Black-Scholes modeli, opsiyon fiyatlarını yorumlamada bir ölçüt haline gelmiştir (Bossu, 2014, s. 15). Volatilité gülümsemesinin varlığında dahi, Black-Scholes zımni volatilitenin yaygın bir şekilde kullanılması, modelin ikna edici gücünü ve uygulamadaki başarısını ortaya koymuştur (Derman & Miller, 2016, s. 133). Kaldı ki uygulayıcılar tarafından, genellikle Black-Scholes modeli ve uygun bir volatilité enterpolasyon ya da ekstrapolasyon şeması kullanılmak suretiyle tezgah üstü vanilya opsiyonları fiyatlandırılmaktadır (Bossu, 2014, s. 17). İlave olarak, VIX volatilité endeksinin 2003 yılına kadar yapılan hesaplamalarında, 8 farklı S&P 100 opsiyon sözleşmesinin Black-Scholes zımni volatilitelerinden faydalanılmıştır. Bilindiği üzere Whaley (1993) tarafından Şikago Opsiyon Borsasında işlem gören S&P 100 opsiyonlarının küçük bir alt kümesi kullanılarak VIX volatilité endeksinin orijinal formülü türetilmiştir (Lehman & McMillan, 2011, s. 172). Aynı yıl



Şikago Opsiyon Borsası tarafından Whaley (1993)'in çalışmasına dayanan VIX volatilite endeksi piyasaya sürülmüştür (Siriopoulos & Fassas, 2012, s. 78). 2003 yılında metodolojisi değiştirilen bu endeks, günümüzde korku endeksi olarak da bilinmektedir. VIX volatilite endeksi, gelecek 30 gün boyunca pay piyasasında gerçekleşmesi beklenen volatiliteye ilişkin piyasa görüşünü yakalayacak şekilde tasarlanmıştır. Çalışmanın volatilite endeksleri ile ilgili kısmında, VIX volatilite endeksi ayrıntılı olarak açıklanmıştır.

Sonuç itibariyle zımni volatilite tahmin modelleri, girdi olarak bir volatilite tahmini gerektiren opsiyon fiyatlandırma modellerinde, tersine mühendislik şeklinde volatilite tahminine ulaşılmasını ifade etmektedir. Dolayısıyla zımni volatilite, sadece teorik fiyatlandırma modelinin girdilerinden değil, aynı zamanda kullanılan teorik fiyatlandırma modelinden de etkilenmektedir. Öyle ki bazı opsiyonlara yönelik farklı modeller uygulandığında, önemli ölçüde farklı zımni volatilitelere ulaşılabilmektedir. Ayrıca, modelde yer alan girdilerin eşzamanlı olmaması durumunda da, birtakım sorunlar ortaya çıkabilmektedir. Örneğin, bir opsiyon sözleşmesinin belirli bir süreyle işlem görmemesi, piyasa koşullarının değişmesi ve buna bağlı olarak güncel olmayan bir opsiyon fiyatının modele dâhil edilmesi, yanıltıcı veya yanlış bir zımni volatilite düzeyinin hesaplanmasına neden olabilmektedir (Natenberg, 2014, s. 89). Buna karşın opsiyon piyasası etkin ve fiyatlandırma modeli doğru ise, zımni volatilite modelleri tarafından dayanak varlığın gelecekteki volatilitelerinin doğru bir şekilde yakalanması beklenmektedir. Son olarak, farklı finansal piyasalardaki zımni volatiliteleri endeks şeklinde gösteren ve volatilite türlerinin alınıp satılmasına olanak sağlayan çok sayıda zımni volatilite endeksi geliştirilmiştir. Özellikle son yıllarda, VIX volatilite endeksinden ilham alınarak çeşitli dayanak varlıklar üzerine oluşturulan zımni volatilite endekslerinin sayısı giderek artmaktadır.

#### **2.4. STOKASTİK VOLATİLİTE TAHMİN MODELLERİ**

Varlıklara ait getiri serileri, farklı uzunluk ve yoğunlukta sakin ya da çalkantılı dönemler sergileme eğiliminde olduklarından, bu serilerdeki yeniliklerin boyutu rastgele dalgalanmalar gösterebilmektedir. Önceden bilinen veya deterministik bir yolla elde edilen modellerden farklı olarak, koşullu getiri varyansının rastlantısal evrimi, stokastik volatilite olarak isimlendirilmektedir. Stokastik volatilite modelleri; volatilitenin kendi rassal sürecini takip ettiğini, doğası gereği gözlemlenemeyen bağımsız şoklara maruz kaldığını ve gözlemlenebilir bilgilerle ölçülemediğini ileri sürmektedir (Andersen & Benzoni, 2009, s. 2). Bundan dolayı stokastik

volatilite modellerinde; rassal, sabit olmayan ve koşullu bir volatilite varsayılmaktadır (Kömm, 2016, s. 12).

Stokastik volatilite, gizli volatilite olarak da adlandırılmaktadır. Buna göre bilinmeyen volatilite, zaman içinde stokastik şekilde değişmektedir (Yalçın, 2007, s. 359-360). Bu doğrultuda oluşturulan modelde, volatilite için tamamen farklı bir stokastik süreç uygulanmaktadır (Javaheri, 2015, s. 21). Varlığın volatilitelerini fiyat değişimlerinden bağımsız olan stokastik bir faktörle ilişkilendirmek amacıyla, tek faktörlü modellere ikinci bir stokastik faktör eklenmektedir. İkinci faktörün modele tanıtılmasında, iki genel yaklaşım söz konusudur. Birinci yaklaşımda, zımnî volatilite çarpıklığı olmayan Black-Scholes-Merton modelinde, varlık volatilitelerinin bağımsız olarak stokastik hale gelmesine izin verilmektedir. Volatilite gülümsemesinin ortaya çıkmasından sorumlu olan ikinci stokastik faktör, oynaklığın oynaklığını ifade etmektedir. İkinci yaklaşımda ise, volatilite gülümsemesinin zaten mevcut olduğu yerel volatilite modelinde, gülümsemenin volatilitelerinden sorumlu olan ikinci bir stokastik faktör aracılığıyla, yerel volatilitenin kendisinin stokastik hale gelmesine izin verilmektedir (Derman & Miller, 2016, s. 320).

GARCH tipi modellerin bir çeşit stokastik volatilite modeli olduğu düşüncesi, yaygın olarak bilinen bir yanıştır. Bilindiği üzere GARCH tipi modellerin ortalama denkleminde hata terimi mevcut iken, varyans denkleminde hata terimi bulunmamaktadır. Çünkü bu modeller, bir önceki döneme ait mevcut tüm bilgileri dikkate almak suretiyle gözlemlenebilir volatilite ölçüsünü deterministik olarak belirlemektedir. Oysa stokastik volatilite modelleri, koşullu varyans denkleminde giren ikinci bir hata terimini içermektedir. Yani bu modellerde, hem ortalama hem de koşullu varyans denkleminde hata terimi yer almaktadır (Brooks, 2019, s. 542). Bu durum ise, koşullu getiri varyansının, gözlemlenemeyen bir değişken olarak rassal hata terimine sahip olduğu anlamına gelmektedir.

Volatilite literatürüne ilave yenilikçi bir faktörle katkı sağlayan stokastik volatilite modelleri, kavramsal açıdan ARCH/GARCH tipi spesifikasyonlara göre daha esnek bir yapıdadır. Bunun yanında standart normale daha yakın kalıntılara sahiptir ve getiriler için kalın kuyruklu dağılımlara yol açmaktadır (Poon, 2005, s. 59). Genellikle farklı formülasyonlar ile ilişkilendirilen stokastik volatilite teriminin tespitinde ise, aşağıdaki denklemler kullanılabilir (Brooks, 2019, s. 542):

$$\gamma_t = \mu + \mu_t \sigma_t \quad \mu_t \sim N(0,1) \quad (2.102)$$

$$\ln(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \beta_1 \ln(\sigma_{t-1}^2) + \sigma_\eta \eta_t \quad (2.103)$$

Burada “ $\eta_t$ ”,  $N(0,1)$  ile normal dağılım sergilemekte olup; koşullu ortalama denkleminde yer alan  $\mu_t$ 'den bağımsız rassal bir değişkeni (hatayı) ifade etmektedir.

Stokastik volatilite modelleri, teorik açıdan GARCH tipi modellerden üstün olmalarına rağmen uygulamada çok fazla tercih edilmemektedir (Yalçın, 2007, s. 360). Stokastik volatiliteye ilişkin tahmin modelleri incelendiğinde, pratik ya da uygulamaya yönelik bir araç olmaktan ziyade teorik birer model niteliği taşıdıkları görülmektedir. Bu modeller, her ne kadar volatilite gürültüsü tarafından çok daha esnek bir yapıya kavuşsa da, kapalı bir forma sahip olmadıklarından, maksimum olabilirlik fonksiyonu ile tahmin edilememektedir (Poon, 2005, s. 59-60). Sonuç olarak, matematiksel opsiyon fiyatlandırma literatüründe yaygın olarak araştırılan stokastik volatilite modelleri, model parametrelerinin tahmin edilmesinde yaşanan karmaşıklıklarından dolayı ayrık zamanlı finansal uygulamalarda popüler hale gelememiştir (Brooks, 2019, s. 543).

## **2.5. VOLATİLİTE TAHMİN MODELLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI**

Genel anlamda gerçekleşen, zimni veya model oynaklığına ilişkin araştırma sonuçları incelendiğinde, büyük bir tutarsızlığın varlığı göze çarpmaktadır (Auinger, 2015, s. 30). Bununla birlikte Poon & Granger (2003) tarafından, volatilite tahmin modellerinden hangisinin daha iyi bir volatilite tahmini sağladığı araştırılmıştır. Bu amaçla 4 kategori üzerinden 66 çalışmaya ait sonuçlar ikili şekilde karşılaştırılmıştır. Söz konusu 66 çalışmadan bir kısmında sadece iki farklı volatilite tahmin modeli kıyaslanırken, diğer kısmında ise ikiden fazla yöntem için karşılaştırmaya gidilmiştir. Tablo 2.1'de, bu 4 kategoriye ilişkin kıyaslama sonuçları gösterilmiştir:

Tablo 2. 1: Volatilite Tahmin Yöntemlerinin İkili Karşılaştırması

Volatilite Tahmin Yöntemi	Araştırma Sayısı	Araştırma Yüzdesi
HISVOL > GARCH	22	%56
GARCH > HISVOL	17	%44
HISVOL > ISD	8	%24
ISD > HISVOL	26	%76
GARCH > ISD	1	%06
ISD > GARCH	17	%94
SV > HISVOL	3	
SV > GARCH	3	
GARCH > SV	1	
ISD > SV	1	

**Kaynak:** (Poon & Granger, 2003, s. 506)

Tablo 2.1’de sunulan “HISVOL”, zaman serisi tahmin modelleri başlığı altında anlatılan ve gerçekleşen volatilitiyi dikkate alan volatilite tahmin modellerini temsil etmektedir. “GARCH”; ARCH, GARCH, EGARCH, GJR-GARCH gibi otoregresif koşullu değişen varyans tahmin modellerinden meydana gelmektedir. “ISD”, Black-Scholes vb. opsiyon fiyatlandırma modellerinde yer alan zımni volatilitiyi ifade etmektedir. “SV” ise, stokastik volatilitiyi kullanan tahmin modellerini belirtmektedir.

Tablo 2.1’e bakıldığında, “HISVOL” ve “GARCH” tahmin modellerini analiz eden araştırmaların %56’sında, “HISVOL” tahmin modellerinin GARCH sınıfı tahmin modellerinden daha iyi volatilitiyi tahmini sağladığı tespit edilmiştir. Bu araştırmaların %44’ünde ise, tam tersi geçerlidir. Ulaşılan bu sonuç, tarihsel volatilitenin GARCH tipi modellerde kullanılması halinde, bu modellerin daha yüksek tahmin kabiliyetine kavuşacağı düşüncesini desteklemiştir. Öte yandan zımni volatilitiyi kullanan tahmin modellerinin, “HISVOL” ve “GARCH” tahmin modellerine göre daha iyi performans gösterdiği anlaşılmıştır. Tarihsel volatilitenin içerdiği tüm bilgilerin zımni volatilitiyi tarafından yansıtıldığı görüşü dikkate alındığında, bu sonuç şaşırtıcı gelmemektedir. Kaldı ki opsiyon yatırımcıları, çoğunlukla kurumsal yatırımcılardan meydana gelmekte olup; bireysel yatırımcılara göre daha büyük bir bilgi setine

sahiptir. Sonuç itibarıyla zımni volatilite en iyi tahmin yöntemi olarak ön plana çıkmıştır.

Tablo 2.1’de bulguları aktarılan çalışmaların, sadece belirli bir volatilite tahmin yönteminin yararlı olduğu görüşünü desteklemek üzere yapıldığı düşüncesi, yapılan karşılaştırmaların bariz zayıflıklarından biri olarak karşımıza çıkmaktadır. Nitekim çalışmalardan herhangi birinde beklenen sonuca ulaşılmıyorsa, bahse konu çalışma yayınlanmamış olabilirdi. Dolayısıyla çeşitli nedenleri öncelikle ya da belirli bir bakış açısını desteklemek amacıyla rapor edilen makalelerde; farklı veri setleri, varlık grupları, zaman aralıkları ve değerlendirme teknikleri gibi spesifik analiz unsurlarının kullanıldığı unutulmamalıdır (Poon & Granger, 2003, s. 507).

Poon & Granger (2003) tarafından yapılan araştırmaya ait sonuçların yanı sıra opsiyon fiyatlandırma formülleri, optimal portföy seçimi, politika yapıcıların kararları, düzenleyici çerçevelerin geliştirilmesi ve riske maruz değer modellemesi gibi konular ile yakından ilişkili olan volatilite tahminlerinin, mevcut ticaret ortamı bağlamında yapılmasında fayda bulunmaktadır. Çünkü günümüz finansal piyasalarının karmaşık ve çapraşık bir yapıda oldukları oldukça iyi bilinmektedir. Bu kapsamda avantajları ve dezavantajları bulunan çok sayıda volatilite tahmin modeli geliştirilmiştir. Fakat getiri serisinin tüm yönlerini eksiksiz olarak karşılayan bir model henüz tasarlanamamıştır.

Daha önce ifade edildiği gibi volatiliteyi ölçmek bir sanattır ve çeşitli istatistiksel tahminciler arasından bir seçim yapılmasını gerektirmektedir. Kesin bir cevap bulmak yerine bir dizi farklı tahmin ediciye bakmak, onların güçlü ve zayıf yönlerini hesaba katmak ve her birinin en iyi nerede uygulanacağını bilmek daha doğru bir yaklaşımı betimlemektedir (Sinclair, 2013, s. 14).

Geçmiş getiri ya da standart sapmanın baz alındığı ve bu doğrultuda istatistiksel yöntemlerin kullanıldığı zaman serisi tahmin modelleri; uygulama kolaylığı sunmakta, şeffaf bir yapı sergilemekte ve kimi zaman karmaşık modellere göre daha iyi sonuçlar verebilmektedir. Ancak, EWMA yöntemi de dâhil olmak üzere bu modeller, volatilite kalıcılığını volatilite şoklarından ayıramamaktadır. Ayrıca, çoğu zaman daha büyük değerlere sahip volatilite tahminleri yapma eğilimindedir (Poon & Granger, 2003, s. 494). Yine doğrusal bir yapıda olan ARMA/ARIMA modellerinde, hata terimi için sabit bir varyans varsayıldığından, volatilitede meydana gelen değişimler bu modeller tarafından açıklanamamaktadır (Xiao & Aydemir, 2007, s. 3). Oysa hisse senedi fiyatı, döviz kuru ve enflasyon oranı gibi finansal zaman serilerinde, hata terimi varyansının zaman içinde değiştiği gözlemlenmiştir. Son olarak, finansal zaman serilerini

karakterize eden volatilité kümelenmesi de, zaman serisi tahmin modelleri tarafından yakalanamamaktadır.

Otoregresif koşullu değişen varyans tahmin modellerinde, koşullu varyansın zamana bağlı olarak değişmesine izin verildiğinden, değişen varyans ve volatilité kümelenmesi gibi temel özellikler dikkate alınmaktadır. Bunun yanında volatilité asimetrisi, volatilitenin kalıcılığı (uzun dönem hafıza etkisi), volatilitenin ortak hareket özelliği ve yayılma etkisi gibi diğer kalıpların da modellendiği çok sayıda tek ya da çok değişkenli otoregresif koşullu değişen varyans modeli geliştirilmiştir. Özellikle çok değişkenli koşullu değişen varyans modelleri aracılığıyla birden fazla finansal varlığın zamanla değişen koşullu kovaryans yapısı, dolayısıyla da bu varlıklara ait koşullu volatiliteler arasındaki ilişki, etkileşim veya aktarım tahmin edilebilmektedir. Fakat parametreler arasındaki doğrusal olmayan ilişkiler, tutumluluk ve varyans-kovaryans matrisini pozitif tanımlı tutma gerekliliği, bu modellerdeki en büyük zorlukları oluşturmaktadır (Poon, 2005, s. 65). Buna rağmen çok değişkenli modeller, finansal uygulamalarda ve akademik çalışmalarda oldukça geniş bir yer edinmektedir. Örneğin, farklı finansal piyasalarda ya da varlıklarda yaşanan volatiliteler arasındaki olası hareketlerin tespitinde, zamanla değişen varlık fiyatlandırma modellerinde ve portföy tahsisi ya da riskinin daha etkin bir şekilde yönetilmesinde bu modeller kullanılmaktadır (Mills & Markellos, 2008, s. 326).

Zımnî volatilité, piyasanın gelecekteki volatilitésinin beklenen değeri şeklinde tanımlanabilmekte ve opsiyon sözleşmesinin mevcut fiyatı üzerinden model geriye doğru çalıştırıldığında elde edilebilmektedir. Burada opsiyon fiyatları ve diğer piyasa koşulları sürekli değiştiğinden, zımnî volatilité de sürekli değişmektedir. Bu kapsamda belirli bir vadede, farklı kullanım fiyatları altında ve opsiyon piyasasının türüne göre zımnî volatilité farklılık göstermektedir. Öte yandan standart Black-Scholes opsiyon fiyatlandırma modelinin, hisse senedi dağılımının leptokurtik karakterini ve volatilité gülümsemesini yakalayamadığı; dolayısıyla da zımnî volatilité düzeyinin, sadece teorik fiyatlandırma modelinin girdilerinden değil, kullanılan teorik fiyatlandırma modelinden de etkilendiği unutulmamalıdır. Nitekim bazı opsiyonlara yönelik farklı modeller uygulandığında, önemli ölçüde farklı zımnî volatilitelere ulaşılabilir. Modeldeki girdilerin eşzamanlı olmaması durumunda da, birtakım sorunlar ortaya çıkabilmektedir. Örneğin, herhangi bir opsiyon sözleşmesinin belirli bir süreçle işlem görmemesi, piyasa koşullarının değişmesi ve buna bağlı olarak güncel olmayan bir opsiyon fiyatının modele dâhil edilmesi, yanıltıcı/yanlış bir zımnî volatilité düzeyinin hesaplanmasına neden olabilmektedir (Natenberg, 2014, s. 89). Buna karşın opsiyon piyasası etkin ve fiyatlandırma modeli doğru ise, zımnî volatilité modelleri

tarafından dayanak varlığın gelecekteki volatilitésinin doğru tahmin edilmesi beklenmektedir.

Stokastik volatilite tahmin modellerine göre volatilite; kendi rassal sürecini takip etmekte, doğası gereğince gözlemlenemeyen bağımsız şoklara maruz kalmakta ve gözlemlenebilir bilgiler ile ölçülememektedir (Andersen & Benzoni, 2009, s. 2). Yani bilinmeyen volatilite, zaman içinde stokastik bir şekilde değişmektedir (Yalçın, 2007, s. 360). Bu modellerde, varlığın volatilitésini fiyat değişimlerinden bağımsız kılan stokastik bir faktörle ilişkilendirmek amacıyla ortalama denkleminin yanı sıra koşullu varyans denklemine de bir hata terimi eklenmektedir (Brooks, 2019, s. 542). Bundan dolayı süreç, teorik açıdan ARCH/GARCH tipi spesifikasyonlara göre daha esnek bir yapıdadır. İlâveten standart normale daha yakın kalıntılara sahiptir ve getiriler için kalın kuyruklu dağılımlara yol açmaktadır. Ancak, bu avantajlarına rağmen stokastik volatilite tahmin modellerinin, pratik ya da uygulamaya yönelik bir araç olmaktan ziyade teorik birer model niteliği taşıdıkları görülmektedir. Öyle ki kapalı bir forma sahip olmadıklarından, doğrudan maksimum olabilirlik fonksiyonu aracılığıyla tahmin edilememektedir (Poon, 2005, s. 59-60). Model parametrelerinin tahmin edilmesi sürecinde yaşanan karmaşıklıklardan dolayı ise, ayrık zamanlı finansal uygulamalarda popüler hale gelememiştir (Brooks, 2019, s. 543).

Sonuç itibarıyla ekonometrik açıdan her biri kendi avantaj ve dezavantajlarına sahip olan kimi modeller, endeks verileri gibi sermaye piyasası araçlarına ait verilerin volatilitésini tahmin etmede daha başarılı olurken; diğer bazı modeller ise, kur ve faiz volatilitésinin tahmininde bir adım önde görünmektedir. Bu nedenle modellere ilişkin başarı performansları kıyaslanırken, aynı finansal varlık sınıfının dikkate alınması önem kazanmaktadır. Diğer taraftan basit ortalama modellerinden karmaşık yapıdaki GARCH ve stokastik volatilite modellerine doğru gerçekleşen geçiş, finansal getiri serilerini karakterize eden başka özellikleri de modelleme arayışına dayanmaktadır. Tasarlanan her yeni model, volatilitenin tahmin edilmesi noktasında katkı sunmakta; daha karmaşık modeller ise, dışarıda kalan etkileri de hesaba katmayı amaçlamaktadır (Körs, 2021, s. 31).

## ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

### ZİMNİ VOLATİLİTE ENDEKSLERİ

#### 3.1. ZİMNİ VOLATİLİTE ENDEKSLERİNİN ORTAYA ÇIKIŞI

Zımnî volatilité endekslerinin ortaya çıkışı, uzun bir geçmişé dayanmamaktadır. İlk volatilité endekslerinin oluşturulmasında, finans tarihi için bir dönüm noktası olan Black-Scholes-Merton opsiyon fiyatlandırma çerçevesi merkezi bir rol oynamıştır. Bu yaklaşıma dayalı olarak hesaplanan zımnî volatiliteler, hâlâ birtakım zımnî volatilité endekslerinin metodolojisinde kullanılmaktadır. Zımnî volatilité endekslerinin ortaya çıkış serüvenini tarihsel bir perspektiften ele almak amacıyla Black-Scholes opsiyon fiyatlandırma modeli, bu modelin varsayımları, Black-Scholes modelinden türetilen zımnî volatilité ve zımnî volatilité endekslerinin tarihsel gelişimine ilişkin başlıklar sırasıyla aşağıda yer almaktadır:

##### 3.1.1. Black-Scholes Opsiyon Fiyatlandırma Modeli

Bir opsiyon sözleşmesi, iki farklı taraf arasında yapılmaktadır. Bu sözleşmeye göre alıcı; ödeyeceği belirli bir prim karşılığında, belirli bir vadeye kadar (veyahut vadede) ve belirli bir kullanım fiyatı üzerinden, opsiyona dayanak teşkil eden belirli miktar ve nitelikteki mal, kıymet ya da finansal varlığı, satın alma veya satma hakkı kazanmaktadır. Satıcı ise, alıcı tarafın opsiyon sözleşmesinden kaynaklanan hakkını kullanması halinde, sözleşmeye dayanak teşkil eden belirli miktar ve nitelikteki mal, kıymet ya da finansal varlığı, önceden kararlaştırılan kullanım fiyatı üzerinden satın alma veya satma yükümlülüğü taşımaktadır. Bu kapsamda alım opsiyonu (call option), sözleşmeyi satın alan tarafa, belirli bir vadeye kadar (veyahut vadede), belirli miktar ve nitelikteki mal, kıymet ya da finansal varlığı, önceden kararlaştırılan kullanım fiyatı ile satın alma hakkı vermekte iken; satım opsiyonu (put option), sözleşmeyi satın alan tarafa, belirli bir vadeye kadar (veyahut vadede), belirli miktar ve nitelikteki mal, kıymet ya da finansal varlığı, önceden kararlaştırılan kullanım fiyatı ile satma hakkı tanımaktadır. Burada vadelerine göre yapılan sınıflandırma baz alındığında, Amerikan tipi opsiyonlar, belirli bir vadeye kadar herhangi bir tarihte opsiyon alıcısı tarafından kullanılabilir. Avrupa tipi opsiyonlar ise, sadece belirli bir vade sonunda işleme konulabilir. Öte yandan



kullanım fiyatları, spot/cari piyasa fiyatları ile yapılan karşılaştırmalar sonucunda, bir opsiyon sözleşmesinin kârda (in the money - ITM), zararda (out of the money - OTM) veya başabaş (at the money - ATM) olup olmadığını göstermektedir. Bir alım opsiyonu açısından bakıldığında, dayanak varlığın spot piyasa fiyatı kullanım fiyatından yüksekse, opsiyon sözleşmesi kârda; düşükse, zarardadır. Bir satım opsiyonu açısından bakıldığında, dayanak varlığın spot piyasa fiyatı kullanım fiyatından düşükse, opsiyon sözleşmesi kârda; yüksekse, zarardadır. Spot piyasa fiyatı kullanım fiyatına eşit olduğunda ise, opsiyon sözleşmesi başabaştır.

Yukarıda ifade edilen bilgiler ışığında, modern opsiyon fiyatlandırma teorisinin kökenleri, genellikle Fransız matematikçi Louis Bachelier tarafından 1900 yılında yayınlanan “Spekülasyon Teorisi” isimli çalışmaya dayandırılmaktadır. O dönemde organize opsiyon piyasaları mevcut olmadığından, Bachelier’in çalışması, çok düşük düzeyde pratik uygulamayla sonuçlanmıştır. Buna karşın 1973 yılına gelindiğinde, Fischer Black ve Myron Scholes tarafından uygulamaya yönelik ilk teorik opsiyon fiyatlandırma modeli ortaya konulmuştur. Black-Scholes modeli, Robert C. Merton’un katkılarından dolayı Black-Scholes-Merton modeli olarak da anılmaktadır (Natenberg, 2014, s. 61-62).

Black-Scholes modeli, titiz ve genişletilebilir bir matematiksel çerçeve sunarak, türev varlık fiyatlandırma dünyasında büyük bir devrim meydana getirmiştir. Model ile hem zamanın hem de belirsizliğin etkisini ve etkileşimini ölçen yeni bir yaklaşım tarzı önerilmiştir (Augen, 2008, s. 23). Böylece model, türev varlıkları fiyatlandırma ve riskten korunma yöntemleri üzerinde büyük bir etkiye sahip olmuştur. Modelin önemi ise, 1997 yılında Robert Merton ve Myron Scholes’un Nobel ekonomi ödülüne layık görülmesiyle ortaya çıkmıştır. Ne yazık ki Fischer Black 1995 yılında vefat ettiği için bu ödülün sahiplerinden biri olamamıştır (Hull, 2012, s. 299).

Black-Scholes modelinin basitliği, yatırımcıların opsiyon fiyatını anlık olarak tahmin edebilmelerine imkân tanımıştır (Mostafa vd., 2017, s. 37). Bununla birlikte Black-Scholes modeli kullanılarak herhangi bir opsiyonun teorik değerinin hesaplanabilmesi için opsiyona ve dayanak sözleşmeye ait en az 5 özelliğin bilinmesi gerekmektedir. Bu özellikler ise (Natenberg, 2014, s. 63);

- \*Opsiyonun kullanım (işlem) fiyatı,
- \*Vade sonuna kalan süre,
- \*Dayanak sözleşmenin spot/cari fiyatı,
- \*Opsiyonun ömrü boyunca geçerli olan bir faiz oranı,
- \*Dayanak sözleşmenin zimni volatilitesidir.

Bahse konu özellikler ve genel varsayımlar altında, Black & Scholes (1973) ve Merton (1973) tarafından Black-Scholes-Merton diferansiyel denklemi başarılı bir şekilde çözümlenerek, Avrupa tipi alım/satım opsiyonlarının fiyatlandırmasını sağlayacak kesin formüllere ulaşılmıştır (Tsay, 2005, s. 264). Bu kapsamda Black-Scholes-Merton opsiyon fiyatlandırma modeline ait formüller aşağıda sunulmuştur (Hull, 2012, s. 313):

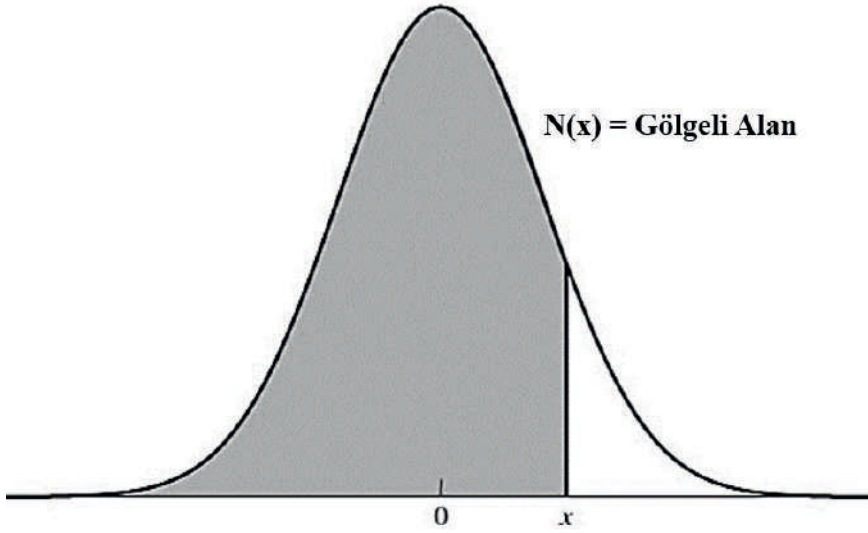
$$c = S_0N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2) \quad (3.1)$$

$$p = Ke^{-rT}N(-d_2) - S_0N(-d_1) \quad (3.2)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (3.3)$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T} \quad (3.4)$$

Denklemlerde yer alan “c”, Avrupa tipi alım opsiyonunun cari fiyatını (primini); “p”, Avrupa tipi satım opsiyonunun cari fiyatını; “S<sub>0</sub>”, sıfır zamanındaki hisse senedi fiyatını; “K”, opsiyon sözleşmesinin kullanım (işlem) fiyatını; “e”, doğal logaritma fonksiyonunun tabanını (Naperian logaritmayı); “r”, sürekli ve bileşik yapıda olan risksiz faiz oranını; “T”, yıl veya yılın bir yüzdesi olarak opsiyon vadesinin bitiş tarihine kadar olan süreyi; “ln”, doğal logaritma fonksiyonunu; “σ”, opsiyona konu hisse senedine ait yıllık getirinin (sürekli ve bileşik olarak) standart sapmasını; “N(x)” fonksiyonu ise, ortalaması “0” (μ = 0) ve standart sapması “1” (σ = 1) olan normal dağılıma göre “x”in sol tarafında kalan gözlemin olasılığını (kümülatif normal dağılım fonksiyonunu) temsil etmektedir (Ceylan ve Korkmaz, 2018, s. 644-645).



Şekil 3. 1:  $N(x)$  Fonksiyonunun Alanını Gösteren Standart Normal Eğri  
Kaynak: (Hull, 2012, s. 313)

Şekil 3.1’de görüleceği üzere “ $N(x)$ ” fonksiyonu, standardize edilmiş normal dağılım için kümülatif olasılık dağılım fonksiyonunu yani standart normal dağılıma sahip bir değişkenin  $[\phi(0,1)]$ , “ $x$ ”ten küçük olma olasılığını ifade etmektedir. Örneğin “ $N(d_1)$ ”, “ $d_1$ ”in altındaki alan için standardize edilmiş normal dağılımın kümülatif olasılık dağılımını; “ $N(-d_1)$ ” ise, “ $1 - N(d_1)$ ”i belirtmektedir.

Bir Avrupa tipi alım opsiyonu açısından “ $N(d_1)$ ” ve “ $N(d_2)$ ” değerleri 1’e yakın olduğunda, opsiyon büyük bir ihtimalle işleme konmaktadır. Bu doğrultuda opsiyonun değeri, “ $S_0 - Ke^{-rT}$ ”ye dolayısıyla özgü değeri olan “ $S_0 - PV(K)$ ”ye eşit olmaktadır. Şayet opsiyonun işleme konması kesinse, yatırımcı, hisse senedinin cari değerine ( $S_0$ ) hak kazanmaktadır. Yatırımcının yükümlülüğü ise, kullanım fiyatının bugünkü değeri “ $PV(X)$ ” ya da sürekli bileşik olması halinde “ $Ke^{-rT}$ ” kadardır. Diğer taraftan “ $N(d_1)$ ” ve “ $N(d_2)$ ” değerleri 0’a yakın olduğunda, opsiyonun işleme konma şansı oldukça düşüktür. Böyle bir durumda Black-Scholes formülleri, Avrupa tipi alım opsiyonunun bir değerinin olmadığını göstermektedir. “ $N(d_1)$ ” ve “ $N(d_2)$ ” değerleri “0” ile “1” aralığında yer aldığı ise, Avrupa tipi alım opsiyonunun değeri, belirli olasılıklar arasında olmaktadır. Şu hâlde Black-Scholes modeli kullanılarak ve vade sonunda opsiyonun kârda olma olasılığı altında potansiyel gelirin bugünkü değeri hesaplanarak, Avrupa tipi alım opsiyonunun değeri elde edilebilmektedir. Bunun yanı sıra Black-Scholes formüllerinde yüzde cinsinden ifade edilen “ $\ln(S_0/K)$ ”, opsiyonun hâlihazırda kârda veya

zararda olup olmadığını açıklamaktadır. Örneğin, “ $S_0 = 105$ ” ve “ $K = 100$ ” olarak alındığında, opsiyon %5 [ $\ln(105/100) = 0.049$ ] kârda görünmektedir. “ $S_0 = 95$ ” ve “ $K = 100$ ” olarak varsayıldığında ise, opsiyon %5 [ $\ln(95/100) = 0.051$ ] zararda demektir. Buradan hareketle belirli bir yüzdede kârda olan bir opsiyon, eğer hisse senedi fiyatının değişkenliği düşük ve opsiyonun vadeye kalan süresi çok kısaysa, büyük bir ihtimalle kârda kalmaya devam edecektir. “ $N(d_1)$ ” ve “ $N(d_2)$ ” değerleri de, opsiyonun vade sonunda kârda olma olasılığına bağlı olarak artacaktır (Ceylan ve Korkmaz, 2018, s. 645-646).

Black-Scholes-Merton diferansiyel denkleminde bulunan “ $\mu$ ” parametresi (hisse senedinin beklenen getirisi), denklemin çözümü ile birlikte düşmektedir. Bu nedenle diferansiyel denklemi, risk tercihlerinden bağımsız bir karakter sergilemektedir (Tsay, 2005, s. 264). Bilindiği gibi “ $\mu$ ” parametresinin değeri, risk tercihlerine bağlı olarak değişmektedir. Öyle ki yatırımcıların riskten kaçınma düzeyleri arttıkça, herhangi bir hisse senedi için “ $\mu$ ” parametresinin değeri de yükselmektedir (Hull, 2012, s. 311-312). Bu parametre diferansiyel denkleminin çözümü ile birlikte düştüğünden, risk tercihleri diferansiyel denkleminin çözümünü etkileyememektedir. Dolayısıyla Black-Scholes yaklaşımında, yatırımcıların risk-nötr oldukları varsayılabilir (Tsay, 2005, s. 264).

Yatırımcıların riskten bağımsız oldukları bir dünyada, tüm yatırım varlıklarının beklenen getirisi, risksiz faiz oranı olarak karşımıza çıkmaktadır. Nitekim böyle bir dünyada, riske duyarız yatırımcılar, risk almalarını teşvik edecek bir prime ihtiyaç duymamaktadır. Bu nedenle herhangi bir nakit akışının bugünkü değerine, beklenen değer risksiz faiz oranı ile iskonto edilmesi suretiyle ulaşılabilir. Anlaşılacağı üzere riskten arındırılmış bir dünya varsayımı, türev varlıkların analizini önemli ölçüde basitleştirmektedir (Hull, 2012, s. 312).

Black-Scholes modelinin popüleritesinin altında, herhangi bir opsiyon fiyatını açık bir şekilde tanımlaması ve adil bir opsiyon fiyatı üretmeyi amaçlayan formülü basit bir biçimde uygulaması yatmaktadır. Bu kapsamda Black-Scholes yaklaşımı, genel varsayımlar eşliğinde opsiyon fiyatlandırmaya yönelik rasyonel bir çerçeve sunmaktadır. Ancak, modelde dikkate alınan sınırlayıcı varsayımların, kısa bir süre içinde gerçek piyasa davranışlarına aykırı oldukları görülmüştür. Özellikle modelin popüleritesi arttıkça, gerçek piyasa koşullarına uymayan sınırlamaların üstesinden gelebilmek amacıyla çeşitli yollar araştırılmıştır (Mostafa vd., 2017, s. 38). Bundan dolayı Robert Merton tarafından; temettü içeren opsiyonlar, sabit olmayan faiz oranı ortamları ve diğer şartlı sözleşmelerin fiyatlandırılması gibi daha genel yapılar ele alınmıştır (Augen, 2008, s. 23).

Orijinal Black-Scholes modeli, temettü ödemeyen hisse senetleri üzerine yazılı Avrupa tipi opsiyonları değerlemek için tasarlanmıştır. Fakat model tanıtıldıktan kısa bir süre sonra birçok hisse senedinin temettü ödemediği fark edilince, Fischer Black ve Myron Scholes tarafından modele bir temettü bileşeni de eklenmiştir. Buna ilaveten Black (1976b) tarafından, vadeli işlem sözleşmelerine dayalı opsiyonların fiyatının tespit edilebilmesi için modelde bazı küçük değişiklikler yapılmıştır. 1983 yılında ise, yabancı para birimlerine dayalı opsiyonların değerlemeye dâhil edilebilmesi amacıyla Garman & Kohlhagen (1983) tarafından ek düzenlemelere gidilmiştir. Resmi olarak Black-Scholes modelinin vadeli işlem sözleşmelerini de kapsayan versiyonu Black modeli, yabancı para birimlerini de içeren versiyonu ise Garman-Kohlhagen modeli şeklinde adlandırılmaktadır. Ne var ki; orijinal Black-Scholes, Black ve Garman-Kohlhagen modellerine ait değerlendirme yöntemleri çok fazla benzerlik taşıdığından, bu modellerin tamamı sadece Black-Scholes modeli olarak bilinmektedir. Söz konusu modellerin, yalnızca dayanak sözleşmenin vadeli fiyatını ve opsiyonların uzlaştırma prosedürünü hesaplama biçimlerinde farklılık bulunmaktadır (Natenberg, 2014, s. 62). Black-Scholes modelinin yanı sıra Cox vd. (1979) tarafından opsiyon fiyatlandırmada kullanılmak amacıyla Binomial model geliştirilmiştir. Binomial opsiyon fiyatlandırma modeli sayesinde Avrupa tipi opsiyonlarla sınırlı olan Black-Scholes modelinin açtığı kullanım alanı daha da genişlemiştir (Ceylan ve Korkmaz, 2018, s. 642).

Sonuç olarak, Black-Scholes ya da Black-Scholes-Merton opsiyon fiyatlandırma yaklaşımı, finans teorisi için bir dönüm noktasını temsil etmektedir. Rasyonel bir çerçeveye sahip ilk teorik opsiyon fiyatlandırma modeli olan Black-Scholes modeli, opsiyon fiyatını açıkça tanımlamış ve yatırımcıların anlık şekilde opsiyon fiyatını tahmin etmesine olanak sağlamıştır. Ayrıca, risk-nötr yatırımcı bakış açısı ile türev varlık fiyatlandırma dünyasında ve finansal model oluşturmada önemli bir referans noktası haline gelmiştir. Buna karşılık modelde, oldukça sınırlayıcı varsayımlardan dolayı zaman içinde çok sayıda iyileştirmeye gidilmiştir.

### **3.1.2. Black-Scholes Opsiyon Fiyatlandırma Modelinin Varsayımları**

Orijinal Black-Scholes opsiyon fiyatlandırma modeli, teorik olarak göz önünde bulundurulmuş bazı varsayımlara göre oluşturulmuştur. Bu varsayımları aşağıdaki gibi açıklamak mümkündür (Ceylan ve Korkmaz, 2018, s. 643-644):

✦Opsiyon sözleşmelerinin alınıp satılmasında, herhangi bir işlem maliyeti ya da vergi bulunmamaktadır. Bu sebeple korunma oranı,

herhangi bir maliyet üstlenilmeden ve sürekli bir şekilde ayarlanabilmektedir.

\*Bir hisse senedinin fiyatında, kısa bir zaman dilimi için yalnızca küçük bir değişim yaşanmaktadır.

\*Menkul kıymetlerin fiyatları, arbitraj yapılmasına olanak tanımamaktadır.

\*Tüm menkul kıymetler, mükemmel şekilde bölünebilmektedir (Hull, 2012, s. 309).

\*Hisse senedi fiyatları, sürekli olarak değişiklik sergilemektedir.

\*Hisse senedi getirileri, logaritmik normal dağılıma sahiptir.

\*Hisse senedi volatilitesi, opsiyonun vadesi boyunca sabittir (Zhou vd., 2013, s. 3).

\*Opsiyon fiyatlandırma modeli, yalnızca vade sonunda kullanılabilen Avrupa tipi opsiyonlara yöneliktir (Augen, 2008, s. 25).

\*Opsiyonun vadesi boyunca herhangi bir temettü ödemesi yapılmamaktadır.

\*Açığa satış serbest olup; herhangi bir cezai işlem uygulanmamaktadır.

\*Kısa vadeli faiz oranı üzerinden borçlanmak mümkündür.

\*Kısa vadeli faiz oranı bilinmekte ve opsiyon sözleşmesinin vadesi boyunca değişmemektedir.

Black-Scholes-Merton yaklaşımında, herhangi bir işlem ücreti ödenmeden hisse senetlerinin alınıp satılabileceği varsayılmaktadır. Oysa gerçek dünyada, alım ve satım yapmanın açık ve örtülü birtakım maliyetleri bulunmaktadır. Açık maliyetler, her bir işlem sırasında ödenmek zorunda kalınan vergileri veya komisyonları belirtmektedir. Örtülü maliyetler ise, alım-satım fiyatları arasındaki farkı ifade etmektedir. Bu fark, likiditesi yüksek hisse senetleri için daha düşük eğilimli olmakla birlikte tüm menkul kıymetlerin bir alım-satım farkının olduğu unutulmamalıdır. Eğer alım-satım fiyatları arasındaki orta nokta hisse senedinin piyasa fiyatı olarak kabul edilirse, bu durumda, yapılan her bir işlem için alım-satım fiyat farkının yarısı kadar bir örtülü işlem maliyeti ortaya çıkmaktadır. Diğer taraftan muhasebe ücretleri, trader maaşları ve bilgisayar sistemleri giderleri gibi tahmin edilmesi çok daha zor olan dolaylı maliyetler, yapılan işlem sayısına bağlı olarak artabilmektedir. Bu nedenle opsiyon piyasası yapımcılarının, tüm bu maliyetleri hesaba katmaları gerekmektedir (Derman & Miller, 2016, s. 117).

Black-Scholes modelinde bir opsiyon sözleşmesinin fiyatı, risksiz bir dünyada ve lognormal bir hisse senedi dağılımı altında, opsiyon getirisinin iskonto edilmiş beklenen değeri olarak hesaplanmaktadır (Derman &

Miller, 2016, s. 175). Dolayısıyla model, hisse senedi fiyatının lognormal dağılım izlemesini veya logaritmik hisse senedi getirilerinin normal dağılıma sahip olmasını gerektirmektedir. Ancak, riskli finansal varlıklara ait getirilerin leptokurtik kuyruklar barındırdığına dair çok sayıda ampirik kanıt mevcuttur. “Volatilite Gülümsemesi” başlığından hatırlanacağı üzere, kullanım fiyatının çok yüksek seviyede kaldığı bir alım opsiyonu aşırı zarardadır. Bu opsiyonun kullanılma ihtimali ise bir hayli düşüktür. Sağ kuyruğun leptokurtik yapıda olması halinde, normal dağılımdan daha yüksek bir olasılıkla dayanak varlığın fiyatı kullanım fiyatını aşmakta ve böylece alım opsiyonu kârda sonlanmaktadır. Lognormal dağılıma kıyasla nispeten daha yüksek olan bu olasılık, daha yüksek bir alım fiyatı ile daha yüksek bir zımni volatiliteye karşılık gelmektedir. Öte yandan kullanım fiyatının çok düşük olduğu bir satım opsiyonu da aşırı zarardadır. Şayet sol kuyruk leptokurtik bir yapıda ise, normal dağılımdan daha yüksek bir olasılıkla dayanak varlığın fiyatı kullanım fiyatının altına düşmekte ve böylece satım opsiyonu kârda sonlanmaktadır. Bu doğrultuda satım opsiyonuna ait fiyatın (aynı zamanda satım-alım paritesi yoluyla alım opsiyonuna ait fiyatın) Black-Scholes modeli tarafından tahmin edilen opsiyon fiyatından daha yüksek olması beklenmektedir. Yine bu olgu da, daha yüksek bir zımni volatilite anlamına gelmektedir. Sonuç itibariyle opsiyonun sona erme süresinin sabit olduğu bir durumda, leptokurtik kuyruk ya da kuyruklara sahip riskli finansal varlık getirileri, çok düşük ve çok yüksek kullanım fiyatlarına bağlı olarak zımni volatilitenin Black-Scholes modelinden elde edilen zımni volatiliteden daha yüksek değerler aldığı volatilite gülümsemesine neden olmaktadır (Poon, 2005, s. 76).

Volatilite gülümsemesi, döviz kuru getirilerinin yaklaşık olarak simetrik kalın kuyruklu dağılımlar sergilediği döviz kuru piyasalarında kolayca fark edilebilmektedir (Poon, 2005, s. 76). Döviz opsiyon piyasalarında gülücük/sırtma şeklinde ortaya çıkan bu fenomene göre, başabaş bir opsiyonun zımni volatilitesi, kârda veya zararda olan opsiyonların zımni volatilitelerinden daha düşüktür (Zhou vd., 2013, s. 3). Hisse senedi opsiyon piyasalarındaki volatilite gülümsemesi ise, aşağı yönde eğimli bir fonksiyonu izhar etmektedir. Bu fonksiyon, zararda alım ve kârda satım opsiyonlarının düşük zımni volatilitelere, zararda satım ve kârda alım opsiyonlarının ise yüksek zımni volatilitelere sahip olma eğilimini yansıtmaktadır (Hull, 2012, s. 420).

1987 yılında meydana gelen küresel borsa çöküşünden önce, Black-Scholes modeli tarafından opsiyon piyasalarının oldukça iyi açıklandığı düşünülmekteydi. Fakat o tarihten itibaren hisse senedi endeksleri üzerine yazılan opsiyon piyasalarının, Black-Scholes modeli ile bir uyumsuzluk içinde olduğu yani volatilite gülümsemesi sergilediği görülmüştür. Bu

nedenle Black-Scholes modeli ve volatilité gülümsemesi arasında yaşanan tutarsızlığı gidermek için araştırmacılar tarafından üç geniş stratejiye odaklanılmıştır. Birinci stratejide, sabit bir volatilité anlayışına sahip olan geleneksel geometrik Brownian hareketinden uzaklaşmaktadır. Bu doğrultuda gerçekleşen volatilité veya hisse senedi fiyat sıçramaları gibi ek stokastik değişkenleri içeren daha karmaşık yapıdaki stokastik diferansiyel denklemlerden yararlanılmaktadır. İkinci stratejide, Black-Scholes zımni volatilitenin davranışı doğrudan modellenmektedir. Ancak, zımni volatilitenin stokastik evrimi doğrudan modellenirken, oldukça dikkatli olunması gerekmektedir. Çünkü zımni volatilitede yaşanan bir değişim, tüm opsiyon fiyatlarını değiştirmektedir. Ayrıca bu stratejiye göre, risksiz arbitraj ilkesinin getirmiş olduğu kısıtlamalara uymak da güçleşmektedir. Üçüncü strateji ise, son derece esnek bir bakış açısına dayanmaktadır. Uygulayıcılar her ne kadar bu esnekliğe değer verseler de, sağlam bir teorik çerçevenin olmaması, arbitraj fırsatlarına neden olan piyasa tutarsızlıklarından kaçınmayı zorlaştırmaktadır. Vanna-Volga modeli, üçüncü stratejinin iyi bilinen ve yaygın olarak kullanılan bir örneğini temsil etmektedir (Derman & Miller, 2016, s. 163-164).

Her model gibi Black-Scholes modelinin de birtakım eksiklikleri bulunmaktadır. Özellikle sabit volatilité varsayımı, üzerinde durulan önemli bir eleştiri noktası olarak karşımıza çıkmaktadır (Augen, 2008, s. 25). Nitekim bu varsayım, belirli bir tarihte aynı varlık üzerine yazılan tüm opsiyonların, aynı zımni volatilité düzeyleri üretmesi anlamına gelmektedir. Halbuki farklı kullanım fiyatlarına ve vadeye kalan sürelerle bağılı olarak, farklı zımni volatilité düzeyleri elde edilmektedir (Mostafa vd., 2017, s. 39). Dolayısıyla eleştirmenler tarafından volatilitenin oldukça değişkenlik gösterebileceğine dikkat çekilmiş ve volatilitéyi tahmin etmek üzere farklı yaklaşımlar önerilmiştir. Bunun yanı sıra orijinal Black-Scholes modeli, Avrupa tipi opsiyonlara yönelik tasarlanmıştır. Burada hesaplamalar, Amerikan tipi opsiyonları hesaba katacak şekilde ayarlanabilmektedir. Fakat kârda olan bir opsiyonun erken kullanılması, kalan zaman priminin atılmasını gerektirdiğinden, bu olasılık nadiren gerçekleşmektedir (Augen, 2008, s. 25).

### 3.1.3. Black-Scholes Zımni Volatilité

Black-Scholes zımni volatilité, girdi olarak bir volatilité tahmini gerektiren Black-Scholes opsiyon fiyatlandırma modelinde, geriye dönük yapılan hesaplamalar sonucunda elde edilen zımni volatilitéyi ifade etmektedir. Piyasada işlem gören bir opsiyonun mevcut fiyatı üzerinden model geriye doğru çalıştırıldığında, opsiyonun kalan ömrü boyunca bir volatilité tahminine ulaşılmaktadır. Bu durum, Black-Scholes opsiyon



fiyatlandırma modelindeki bilinmeyen tek parametrenin volatilité tahmini olmasından kaynaklanmaktadır.

Black-Scholes modeli, opsiyon sözleşmesinin güncel fiyatını, zımni volatilitenin bir fonksiyonu olarak vermektedir. Bu kapsamda aşağıdaki adımlar takip edildiğinde, Black-Scholes zımni volatilitenin kavramsal yapısı daha iyi anlaşılmaktadır (Poon, 2005, s. 73-74):

$$\frac{\partial C_{BS}}{\partial \sigma} > 0 \quad (3.5)$$

Formül 3.5’de ifade edilen notasyon, “ $C_{BS}$ ”nin “ $\sigma$ ”da monoton bir fonksiyon olduğu ve “ $C_{BS}$ ” ile “ $\sigma$ ” arasında bire bir uygunluğun bulunduğu anlamına gelmektedir. Öyle ki “ $c = S_0N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2)$ ” eşitliğinden yola çıkıldığında;

$$\frac{\partial C_{BS}}{\partial \sigma} = S \frac{\partial N}{\partial d_1} \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - Ke^{-r(T-t)} \frac{\partial N}{\partial d_2} \frac{\partial d_2}{\partial \sigma} \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial N(x)}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} = \sqrt{T-t} - \frac{d_1}{\sigma} \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial d_2}{\partial \sigma} = \sqrt{T-t} - \frac{d_1}{\sigma} - \sqrt{T-t} = -\frac{d_1}{\sigma} \quad (3.9)$$

ve yukarıda gösterilen sonuçlar, Formül 3.6’da yerine konulduğunda;

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_{BS}}{\partial \sigma} &= \frac{S}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}d_1^2} \left( \sqrt{T-t} - \frac{d_1}{\sigma} \right) + \frac{Ke^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}d_2^2} \frac{d_1}{\sigma} \\ &= \frac{Se^{-\frac{1}{2}d_1^2}\sqrt{T-t}}{\sqrt{2\pi}} + \frac{d_1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \times \left[ -Se^{-\frac{1}{2}d_1^2} + Ke^{-r(T-t)}e^{-\frac{1}{2}(d_1-\sigma\sqrt{T-t})^2} \right] \quad (3.10) \\ &= \frac{Se^{-\frac{1}{2}d_1^2}\sqrt{T-t}}{\sqrt{2\pi}} + \frac{d_1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \\ &\quad \times \left[ -Se^{-\frac{1}{2}d_1^2} + Ke^{-r(T-t)}e^{\left(-\frac{1}{2}d_1^2 + d_1\sigma\sqrt{T-t} - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right)} \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{Se^{-\frac{1}{2}d_1^2}\sqrt{T-t}}{\sqrt{2\pi}} + \frac{d_1 e^{-\frac{1}{2}d_1^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \times \left[ -S + Ke^{\left(-r(T-t)+d_1\sigma\sqrt{T-t}-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right)} \right]$$

Formül 3.10 elde edilmektedir. Daha sonra ise, Formül 3.3'den hareketle hesaplanan “ $d_1\sigma\sqrt{T-t}-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)-r(T-t)=\log\left(\frac{S}{K}\right)$ ” eşitliği Formül 3.10'daki yerine yazıldığında, Formül 3.11'e ulaşılmaktadır:

$$\frac{\partial C_{BS}}{\partial \sigma} = \frac{Se^{-\frac{1}{2}d_1^2}\sqrt{T-t}}{\sqrt{2\pi}} + \frac{d_1 e^{-\frac{1}{2}d_1^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left[ -S + K\frac{S}{K} \right] = \frac{Se^{-\frac{1}{2}d_1^2}\sqrt{T-t}}{\sqrt{2\pi}} > 0 \quad (3.11)$$

Burada Black-Scholes zımnı volatilitte, opsiyon sözleşmesinin fiyatı ile doğru orantılı olmaktadır. Bununla birlikte model kapalı formda bir çözüm sunmadığından, zımnı volatilitteye ait sayısal değerin tespiti için iteratif bir arama tekniği olan Newton-Raphson algoritması benzeri prosedürler uygulanmaktadır (Dowling & Muthuswamy, 2003, s. 2).

Zımnı volatilitenin, gerçekleşen volatilitteye kıyasla bilgisel açıdan daha üstün olduğuna inanılmaktadır. Şayet opsiyon piyasası etkinse, ilgili opsiyonun kalan ömrü boyunca dayanak varlığın fiyat hareketlerine ilişkin piyasa beklentisinin, etkin bir piyasa tahmini olması gerekmektedir. Yani zımnı volatilitenin, diğer değişkenlerin içerdiği tüm bilgileri ikame etmesi beklenmektedir. (Jiang, 2007, s. 160). Bu nedenle VIX volatilitte endeksinin 2003 yılına kadar yapılan hesaplamalarında, 8 farklı S&P 100 opsiyonundan elde edilen Black-Scholes zımnı volatiliteler kullanılmıştır.

#### 3.1.4. Zımnı Volatilitte Endekslerinin Tarihsel Gelişimi

İlk araştırmalar ve finansal uygulamalarda volatilitte olgusunun, fiyatlandırma ve riskten korunma bağlamında önemli bir girdi olarak değerlendirildiği görülmektedir (Hilpisch, 2016, s. 7). Bu kapsamda ilk olarak Latane & Rendleman (1976) tarafından zımnı volatiliteler türetilerek kullanılmıştır. Araştırma, hisse senedi opsiyonları Şikago Opsiyon Borsasında işlem gören 24 firmayı kapsamıştır (Dowling & Muthuswamy, 2003, s. 2). Buna karşın opsiyon fiyatlarından bir volatilitte endeksi oluşturulması fikri, opsiyonların organize piyasalarda işlem görmeye başlamasından (26 Nisan, 1973) kısa bir süre sonra gündeme gelmiştir. Bu doğrultuda Gastineau (1977) tarafından 14 hisse senedinin başabaş alım opsiyonlarına ait zımnı volatilitelerin ortalaması alınarak bir “volatilitte endeksi” tasarlanmıştır (Fleming vd., 1995, s. 267). Daha sonra bu endeks, Cox & Rubinstein (1985) tarafından her bir hisse senedi için ilave alım opsiyonlarını içerecek şekilde geliştirilmiştir.

1990'lı yıllara gelindiğinde, Brenner & Galai (1989) tarafından o döneme kadar oynaklıktaki değişimler karşısında korunmak için etkili araçların olmadığı belirtilerek, üzerinde nakit ödemeli opsiyonların ve vadeli işlemlerin alınıp satılabileceği üç farklı volatilite endeksinin oluşturulması önerilmiştir (Hilpisch, 2016, s. 7). Devamında Whaley (1993) tarafından Şikago Opsiyon Borsasında işlem gören S&P 100 (OEX) opsiyonlarının küçük bir alt kümesi kullanılarak, VIX volatilite endeksinin orijinal formülü türetilmiştir (Lehman & McMillan, 2011, s. 172). Bu alandaki çığır açan gelişme ise, aynı yıl Şikago Opsiyon Borsası tarafından Whaley (1993)'in yaklaşımı göz önünde bulundurularak tasarlanan VIX volatilite endeksinin piyasaya sürülmesi olmuştur (Siriopoulos & Fassas, 2012, s. 78).

Fleming vd. (1995)'e göre VIX endeksi, önceki çalışmaları iki önemli yönde genişletmiştir. İlk olarak, bireysel hisse senetleri yerine endeks üzerine yazılan opsiyonlar kullanılmıştır. Böylece yatırımcıların ilgilenmesi gereken riske yani sistematik riske vurgu yapılmıştır. İkinci olarak, hem alım hem de satım opsiyonları hesaplamalara dâhil edilmiştir. Bu yaklaşım sayesinde ise, volatilite endeksi tarafından yakalanan bilginin miktarı artmıştır (Siriopoulos & Fassas, 2012, s. 78).

VIX endeksi, piyasa beklentisi ile uyumlu olarak genel zımni volatilite düzeyini yansıtan tek bir sayı şeklinde yayınlanmıştır (Natenberg, 2014, s. 516). Bu amaçla 8 farklı S&P 100 alım-satım opsiyonunun Black-Scholes zımni volatilitesi kullanılmıştır (Andersen & Benzoni, 2009, s. 36). Kullanılan opsiyonlar Amerikan tipi olduğundan, opsiyon fiyatlandırma modeli olarak Black & Scholes (1973) yaklaşımına dayanan nakit temettü düzeltmeli Binomial yöntem uygulanmıştır. Opsiyonların fiyatı ise, alım-satım sıçramasından kaynaklanan sorunları engellemek için en son alım-satım kotasyonunun orta noktası alınarak tespit edilmiştir (Kanas, 2012, s. 798).

Gelecek 30 takvim günü boyunca pay piyasasının getiri volatilitesine ilişkin piyasa görüşünü yansıtan VIX endeksi, yaklaşan seçimler veya savaş olasılığı gibi gerçekleşen volatilitenin içermediği birtakım beklentileri barındırdığından, çoğu kişi tarafından gelecekteki volatilitenin üstün bir tahmincisi olarak görülmüştür (Dowling & Muthuswamy, 2003, s. 1). Yıllıklandırılmış yüzde cinsinden ifade edilen bu endeks, oldukça başarılı olmuş ve etkili bir piyasa duyarlılık ölçütü haline gelmiştir (Lehman & McMillan, 2011, s. 172). Bundan dolayı sadece opsiyon camiasında değil finans dünyasının genelinde tanınmış bir finansal gösterge olarak, diğer piyasaların da kendi zımni volatilite endekslerini geliştirmesine zemin hazırlamıştır (Natenberg, 2014, s. 516). Örneğin; 1994 yılında Deutsche

Börse (günümüzde Eurex) tarafından VDAX volatilité endeksi geliştirilmiş, 1997 yılında ise Marché des Options Négociables de Paris (MONEP) tarafından VX1 ve VX6 olmak üzere iki farklı zımni volatilité endeksi tanıtılmıştır (Siriopoulos & Fassas, 2012, s. 78).

Orijinal VIX endeksi, her ne kadar zımni volatilité literatüründe ıgır açan bir gelişme olsa da, iki büyük itiraz ile karşılaşmıştır. Birincisi, ağırlıklandırılacak zımni volatiliteleri belirlemek için teorik bir fiyatlandırma modeli gerektirmesidir. Bu durum, hangi opsiyon fiyatlandırma modelinin ya da model girdilerinin seçileceği noktasında anlaşamama ihtimalini doğurmuştur. İkincisi ise, VIX zımni değerlerinin hesaplanmasında sadece başabaş opsiyonların kullanılmasıdır. Yatırımcılar, opsiyon piyasaları hakkında daha bilgili hale geldikçe, volatilité çarpıklığı ya da gülümsemesi, volatilité ortamını tanımlamada ve uygun stratejileri tespit etmede giderek daha önemli olmuştur. Bu değişim, başabaş opsiyonlara ait zımni volatilitelerin dikkate alındığı bir volatilité endeksinden ziyade geniş bir kullanım fiyatı aralığındaki zımni volatiliteleri kapsayan bir volatilité endeksinin yatırımcılar tarafından talep edilmesine neden olmuştur (Natenberg, 2014, s. 517-518). Bununla birlikte orijinal metodoloji, işlem günü dönüşümünden kaynaklanan yukarı yönlü yanlılığı sebebiyle sektör ve akademi tarafından eleştirilmiş; S&P 500 (SPX) opsiyon piyasası ise, en aktif endeks opsiyon piyasası olarak OEX'i geride bırakmıştır (Auinger, 2015, s. 38). 2003 yılında, bahse konu zayıflıklar ve gelişmeler hesaba katılarak, VIX volatilité endeksinin yapısı değiştirilmiştir.

22 Eylül 2003 tarihinde, başabaş zımni değerlerin kullanımından vazgeçilerek, varyans swapına dayanan bir hesaplama biçimine geçilmiştir (Bennett, 2014, s. 109). Bu tarihten itibaren orijinal metodolojiye göre oluşturulan VIX endeksi, VXO adı altında yayınlanmaya başlanmıştır. Yeni metodoloji baz alınarak hesaplanan VIX endeksi ise, Yeni VIX olarak isimlendirilmiştir. Günümüzde iki endeks de şikago Opsiyon Borsası tarafından geek zamanlı olarak yayınlanmaktadır.

Yeni VIX endeksi, Demeterfi vd. (1999) tarafından geliştirilen “gelecekteki varyansın gerçeğe uygun değeri” kavramına dayanmaktadır. Bu kavramın kökeni ise, dayanak varlığa ait risk-nötr dağılımın opsiyon fiyatlarından çıkarılabileceğini ortaya koyan Breeden & Litzenberger (1978)'in öncü çalışmasına uzanmaktadır (Jiang & Tian, 2007, s. 35). S&P 500 opsiyon sözleşmesi için risk-nötr beklenen piyasa varyansını ölçen Yeni VIX endeksi (Wang, 2019, s. 1), karesi alınmış kullanım fiyatları ile ters orantılı ağırlıklara sahip 30 takvim günü (22 işlem günü) vadeli SPX alım-satım opsiyonlarını içeren bir portföydeki fiyatlar aracılığıyla oluşturulmuştur (Fernandes vd., 2014, s. 1). Her ne kadar VIX endeksinin

ölçümü varyansa dayalı olsa da, opsiyonların zımnı volatilitesi ile daha kolay karşılaştırma yapılabilmesi bakımından standart sapma şeklinde gösterilmiştir (Bennett, 2014, s. 109). Yani endeks, varyans swapının adil teslimat fiyatının karekökü olarak kote edilmiştir (Derman & Miller, 2016, s. 82).

Herhangi bir opsiyon fiyatlandırma modeli gerektirmeyen yeni metodolojide, başabaş opsiyonlar yerine geniş bir kullanım fiyatı aralığındaki opsiyon fiyatlarının dikkate alınması, volatilite çarpıklığının/gülümsemesinin yakalanmasını sağlamıştır (Kumar, 2012, s. 161). Özellikle zararda satım opsiyonlarının hesaplamalara dâhil edilmesi, portföy sigortası taleplerine dolayısıyla da piyasa volatilitesine ilişkin önemli bilgilerin göz önünde bulundurulmasına yardımcı olmuştur (Whaley, 2009, s. 99). Orijinal VIX endeksinde ortaya çıkan yukarı yönlü sapma, “Gerçek/365” gün sayma kuralı ile yıllıklandırma yapılarak ortadan kaldırılmış (Carr & Wu, 2006, s. 15); 2014 yılında ise, Yeni VIX endeksinin yapısı, haftalık vadeye sahip SPX opsiyon serisini kapsayacak şekilde geliştirilmiştir (Fassas & Siriopoulos, 2021, s. 304). Böylece 30 günlük sabit volatiliteye ilişkin daha kesin bir ölçüm elde edilmiştir (Alexander vd., 2015, s. 313).

Yeni VIX endeksi, SPX vadeli işlemlerinden veya opsiyonlarından oluşan statik bir portföy ile çoğaltılabilecek biçimde tasarlanmıştır (Poon, 2005, s. 146). Bu doğrultuda 26 Mart 2004’te VIX endeksi üzerine yazılan vadeli işlem sözleşmeleri, 24 Şubat 2006 tarihinde ise VIX endeksi üzerine yazılan opsiyon sözleşmeleri Şikago Opsiyon Borsasında işlem görmeye başlamıştır (Andersen & Benzoni, 2009, s. 36).

Günümüz finans piyasaları açısından öncü bir volatilite sinyaline dönüşen ve küresel bir risk barometresi olarak algılanan VIX endeksi, “korku endeksi” olarak da anılmaktadır. Nitekim endeksin %20’nin altına düşmesi risk algısının azaldığına, %30’un üzerine çıkması ise risk algısının arttığına işaret etmektedir (Yıldırım, 2019, s. 47). Whaley (2000, 2009) tarafından yapılan “korku endeksi” benzetmesinde, VIX endeksinin hesaplanma biçimi etkili olmuştur. S&P 500 hisse senedi piyasasındaki daha büyük korku ya da panik daha yüksek bir VIX seviyesine karşılık gelmekte iken, daha fazla iyimserlik ya da rehabet daha düşük bir VIX seviyesi ile ilişkilendirilmektedir. Bu nedenle ilgili literatürde, VIX endeksi ve S&P 500 endeksinin genellikle ters yönde hareket ettikleri ve çoğu zaman iki endeks arasında negatif yönlü asimetric bir ilişkinin varlığı raporlanmıştır.

Teknik bir gösterge olarak piyasa hareketlerini tahmin etme, varlık fiyatlandırma modellerinde kullanılma ya da üzerine yazılan türev ürünler

sayesinde portföy koruma işlevi sağlama gibi birtakım amaçlarla kullanılabilen VIX endeksi, sadece diğer pay piyasası endekslerinin değil bireysel hisse senetleri, borsa yatırım fonları, faiz oranları, döviz kurları, emtialar ve hatta volatilitenin kendisi için zımni volatilité endekslerinin oluşturulmasına öncülük etmiştir. Örneğin GVZ (CBOE Gold ETF Volatility Index), altın fiyatlarının gelecek 30 günlük volatilitesine ilişkin piyasa beklentisini, altına dayalı bir borsa yatırım fonu olan SPDR Gold Shares ETF üzerine yazılan opsiyonları kullanarak ölçmekte; OVX (CBOE Crude Oil ETF Volatility Index), Amerika Birleşik Devletleri Petrol Fonu (United States Oil Fund, USO) tarafından fiyatlandırılan ham petrolün gelecek 30 günlük volatilitesine ilişkin piyasa beklentisini, bu fon üzerine yazılan opsiyonlara dayalı olarak hesaplamakta; MOVE (ICE BofA Volatility Index Move) ise, ABD hazine tahvillerinin gelecek 30 günlük volatilitesine ilişkin piyasa beklentisini; 2, 5, 10 ve 30 yıllık ABD hazine tahvilleri üzerine yazılan opsiyonlar aracılığıyla elde etmektedir.

Son dönemde çok sayıda volatilité endeksi tanıtılmış olmakla beraber temelde iki farklı endeks hesaplanma biçimi söz konusudur. Birincisi, Black-Scholes-Merton opsiyon fiyatlandırma çerçevesine dayanan model tabanlı metodolojidir. Başabaş alım ve satım opsiyonlarına ait zımni volatilitelerin kullanıldığı bu yöntem, orijinal VIX endeksinin tasarımında dikkate alınmış olup; hâlihazırda bazı volatilité endekslerinin hesaplanmasında kullanılmaktadır. İkinci yöntem ise, varyans swapının gerçeğe uygun değerine dayanan modelsiz metodolojidir. Geniş bir kullanım fiyatı aralığında bulunan opsiyon fiyatlarının baz alındığı ikinci yaklaşım, 2003 yılı itibarıyla VIX endeksinin temelini oluşturmuştur ve günümüzde çoğu volatilité endeksinin hesaplanmasında bu yöntem tercih edilmektedir.

Varyansa dayalı hesaplanmanın temel koşulu, sıfırdan sonsuza kadar uzanan her bir kullanım fiyatı için mükemmel likiditeye sahip opsiyonların varlığıdır. Ancak, tahmin edilen volatilité endeksinin güvenilir olması bakımından likit olmayan zararda opsiyon serilerinin hesaplamalara dâhil edilmemesi gerekmektedir. Bu nedenle her endeks sağlayıcısının, likit olmayan opsiyonları çıkarmak için kendi tescilli yöntemi bulunmaktadır (Fassas & Siriopoulos, 2021, s. 304). Normal şartlar altında cebirsel bir eşitliği ifade eden varyans formülü, telif hakkına tabi değildir. Fakat formül kuyrukları kesecek şekilde değiştirilirse yani sıfır olmayan bir alış veya satış fiyatı gerektirme ya da spottan çok uzakta kalan kullanım fiyatlarını hariç tutma gibi nitelikleri amaçlarsa, hesaplama tescilli hale gelmekte ve telif hakkına tabi olmaktadır. Bu realite, volatilité endeks sağlayıcılarının farklı hesaplama yöntemi seçmelerinin altında yatan gerekçeyi oluşturmaktadır (Bennett, 2014, s. 109).

### 3.2. BAŞLICA ZIMNİ VOLATİLİTE ENDEKSLERİ

“Lucas Kritiği”nde, ekonomik analizler ve geleceğe yönelik tahminler sırasında, sadece geçmiş dönem verilerin dikkate alınmasının yeterli olmadığına işaret edilerek, psikolojik faktörlerin ve ekonomik karar birimlerine ait beklentilerin de göz önünde bulundurulması gerektiği vurgulanmaktadır (Sadeghzadeh, 2018, s. 240). Bilindiği gibi herhangi bir opsiyon sözleşmesinin fiyatı, yatırımcıların gelecekteki spot piyasaya dair beklentilerini yansıtmaktadır (Chun vd., 2020, s. 5). Opsiyon fiyatı üzerinden hesaplanan zımnı volatilite ise, dayanak varlığa ait fiyatın gelecekteki belirli bir süre boyunca hangi ölçüde dalgalanacağına ilişkin piyasa beklentisini ifade etmektedir. Buradan hareketle zımnı volatilite endeksleri, her biri kendi dayanak varlığı üzerine yazılı opsiyon fiyatlarını kullanmak suretiyle söz konusu varlıkların gelecekteki volatilitelerini piyasa temelli bir beklentiye oturtan ve üzerine oluşturulan türev ürünler sayesinde geleneksel kalıplar dışında bir volatilite ticaretini mümkün kılan yenilikçi bir bakış açısını temsil etmektedir.

Daha önce belirtildiği üzere ilk zımnı volatilite endeksi olan VIX endeksi, 1993 yılında Chicago Board Options Exchange (CBOE) tarafından piyasaya sürülmüştür. 2003 yılında metodolojisi değiştirilen bu endeks, günümüzde korku endeksi olarak da bilinmektedir. VIX endeksinin yayınlandığı tarihten beri gerek ABD’de gerekse diğer ülkelerde farklı zımnı volatilite endeksleri geliştirilmiş ve bu endekslerin özelliklerini inceleyen çok sayıda araştırma gerçekleştirilmiştir. Örneğin, Psychoyios vd. (2006) tarafından günlük VIX verilerinin analizi sonucunda; ortalamaya dönüş eğilimi, değişen varyans ve sıçramaların varlığı gibi birtakım bulgulara ulaşılmıştır (Mills & Markellos, 2008, s. 160-161).

Yeni VIX metodolojisi, kısa sürede geniş çapta kabul göreyerek diğer piyasalar tarafından benimsenmiştir. Günümüzde tüm büyük küresel hisse senedi endekslerinin yanı sıra çeşitli emtialar, döviz kurları ve faiz oranları için zımnı volatilite endeksleri yayınlanmaktadır (Alexander vd., 2015, s. 314). Yalnızca geçmiş volatilite bilgisini değil aynı zamanda yatırımcıların gelecekteki piyasa koşullarına ilişkin beklentilerini de içeren zımnı volatilite endeksleri, genellikle piyasa belirsizliğinin iyi bir ölçüsü olarak kabul edilmektedir. Bu endekslerdeki değişimler, önemli ekonomik ve siyasi olaylarla yakından ilişkili olmakla birlikte her bir endeksin kendine özgü piyasa faktörlerinden etkilendiği görünmektedir (Liu vd., 2013, s. 861-862).

Zımnı volatilite endeksleri, son dönemde artış gösteren belirsizlik ortamında oldukça popüler hale gelmiştir. Bu yönelimde, entegrasyon seviyesi yükselen finansal piyasalar arasındaki bulaşıcılık, etkileşim veya

aktarım mekanizmaları tetikleyici bir rol oynamıştır. Volatilite endeksleri üzerine yazılan opsiyonlar ve vadeli işlemler gibi çeşitli volatilite türevlerinin başlatılması ise, volatilite riskinden korunma ve portföy çeşitlendirme bağlamında bu endekslerin sayısındaki artışı desteklemiştir. Nitekim Fassas & Siriopoulos (2021) tarafından 6 ayrı kategoride 68 adet halka açık zımni volatilite endeksi raporlanmıştır. Tablo 2.2'de, geniş bir varlık grubunu içeren zımni volatilite endekslerinin kapsamlı bir sınıflandırması yer almaktadır:

**Tablo 3. 1: Halka Açık Zımni Volatilite Endeksleri**

İsim (Sembol)	Dayanak Varlık	Endeks Sağlayıcı	Metodoloji	Zaman Aralığı	Piyasaya Sürülme Tarihi	Veri Başlangıç Tarihi
<b>Hisse Senedi Endekslerine Ait Volatilite Endeksleri</b>						
CBOE Volatility Index (VIX)	S&P 500 Endeksi	CBOE	Modelsiz	30 Gün	Eylül 2003	Ocak 1990
CBOE S&P 100 Volatility Index (VXO)	S&P 100 Endeksi	CBOE	Black & Scholes	30 Gün	Ocak 1993	Ocak 1986
CBOE Short-Term Volatility Index (VXST)	S&P 500 Endeksi	CBOE	Modelsiz	9 Gün	Ekim 2013	Ocak 2011
CBOE SPX Near-Term VIX Index (VIN)	S&P 500 Endeksi	CBOE	Modelsiz	~23 Gün*	Ocak 2011	Kasım 2010
CBOE SPX Far-Term VIX Index (VIF)	S&P 500 Endeksi	CBOE	Modelsiz	~37 Gün*	Ocak 2011	Kasım 2010
CBOE 3-Month Volatility Index (VIX3M)	S&P 500 Endeksi	CBOE	Modelsiz	3 Ay	Kasım 2007	Aralık 2007
CBOE Mid-Term Volatility Index (VXMT)	S&P 500 Endeksi	CBOE	Modelsiz	6 Ay	Kasım 2013	Ocak 2008
CBOE One-Year Volatility Index (VIX1Y)	S&P 500 Endeksi	CBOE	Modelsiz	1 Yıl	Nisan 2018	Ocak 2007
CBOE NASDAQ Volatility Index (VXN)	Nasdaq 100 Endeksi	CBOE	Modelsiz <sup>b</sup>	30 Gün	Ocak 2001	Ocak 1995
CBOE DJIA Volatility Index (VXD)	Dow Jones Sanayi Ortalaması	CBOE	Modelsiz	30 Gün	Mart 2005	Ekim 1997
CBOE Russell 2000 Volatility Index (RVX)	Russell 2000 Endeksi	CBOE	Modelsiz	30 Gün	Mayıs 2006	Ocak 2004
VDAX-NEW	DAX Endeksi	Deutsche Börse	Modelsiz	30 Gün*	Nisan 2005	Ocak 1992
EURO STOXX 50 Volatility Index (VSTOXX)	EURO STOXX 50 Endeksi	STOXX/Eurex Türev Borsası	Modelsiz	30 Gün <sup>d</sup>	Nisan 2005	Ocak 1999
AEX Volatility Index (VAEX)	AEX Endeksi	Euronext	Modelsiz	30 Gün	Eylül 2007	Ocak 2000
CAC 40 Volatility Index (VCAC)	CAC 40 Endeksi	Euronext	Modelsiz	30 Gün	Eylül 2007	Ocak 2000



S&P/ASX 200 VIX (A-VIX)	S&P/ASX 200 Endeksi	Avustralya Menk. Kıymetler Borsası	Modelsiz	30 Gün	Eylül 2010	Ocak 2008
Russian Market Volatility Index (RVI)	RTS Endeksi	Moskova Borsası	Modelsiz	30 Gün	Kasım 2013	Kasım 2013
HSI Volatility Index (VHSI)	Hang Seng Endeksi	Hong Kong Borsaları	Modelsiz	30 Gün	Şubat 2011	Ocak 2001
India VIX (NVIX)	NIFTY Endeksi	Ulusal Menkul Kıymetler Borsası	Modelsiz	30 Gün	Temmuz 2010	Mart 2009
Volatility Index on the SMI (VSMI)	SMI Endeksi	SIX/Eurex Türev Borsası	Modelsiz	30 Gün*	Nisan 2005	Ocak 1999
S&P/BMV IPC VIX Index	S&P/BMV IPC Vadeli İşlemler	S&P/BMV	Modelsiz	90 Gün	Temmuz 2017	Ocak 2015
S&P/TSX 60 VIX Index (VIXC)	S&P/TSX 60 Endeksi	Montreal Borsası	Modelsiz	30 Gün	Ekim 2010	Ekim 2009
Nikkei Stock Average Volatility Index (Nikkei 225 VI)	Nikkei 225 Endeksi	Osaka Borsası	Modelsiz	30 Gün	Kasım 2010	Haziran 1989
Volatility Index of the KOSPI 200 (VKOSPI)	KOSPI 200 Endeksi	G. Kore Borsası	Modelsiz	30 Gün	Nisan 2009	Ocak 2003
FTSE 100 Implied Volatility Index (FTSE 100 IVI)	FTSE 100 Endeksi	FTSE Russell/ Londra Borsası	Modelsiz	30 Gün <sup>f</sup>	Şubat 2013	Ocak 2000
FTSE MIB Implied Volatility Index (FTSE MIB IVI)	FTSE MIB Endeksi	FTSE Russell/ Borsa Italiana Türev Borsası	Modelsiz	30 Gün*	Şubat 2013	Nisan 2010
AlphaShares China Volatility Index (ASCNCHIX)	Hang Seng Endeksi & FTSE/Xinhua Çin 25 Endeksi	AlphaShares	Black & Scholes	30 Gün	Temmuz 2009	Haziran 2008
TAIEX Options Volatility Index <sup>h</sup>	TAIEX Endeksi	TAIFEX	Modelsiz ve Black & Scholes	30 Gün	Aralık 2006	Aralık 2006
JSE Securities South African Volatility Index (SAVIT40)	FTSE/JSE Afrika Top 40 Endeksi	Johannesburg Borsası	Modelsiz <sup>i</sup>	90 Gün	Ocak 2007	Ocak 2007
VTA35 Index	TA-35 Endeksi	Tel Aviv Borsası	Black & Scholes	30 Gün	Temmuz 2019	Temmuz 2019
<b>Emtialara Ait Volatilite Endeksleri</b>						
CBOE/COMEX Gold Volatility Index (GVX)	COMEX Gold Vadeli İşlemleri (GC)	CBOE	Modelsiz	30 Gün	Eylül 2010	Eylül 2010
CBOE Gold Volatility Index (GVZ)	SPDR Gold Shares (GLD)	CBOE	Modelsiz	30 Gün	Ağustos 2008	Haziran 2008
CBOE/NYMEX WTI Volatility Index (OIV)	WTI Ham Petrol Vadeli İşlemleri (CL)	CBOE	Modelsiz	30 Gün	Eylül 2010	Eylül 2010
CBOE Crude Oil Volatility	ABD Petrol Fonu (USO)	CBOE	Modelsiz	30 Gün	Temmuz 2008	Mayıs 2007

Index (OVX)						
SAVI White Maize (SAVWM)	Beyaz Mısır	Johannesburg Borsası	Black & Scholes	90 Gün	Haziran 2009	Ocak 2002
CBOE Silver ETF Volatility Index (VXSLV)	iShares Silver Trust (SLV)	CBOE	Modelsiz	30 Gün	Mart 2011	Mart 2011
<b>Döviz Kurlarına Ait Volatilite Endeksleri</b>						
SAVI Dollar (SAVID)	Güney Afrika Randı /ABD Doları Döviz Kuru	Johannesburg Borsası	Black & Scholes	90 Gün	Haziran 2009	Haziran 2009
JPMorgan VXX Global Index (JPMVXYGL)	ABD Dolarına İlişkin 22 Döviz Kuru Çifti	JP Morgan	Black & Scholes	90 Gün	Mart 2011	Mart 2011
JPMorgan G7 Volatility Index (JPMVXYG7)	ABD Dolarına İlişkin 9 Büyük Döviz Kuru Çifti	JP Morgan	Black & Scholes	90 Gün	Aralık 2006	Aralık 2006
JPMorgan Emerging Market Volatility Index (JPMVXYEM)	13 Gelişmekte Olan Ülkenin ABD Doları Döviz Kuru Çifti	JP Morgan	Black & Scholes	90 Gün	Aralık 2006	Aralık 2006
Deutsche Bank FX Volatility Index (CVIX)	9 Büyük Döviz Kuru Çifti	Deutsche Bank	Black & Scholes	90 Gün	Şubat 2007	Ağustos 2001
CBOE/CME FX Euro Volatility Index (EUVIX)	ABD Doları/Euro Vadeli İşlemleri (6E)	CBOE	Modelsiz	30 Gün	Ocak 2015	Ocak 2007
CBOE/CME FX Yen Volatility Index (JYVIX)	ABD Doları/Yen Vadeli İşlemleri (6J)	CBOE	Modelsiz	30 Gün	Ocak 2015	Ocak 2007
CBOE/CME FX British Pound Volatility Index (BPVIX)	ABD Doları/Sterlin Vadeli İşlemleri (6B)	CBOE	Modelsiz	30 Gün	Ocak 2015	Ocak 2007
CBOE Euro Currency Volatility Index (EVZ)	CurrencyShares Euro Trust (FXE)	CBOE	Modelsiz	30 Gün	Ağustos 2008	Kasım 2007
<b>Faiz Oranlarına Ait Volatilite Endeksleri</b>						
S&P/JPX JGB VIX Index (SPJGBV)	10 Yıllık Japonya Devlet Tahvilleri Vadeli İşlemleri	Osaka Borsası	Modelsiz	30 Gün	Ekim 2015	Ocak 2008
CBOE/CBOT 10-year U.S. Treasury Note Volatility Index (TYVIX)	10 Yıllık ABD Hazine Tahvilleri Vadeli İşlemleri	CBOE	Modelsiz	30 Gün	Mayıs 2013	Ocak 2003
CBOE Interest Rate Swap Volatility Index (SRVX)	10 Yıllık ABD Doları Faiz Oranı Swapları	CBOE	Modelsiz	1 Yıl	Haziran 2012	Haziran 2012
ICE BofA Volatility Index Move (MOVE)	ABD Hazine Tahvilleri	Intercontinental Exchange	Black (1976)	30 Gün <sup>1</sup>	Nisan 1988	Nisan 1988
ICE BofA Volatility Index	ABD Hazinesi Dışındaki Faiz	Intercontinental Exchange	Black (1976)	30 Gün <sup>1</sup>	Aralık 1996	Aralık 1996

SMOVE1M	Oranı Swapları					
Deutsche Bank Vega Index (DVX)	ABD Doları LIBOR Swap Faizleri	Deutsche Bank	Black (1976)	> 1 Yıl*	Ocak 2007	Ocak 1999
Deutsche Bank Vega EUR Index (DVXEUR)	Avrupa Swap Faizleri	Deutsche Bank	Black (1976)	> 1 Yıl*	Eylül 2007	Ocak 1999
Deutsche Bank Gamma Index (DGX)	ABD Doları LIBOR Swap Faizleri	Deutsche Bank	Black (1976)	< 1 Yıl*	Ağustos 2009	Ocak 1990
Deutsche Bank Gamma EUR Index (DGXEUR)	Avrupa Swap Faizleri	Deutsche Bank	Black (1976)	< 1 Yıl*	Eylül 2007	Ocak 1999

---

**Bireysel Hisse Senetlerine ve Hisse Senetlerine İlişkin Borsa Yatırım Fonlarına Ait Volatilite Endeksleri**

---

CBOE EFA ETF Volatility Index (VXEFA)	iShares MSCI EAFE Endeks Fonu (EFA)	CBOE	Modelsiz	30 Gün	Haziran 2013	Ocak 2008
CBOE Emerging Markets ETF Volatility Index (VXEEM)	iShares MSCI Yükselen Piyasalar Endeksi (EEM)	CBOE	Modelsiz	30 Gün	Mart 2011	Mart 2011
CBOE China ETF Volatility Index (VXFXI)	iShares Trust FTSE Çin 25 Endeks Fonu (FXI)	CBOE	Modelsiz	30 Gün	Mart 2011	Mart 2011
CBOE Brazil ETF Volatility Index (VXEWZ)	iShares MSCI Brezilya Endeks Fonu (EWZ)	CBOE	Modelsiz	30 Gün	Mart 2011	Mart 2011
CBOE Gold Miners ETF Volatility Index (VXGDX)	Market Vectors Altın Madencileri Fonu (GDX)	CBOE	Modelsiz	30 Gün	Mart 2011	Mart 2011
CBOE Energy Sector ETF Volatility Index (VXXLE)	SPDR Seçilmiş Enerji Şirketleri Fonu (XLE)	CBOE	Modelsiz	30 Gün	Mart 2011	Mart 2011
CBOE Equity VIX on Amazon (VXAZN)	Amazon (AMZN)	CBOE	Modelsiz	30 Gün	Ocak 2011	Haziran 2010
CBOE Equity VIX on Apple (VXAPL)	Apple (AAPL)	CBOE	Modelsiz	30 Gün	Ocak 2011	Haziran 2010
CBOE Equity VIX on Goldman Sachs (VXGS)	Goldman Sachs (GS)	CBOE	Modelsiz	30 Gün	Ocak 2011	Haziran 2010
CBOE Equity VIX on Google (VXGOG)	Google (GOOG)	CBOE	Modelsiz	30 Gün	Ocak 2011	Haziran 2010
CBOE Equity VIX on IBM (VXIBM)	IBM (IBM)	CBOE	Modelsiz	30 Gün	Ocak 2011	Haziran 2010
SPIKES Volatility Index (SPIKE)	SPDR S&P 500 Fonu (SPY)	MIAX Opsiyonları	Modelsiz	30 Gün	Mayıs 2018	Ocak 2005

---

**Volatilite Endekslerine Ait Volatilite Endeksleri**

---

EURO STOXX 50 Volatility of Volatility Index	VSTOXX Vadeli İşlemleri	Eurex Türev Borsası	Modelsiz	30 Gün <sup>1</sup>	Ekim 2015	Mart 2010
--	-------------------------	---------------------	----------	---------------------	-----------	-----------

(V-VSTOXX) CBOE VIX of VIX Index (VVIX)	VIX Vadeli İşlemleri	CBOE	Modelsiz	30 Gün	Mart 2012	Haziran 2006
--	-------------------------	------	----------	--------	--------------	-----------------

<sup>a</sup> VIF endeksi, VIX metodolojisinde kullanılan daha uzak vadeli (vadeye 37 günden az) SPX opsiyon serisinden elde edilmekte iken; VIN endeksi, daha yakın vadeli (vadeye 23 günden fazla) olanlardan hesaplanmaktadır.

<sup>b</sup> VXN endeksi, başlangıçta orijinal VIX metodolojisi kullanılarak oluşturulmuştur. Burada geçmiş fiyatlar Ocak 1995'e kadar uzanmaktadır. Ancak, 22 Eylül 2003'te CBOE tarafından yeni modelsiz metodoloji uygulamaya konulmuş olup; VXN endeksi için fiyat geçmişini revize edilmiştir. Revize edilen geçmiş fiyatlar, Şubat 2001'e kadardır.

<sup>c</sup> VDAX-NEW ana endeksinin yanı sıra DAX opsiyonlarının bir aydan iki yıla kadar değişen vadelerine yönelik alt endeksler hesaplanmakta ve yayınlanmaktadır.

<sup>d</sup> İlk olarak bir aydan iki yıla kadar 8 alt endeks hesaplanmakta ve daha sonra 30 ila 360 gün arasındaki zaman aralıklarını (30 günlük artışlarla) kapsayan zaman enterpolasyonu yoluyla 12 adet VSTOXX ana endeksine ulaşılmaktadır.

<sup>e</sup> VSMI ana endeksinin yanı sıra SMI opsiyonlarının bir aydan iki yıla kadar değişen vadelerine yönelik alt endeksler hesaplanmakta ve yayınlanmaktadır.

<sup>f</sup> 30 gün vadeli FTSE 100 IVI endeksi ile birlikte dayanak FTSE 100 endeksine ilişkin 60, 90, 180 ve 360 günlük yıllıklandırılmış zımni volatiliteler tahminleri bulunmaktadır.

<sup>g</sup> 30 gün vadeli FTSE MIB IVI endeksi ile birlikte dayanak FTSE MIB endeksine ilişkin 60, 90 ve 180 günlük yıllıklandırılmış zımni volatiliteler tahminleri bulunmaktadır.

<sup>h</sup> Tayvan Vadeli İşlemler Borsası tarafından iki farklı metodolojiye dayalı olarak iki ayrı volatiliteler endeksi hesaplanmaktadır. Yeni VIX metodolojisine göre oluşturulan volatiliteler endeksi 18 Aralık 2006 tarihinde, orijinal VIX metodolojisi baz alınarak tasarlanan volatiliteler endeksi ise 3 Mart 2007 tarihinde piyasaya sürülmüştür.

<sup>i</sup> SAVIT40 endeksi, başlangıçta Black-Scholes modelinden yararlanılarak oluşturulmuştur. Fakat 2010 yılından itibaren modelsiz metodolojiye geçilmiştir.

<sup>j</sup> Intercontinental Exchange şirketi tarafından vadeye kalan süresi 1 (MOVE), 3 (MOVE3M), 6 (MOVE6M) ay olan opsiyonlardan 3 adet MOVE endeksi ve vadesi 1 (SMOVE1M), 3 (SMOVE3M), 6 (SMOVE6M) ay olan swaptionlardan 3 adet SMOVE endeksi hesaplanmaktadır.

<sup>k</sup> Vadelerin seçimi, likidite ve işlem hacmini yansıtan ağırlıklarla swaption yüzeyinin likit sektörünü yakalayacak şekilde gerçekleştirilmektedir.

<sup>l</sup> İlk olarak bir aydan iki yıla kadar 8 alt endeks hesaplanmakta ve daha sonra 30 ila 210 gün arasındaki zaman aralıklarını (30 günlük artışlarla) kapsayan zaman enterpolasyonu yoluyla 7 adet V-VSTOXX ana endeksine ulaşılmaktadır.

**Kaynak:** (Fassas & Siriopoulos, 2021, s. 305-306)

Tablo 3.1'den fark edileceği gibi, genellikle varyans swapının gerçeğe uygun değerine dayalı olarak hesaplanan çok sayıda zımni volatiliteler endeksi geliştirilmiştir. Günümüzde, CBOE'nin öncülüğünü yaptığı birçok endeks sağlayıcısı tarafından başta pay piyasası endeksleri olmak üzere bireysel hisse senetleri, borsa yatırım fonları, faiz oranları, döviz kurları, emtialar ve volatilitenin kendisi için zımni volatiliteler endeksleri yayınlanmaktadır. Bu kapsamda;

Hisse senedi endekslerine ait volatiliteler endeksleri incelendiğinde, hâlihazırda CBOE tarafından 30 günlük zaman ufkuna sahip VIX volatiliteler endeksinin yanı sıra farklı zaman periyotlarına (9 gün: VXST, 3 ay: VIX3M, 6 ay: VXMT ve 1 yıl: VIX1Y) göre zımni volatiliteleri ölçen endekslerin geliştirildiği görülmektedir. Benzer şekilde VIX metodolojisindeki daha yakın vadeli SPX opsiyon serisinden hesaplanan VIN ile daha uzak vadeli SPX opsiyon serisinden elde edilen VIF bileşen volatiliteler endeksleri de CBOE tarafından dağıtılmaktadır. Ayrıca, SPX

endeksine ait beklenen volatilitiyi yakalayan VIX endeksinin başarısı; Nasdaq 100, Dow Jones Sanayi Ortalaması ve Russell 2000 endeksleri için sırasıyla VXN, VXD ve RVX volatilité endekslerinin oluşturulmasını teşvik etmiştir. Bahse konu endeksler, sadece standart aylık opsiyon serilerinin seçilmesi açısından VIX endeks paradigması ile farklılık sergilemektedir. Bunun yanında CBOE tarafından, orijinal (eski) VIX formülü kullanılarak hesaplanan ve OEX endeksinin zımnı volatilitésini ölçen VXO endeksinin yayınlanmasına devam edilmektedir (Fassas & Siriopoulos, 2021, s. 304-307).

Hisse senedi endekslerinin zımnı volatilitelerine ilişkin kotasyon talepleri, şu anda tüm dünyaya yayılmıştır. Deutsche Börs tarafından Nisan 2005'te, model tabanlı ve 45 gün vadeli VDAX endeksi, modelsiz ve 30 gün vadeli VDAX-NEW endeksi olarak yeniden tasarlanmıştır. Kısa bir süre sonra; Euro Bölgesi (VSTOXX), İsviçre (VSMI), Fransa (VCAC), Belçika (VBEL-Kasım 2010'da sonlandırılmıştır), Hollanda (VAEX) ve İngiltere (VFTSE-Haziran 2019'da sonlandırılmıştır) gibi diğer Avrupa pazarlarında da volatilité endeksleri piyasaya sürülmüştür. Son dönemde ise, likiditesi yüksek birçok gelişmiş ve gelişmekte olan ülke tarafından zımnı volatilité endeksleri hesaplanmaktadır. Bu doğrultuda Güney Kore (VKOSPI), Hindistan (NVIX), Hong Kong (VHSI), Japonya (Nikkei 225 VI), Avustralya (A-VIX), Rusya (RVI), Güney Afrika (SAVIT40), Kanada (VIXC), Meksika (S&P/BMV IPC VIX Index) ve resmi olmayan birkaç zımnı volatilité endeksi ile birlikte, 30'dan fazla pay piyasası zımnı volatilité endeksi yayınlanmaktadır (Alexander vd., 2015, s. 317).

Bireysel hisse senetleri piyasasında, likiditesi yüksek Amazon (VXAZN), Apple (VXAPL), Goldman Sachs (VXGS), Google (VXGOG) ve IBM (VXIBM) hisselerine ilişkin 30 günlük zımnı volatiliteler, 2011 yılından itibaren CBOE tarafından modelsiz VIX metodolojisi kullanılarak oluşturulmaktadır. Hisse senetlerine ait borsa yatırım fonu (ETF) piyasasında ise, yine CBOE tarafından bir dizi zımnı volatilité endeksinin tanıtıldığı görünmektedir. Bu endekslerin tamamı 30 gün vadeye sahip olup; modelsiz metodoloji temel alınarak hesaplanmaktadır. Bunlardan VXEFA, gelişmiş Avrupa, Avustralya, Asya ve Uzak Doğu piyasalarında işlem gören ve geniş bir hisse senedi yelpazesini kapsayan iShares MSCI EAFE ETF'si üzerine yazılı opsiyon fiyatlarından elde edilmekte; VXEEM, iShares MSCI Gelişmekte Olan Piyasalar ETF'sine dayalı opsiyonların bir kesitinden hesaplanmakta; VXXFI, iShares Trust FTSE Çin Endeks ETF'si üzerinde işlem gören opsiyon fiyatlarından tahmin edilmekte; VXEWZ ise, iShares MSCI Brezilya Endeks ETF'sini dayanak kılan opsiyonlara ait orta kotasyon değerlerinin iki ağırlıklı toplamı arasında enterpolasyon yapılarak oluşturulmaktadır. İlâveten CBOE tarafından iki sektör ETF'si için de

zımni volatilité endeksi (VXGDX ve VXXLE) yayınlanmaktadır. CBOE tarafından dağıtılmayan tek volatilité endeksi ise, SPDR S&P 500 ETF'sinin beklenen 30 günlük zımni volatilitésini ölçen SPIKE volatilité endeksi olarak karşımıza çıkmaktadır.

Kronolojik açıdan döviz kurlarına yönelik ilk zımni volatilité endekslerinin, JP Morgan tarafından Aralık 2006'da yayınlanan JPMVXYG7 ve JPMVXYEM volatilité endeksleri olduğu anlaşılmaktadır. Başlangıçta G-7 ülkelerinin ABD Doları döviz kuru çiftlerine ait opsiyonlar aracılığıyla hesaplanan JPMVXYG7 volatilité endeksi, daha sonra G-10 ülkelere ait döviz kuru çiftlerini içerecek şekilde genişletilmiştir. Buna paralel olarak ilk etapta 9 gelişmekte olan ülkenin ABD Doları döviz kuru çiftine ait opsiyonlar kullanılarak oluşturulan JPMVXYEM volatilité endeksi de, zaman içinde 13 gelişmekte olan para biriminin ABD doları karşısındaki opsiyonlarını takip edecek şekilde revize edilmiştir. Black-Scholes yaklaşımı altında ve 90 günlük zaman ufkunda tasarlanan bahse konu volatilité endeksleri, başabaş volatilitenin likidite ağırlıklı ortalaması yoluyla ilgili ülke gruplarının beklenen döviz kuru volatilitelerini ölçmektedir. Yine JP Morgan tarafından 2011'de duyurulan JPMVXYGL volatilité endeksi ile 22 ülkenin ABD Doları döviz kuru çiftine ait zımni volatilité seviyesi izlenmektedir. Bunun yanı sıra Deutsche Bank tarafından 2007'de piyasaya sürülen CVIX volatilité endeksi aracılığıyla 9 temel döviz kuru çiftinin 90 gün vadeli zımni volatilitésini, Black-Scholes zımni volatiliteler üzerinden hesaplanmakta iken; CBOE tarafından 2008'de başlatılan EVZ volatilité endeksi sayesinde, ABD Doları/Euro döviz kuruna yönelik bir ETF olan CurrencyShares Euro Trust üzerine yazılı opsiyon fiyatları kullanılarak, söz konusu döviz kurunun 30 günlük zımni volatilitésini modelsiz metodolojiye göre elde edilmektedir (Fassas & Siriopoulos, 2021, s. 308). Son olarak, CBOE tarafından 2015'den bu yana döviz kuru vadeli işlem opsiyonları vasıtasıyla 3 adet zımni volatilité endeksi (EUVIX, JYVIX ve BPVIX) daha 30 günlük vadede ve modelsiz metodolojiye dayalı olarak yayınlanmaktadır.

Emtialara ait zımni volatilité endekslerine bakıldığında, günümüzde 6 adet emtia volatilité endeksinden 5'inin CBOE tarafından yayınlandığı dikkat çekmektedir. Bu endekslerden OVX ve GVZ zımni volatilité endeksleri, 2008 yılı itibariyle 30 günlük bir zaman ufkunda modelsiz metodoloji uygulanarak hesaplanmaktadır. Ham petrol piyasasının belirsizliğini ölçen OVX endeksi, ABD Petrol Fonu (USO) opsiyonlarına ait gerçek zamanlı alım-satım kotasyonları ağırlıklandırılarak (Dutta vd., 2017, s. 190); altın fiyatlarının zımni volatilitésine ilişkin piyasa beklentisini yansıtan GVZ endeksi ise, altına dayalı bir borsa yatırım fonu olan SPDR Gold Shares (GLD) üzerinde işlem gören opsiyonlar

kullanılarak (Badshah vd., 2013, s. 557) oluşturulmaktadır. Ayrıca, CBOE tarafından emtia vadeli işlem opsiyonlarına dayanan 3 adet zımni volatilite endeksi (GVX, OIV ve VXSLV) daha 30 gün vadede ve modelsiz metodoloji yaklaşımı altında dağıtılmaktadır. CBOE dışındaki tek emtia volatilite endeksi (SAVWM) ise, Haziran 2009'da Johannesburg Borsası tarafından piyasaya sürülmüş olup; bu endeks ile beyaz mısırın 90 günlük beklenen volatilitesi, Black-Scholes zımni volatilite aracılığıyla tahmin edilmektedir.

Faiz piyasaları, volatilitenin ilk bakışta fiyatlandırılmasını zorlaştıran kotasyon kuralları ve yüksek bir karmaşıklık düzeyi tarafından karakterize edilmektedir. Öyle ki faiz oranı volatilitésinin gerçeğe uygun değeri, faiz oranlarının gelecekteki seyrine bağlı olmakta ve bu durum, gelecekteki faiz oranı volatilitésini etkilemektedir. Bunun yanı sıra sabit getiri piyasalarındaki volatilitenin yayılımı için kullanılacak türev ürünler, bu piyasalardaki volatilitéyi izole etmeye yardımcı olmayan birtakım bilgiler barındırmaktadır. Örneğin swaption (bir swap sözleşmesine girme opsiyonu) fiyatları, hem swap oranları hem de dayanak swap üzerinden ödenen anüitenin bugünkü değeri hakkında bilgi sağlamakta fakat ikinci husus, swaption fiyatlarının oran oynaklığına yönelik bilgi içeriğini sulandırmaktadır (Mele vd., 2015, s. 257). Söz konusu zorluklara rağmen borçlanma piyasalarındaki zımni dalgalanmaları tahmin etmek üzere belli sayıda faiz oranı zımni volatilite endeksi geliştirilmiştir.

Faiz oranı türevleri kullanılarak zımni volatilitenin seviyesini ölçmeye yönelik girişimler, çoğunlukla ABD hazine tahvilleri ve faiz oranı swaplarına dayanmaktadır. Bu kapsamda MOVE endeksi; 2, 5, 10 ve 30 yıllık ABD hazine tahvillerine ilişkin opsiyonlardan Black (1976b) modeli aracılığıyla türetilen başabaş zımni volatilite endeksinin ağırlıklı ortalaması alınarak yayınlanmaktadır. ABD hazinesi dışındaki swaptionların beklenen volatilitésini ölçen SMOVE endeksi ise; 2, 5, 10 ve 30 yıl vadeli swapların başabaş zımni volatilite endeksinin ağırlıklandırılarak elde edilmektedir. Yine DVX endeksi yardımıyla uzun vadeli (bir yıldan uzun) swap işlemlerinin ortalama zımni volatilitésini hesaplanmakta iken; DGX endeksi ile kısa vadeli (bir yıldan kısa veya eşit) swap işlemlerinin ortalama zımni volatilitésini tahmin edilmektedir. 2012 yılında piyasaya sürülmesinin ardından borsada işlem gören ilk faiz oranı zımni volatilite endeksi olan SRVX endeksi ise, 10 yıllık ABD Doları faiz oranı swapları üzerine yazılan 1 yıllık tezgah üstü (OTC) swaptionları dayanak kılmakta ve modelsiz VIX metodolojisine göre oluşturulmaktadır. Bu endeksin yanı sıra ilgili opsiyonlar kullanılarak Japonya devlet tahvillerinin 30 günlük zımni volatilitésini ölçen SPJGBV endeksi ve 10 yıllık ABD hazine tahvillerinin 30 günlük beklenen volatilitésini gösteren TYVIX endeksi de, modelsiz metodolojiye göre

tasarlanmaktadır. Son olarak, SPJGBV ve TYVIX endekslerinde volatilité fiyat değişimi olarak nitelendirilmekte, bu nedenle yüzde puan cinsinden ifade edilmektedir. MOVE, SMOVE, DVX, DGX ve SRVIX endekslerinde ise, volatilité getiri değişimi olarak değerlendirilmekte, dolayısıyla baz puan cinsinden kote edilmektedir (Fassas & Siriopoulos, 2021, s. 309).

Son dönemde, zımni volatilité endekslerinin kapsamı daha fazla genişletilmiştir. Artık tahmin edilen volatilitéye ait beklenen volatilitéyi yani volatilitenin volatilitésini (vol-vol) gösteren endeksler de mevcuttur. Bunlardan VVIX endeksi, Mart 2012’de; V-VSTOXX endeksi ise, Ekim 2015’te tanıtılmıştır (Hilpisch, 2016, s. 9-10). VVIX endeksi, VIX endeksine ait 30 günlük zımni volatilitenin riskten bağımsız (risk-nötr) ileriye dönük bir ölçütü olarak, VIX opsiyonlarından oluşan bir portföy tarafından ima edilmektedir (Kwok & Zheng, 2022, s. 105). VSTOXX endeksinin gelecek 30 günlük volatilitésine ilişkin piyasa beklentisini yansıtan V-VSTOXX endeksi ise, VSTOXX üzerine yazılı opsiyon fiyatları kullanılarak hesaplanmaktadır. Esasen her iki endeks de, piyasa katılımcılarının beklenen volatilitéye ilişkin yapmış oldukları tahminlere duydukları güven derecesini ortaya koymaktadır (Fassas & Siriopoulos, 2021, s. 309). Bu yeni endeksler ve bunlar üzerine yazılan potansiyel ürünler, volatilité varlık sınıfı için faydalı araçlar olarak nitelendirilmektedir (Hilpisch, 2016, s. 10).

Tablo 3.1’den anlaşılacağı üzere, VIX volatilité endeksinin duyurulmasından sonra başarılı VIX örneğini takip eden diğer piyasaların da yardımıyla, geniş bir varlık sınıfını içine alan çok sayıda zımni volatilité endeksi oluşturulmuştur. Bu endekslerin dışında hisse senedi, sabit getiri ve diğer piyasalar için volatilité endeksleri tasarlayan akademik çalışmalar da bulunmaktadır. Gerek piyasa uygulamaları gerekse akademik çalışmalar yoluyla finans teorisine birçok yönden katkı sağlayan volatilité endeksleri, günümüzde çeşitli küresel endeksler ve varlık sınıfları için birer duyarlılık göstergesi haline gelmiştir. Singh vd. (2018)’ne göre, 2008 finansal krizinin ardından zımni göstergeler arasındaki bağlantı, modern risk yönetiminin merkezine yerleşmiştir. Bu durum ise, zımni duyarlılık ölçütlerinin önem düzeyinin arttığını göstermekte olup; zımni volatilité endekslerine olan ilginin devam edeceği anlamına gelmektedir. Dolayısıyla endeks sağlayıcılar tarafından önümüzdeki dönemlerde yeni varlık sınıflarına yönelik volatilité endekslerinin piyasaya sürülmesi beklenmektedir. Bununla birlikte çalışmada, ilgili literatür gözden geçirilmek suretiyle VIX, OVX, GVZ ve MOVE volatilité endeksleri, sırasıyla alt başlıklar halinde detaylandırılmıştır:



### 3.2.1. VIX Volatilite Endeksi (CBOE Volatility Index)

1993 yılında, CBOE tarafından Whaley (1993)'in ufuk açıcı çalışmasına dayalı olarak, VIX adı verilen bir pay piyasası volatilite endeksi tanıtılmıştır. Bu endeks, fiyat seviyesine en yakın sekiz (dört alım ve dört satım) S&P 100 alım-satım opsiyonunun Black-Scholes zımni volatilitelelerinin ağırlıklandırılması sonucunda, herhangi bir tarihte vadesine tam olarak 30 takvim günü (22 işlem günü) kalan varsayımsal bir başabaş (veya başabaşa en yakın) S&P 100 opsiyonunun zımni volatilitesini verecek şekilde tasarlanmıştır. Seçilen opsiyonlar Amerikan tipi oldukları için fiyatlandırma modeli olarak, Black & Scholes (1973)'e dayanan nakit temettü düzeltilmeli Binomial yöntem uygulanmıştır. VIX endeksi sayesinde gelecek 30 takvim günü boyunca S&P 100 piyasasının zımni volatilitesine dair piyasa beklentisi ölçülebilmektedir. Dolayısıyla VIX endeksi, kısa sürede küresel piyasalar açısından etkili bir duyarlılık göstergesine dönüşmüş ve diğer piyasaların da kendi zımni volatilite endekslerini oluşturmalarına yol açmıştır. Fakat zımni volatilitelelerin tespiti için bir opsiyon fiyatlandırma modeli gerektirmesi, hesaplamalarda sadece başabaş opsiyonların kullanılması, işlem günü dönüşümünden kaynaklanan yukarı yönlü yanlılığı ve S&P 500 opsiyon piyasasının en aktif endeks opsiyon piyasası olarak S&P 100'ü geride bırakması gibi birtakım nedenlerden dolayı orijinal VIX endeksinin metodolojisi değiştirilmiştir. Öyle ki 22 Eylül 2003 tarihinde, gelecekteki varyansın gerçeğe uygun değerine dayanan yeni VIX metodolojisi benimsenmiştir. Bahse konu tarihten sonra orijinal metodolojiye göre oluşturulan VIX endeksi, VXO adı altında yayınlanmaya başlanmış, yeni metodoloji baz alınarak hesaplanan VIX endeksi ise, Yeni VIX olarak adlandırılmıştır. Şu anda her iki endeks de CBOE tarafından gerçek zamanlı olarak kote edilmektedir.

Demeterfi vd. (1999) tarafından geliştirilen ve “gelecekteki varyansın gerçeğe uygun değeri” kavramına dayanan Yeni VIX endeksi (Jiang & Tian, 2007, s. 35) ve VXO endeksi arasında üç önemli farklılık bulunmaktadır. Bunlar (Poon, 2005, s. 143):

- \*Volatilite çarpıklığını/gülümsemesini yakalamayı amaçlayan Yeni VIX'de, çok çeşitli kullanım fiyatlarına sahip zararda alım ve satım opsiyonlarından elde edilen bilgiler dikkate alınmaktadır. Buna karşın VXO'da, sekiz adet başabaş ya da başabaşa en yakın opsiyon uygulanmaktadır.
- \*Yeni VIX modelden bağımsız iken, VXO Black-Scholes zımni volatilitelelerin ağırlıklı ortalaması alınarak oluşturulmaktadır.
- \*Yeni VIX, S&P 500'e; VXO ise, S&P 100'e ait endeks opsiyonları üzerinden hesaplanmaktadır.

VIX endeksi, geniş bir kullanım fiyatı aralığında yer alan yakın ve bir sonraki yakın dönem S&P 500 alım-satım opsiyonlarına ait ağırlıklı fiyatların ortalaması alınarak ölçülmekte, böylece S&P 500 endeksinin 30 takvim günü (22 işlem günü) boyunca beklenen volatilitesi tespit edilmektedir (Füss vd., 2011, s. 1572). Yeni yaklaşımda, VIX endeksi, varyans swapının adil teslimat fiyatının kareköküne dayanmakta olup; varyansın kesin formülü, S&P 500 endeksine dayalı opsiyonların piyasa fiyatları üzerinden hesaplanan sonlu bir toplamı içermektedir. Bu toplama ise, 30 günden kısa vadeli opsiyonlar için bir varyans ve 30 günden uzun vadeli opsiyonlar için diğer bir varyans hesaplandıktan sonra, bu iki varyans arasında enterpolasyon yapılarak ulaşılmaktadır. Yeni metodolojide, S&P 500 opsiyonlarına ait gerçek piyasa fiyatları kullanıldığından, VIX endeksi model sorunlarına karşı duyarsız olmakta, bu nedenle Black-Scholes formülü yerine S&P 500 getirilerinin sürekliliği varsayılmaktadır (Derman & Miller, 2016, s. 82). 2003 yılından itibaren uygulamaya konulan Yeni VIX metodolojisi aşağıda gösterilmiştir (Auinger, 2015, s. 38):

$$\sigma^2 = \frac{2}{T} \sum_i \frac{\Delta K_i}{K_i^2} e^{RT} Q(K_i) - \frac{1}{T} \left[ \frac{F}{K_0} - 1 \right]^2 \quad (3.12)$$

Formül 3.12, opsiyon sözleşmelerinin ne kadar zararda olduğuna bağlı olarak, kullanım fiyatı başına kademeli azalan bir ağırlıklandırma ile sonuçlanmaktadır. Buna ilaveten eşitlikte yer alan “T”, sona erme süresini (yıl olarak); “F”, endeksin satım-alım paritesi yoluyla saptanan vadeli fiyatını [ $F = K_0 + e^{RT} \times (C_0 - P_0)$ ]; “K<sub>0</sub>”, F’ye eşit ya da F’nin hemen altında bulunan ilk kullanım fiyatını; “K<sub>i</sub>”, i’inci zararda opsiyonun kullanım fiyatını ( $K_i > K_0 \Rightarrow$  alım opsiyonu,  $K_i < K_0 \Rightarrow$  satım opsiyonu,  $K_i = K_0 \Rightarrow$  hem alım hem de satım opsiyonu); “ΔK<sub>i</sub>”, kullanım fiyatları arasındaki farkı veya K<sub>i</sub>’nin her iki tarafındaki kullanım fiyatları arasındaki farkın yarısını [ $\Delta K_i = (K_{i+1} - K_{i-1})/2$ ]; “R”, vade sonuna kadar sürekli ve bileşik yapıda olan risksiz faiz oranını; “Q(K<sub>i</sub>)” ise, “K<sub>i</sub>” kullanım fiyatlı her bir opsiyon için alış-satış farkının orta noktasını simgelemektedir (CBOE, 2023, s. 5). Basitçe “ΔK<sub>i</sub>”, en düşük kullanım fiyatı için en düşük ve bir sonraki yüksek kullanım fiyatları arasındaki farkı ( $K_{i+1} - K_i$ ); en yüksek kullanım fiyatı için ise, en yüksek ve bir sonraki düşük kullanım fiyatları arasındaki farkı ( $K_i - K_{i-1}$ ) ifade etmektedir. İlk olarak, Formül 3.12, yakın (T<sub>1</sub>) ve bir sonraki yakın (T<sub>2</sub>) dönemi kapsayan iki farklı opsiyon setine uygulanmakta; daha sonra, 30 gün vadeli VIX endeks değeri, Formül 3.13 aracılığıyla belirlenmektedir (Poon, 2005, s. 144):

$$VIX = 100 \times \sqrt{\left\{ T_1 \sigma_1^2 \left( \frac{N_{T_2} - N_{30}}{N_{T_2} - N_{T_1}} \right) + T_2 \sigma_2^2 \left( \frac{N_{30} - N_{T_1}}{N_{T_2} - N_{T_1}} \right) \right\} \times \frac{N_{365}}{N_{30}}} \quad (3.13)$$

Formül 3.13'de gösterilen “ $N_T$ ”, dakika sayısını temsil etmektedir. Şu hâlde “ $N_{365}$ ”, 525600 ( $365 \times 1400 = 525600$ ); “ $N_{30}$ ” ise, 43200 ( $30 \times 1400 = 43200$ ) olarak hesaplanmaktadır. Aslında VIX endeksinin değeri, mevcut tüm kullanım fiyatlarındaki opsiyonları içeren bir şerit satın almanın maliyetidir. Bu değere, 30 günü kapsayan iki aylık vadedeki opsiyon şeritlerinden ulaşılmakta ve söz konusu şeritler, her bir vadenin 30 güne ne kadar yakın olduğuna bağlı olarak ağırlıklandırılmaktadır. VIX endeksinin tasarımında, aşağıdaki hususlar önem arz etmektedir (Natenberg, 2014, s. 520-521):

- ✦ VIX endeksinin değeri, içsel değerinden ziyade S&P 500 endeksi üzerine yazılan opsiyonların zaman (volatilite) değerinden türetilmektedir. Bundan dolayı sadece zararda opsiyonlara ait fiyatlar (vadeli fiyatla karşılaştırmalı olarak) kullanılmaktadır.
- ✦ Endeksin vadeli fiyatı, satım-alım paritesi yoluyla belirlenmektedir.
- ✦ Her bir kullanım fiyatı için dikkate alınan opsiyon fiyatı, alış-satış fiyatının ortalamasından meydana gelmektedir.
- ✦ Sıfır olmayan alış fiyatına sahip iki kullanım fiyatı ile karşılaşıldığında, satım opsiyonlarında daha düşük, alım opsiyonlarında ise daha yüksek kullanım fiyatları hesaplamalara dâhil edilmemektedir.
- ✦ Sınırlı sayıda kullanım fiyatı mevcut olduğundan, her bir opsiyonun nihai VIX hesaplamasına katkısı, ardışık kullanım fiyatları arasındaki mesafeye göre ayarlanmaktadır. Kullanım fiyatları arasındaki mesafe ne kadar büyük ise, belirli bir opsiyonun endeksteği ağırlığı da o ölçüde fazla olmaktadır.

Yeni VIX ile birlikte, piyasa katılımcılarının opsiyon fiyatlarını doğru bildikleri varsayımı altında (Ozair, 2014, s. 84), pay piyasasının 30 takvim günlük volatilite beklentisi yıllık bazda ve yüzde puan cinsinden yayınlanmakta; orijinal VIX (VXO) endeksinde ortaya çıkan yukarı yönlü sapma, “Gerçek/365” gün sayma kuralı yoluyla yıllıklandırma yapılarak ortadan kaldırılmaktadır (Carr & Wu, 2006, s. 15). Kısıtlayıcı eski metodolojiye kıyasla sektör uygulamalarına daha yakın olan Yeni VIX endeksi, geniş bir kullanım fiyatı aralığındaki opsiyonların fiyatlarından elde edilen bilgileri bir araya getirmektedir. Böylece sadece belirli sayıdaki başabaş opsiyondan ima edilen volatilite yerine tüm volatilite çarpıklığı/gülümsemesi yakalanmaktadır (Gatheral, 2006, s. 156-157).

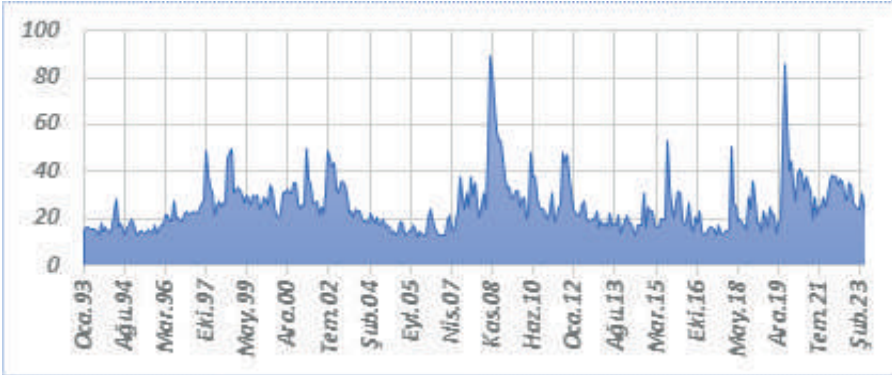
Buna karşın Yeni VIX metodolojisi, yapılan hesaplamaların daha güvenilir olması bakımından getiri dağılımının kuyruklarında bulunan ve likit olmayan opsiyon fiyatlarının atılmasını gerektirmektedir (Andersen & Benzoni, 2009, s. 37).

VIX volatilité endeksi, alınıp satılabilir bir varlık olmamasına karşın anlık olarak çoğaltılabilmektedir (Sinclair, 2013, s. 225). Yani S&P 500 vadeli işlemlerinden veya opsiyonlarından oluşan statik bir portföy ile çoğaltılabilecek şekilde tasarlanmıştır. Bu özelliği; risk/varlık yönetimi, volatilité ticareti ve portföy çeşitlendirme gibi konularda zımnî volatiliteden yararlanmak isteyen yatırımcıların türev ticareti yapabilmelerine olanak tanımıştır. Nitekim 26 Mart 2004'te VIX endeksi üzerine yazılan vadeli işlem sözleşmeleri, 24 Şubat 2006 tarihinde ise VIX endeksi üzerinde işlem gören opsiyon sözleşmeleri piyasaya sürülmüştür (Andersen & Benzoni, 2009, s. 36).

VIX volatilité endeksi, “korku endeksi” (Whaley, 2000, 2009) olarak da isimlendirilmektedir. Öyle ki bu endeks, çökmekte olan veya ciddi düşüş gösteren dönemlerde çığınca yükselmekte, rehavet zamanlarında ise son derece düşük değerler almaktadır (Lehman & McMillan, 2011, s. 172). Yapılan benzetme, VIX endeksinin hesaplanma biçiminden kaynaklanmaktadır. Piyasanın yükseleceğini düşünen bir yatırımcı, alım opsiyonu; düşeceğine inanan bir yatırımcı ise, satım opsiyonu alma eğilimi göstermektedir. Piyasaya olan inancının düştüğü senaryoda, beklenen düşüşü yakalamak veya portföyünü korumak isteyen yatırımcılar, satım opsiyonları almaya yönelmektedir. Böyle bir ortamdaki iyimser yatırımcılar da, doğrudan hisse senedi veya vadeli işlem sözleşmesi satın almak yerine beklentileri ile uyumlu şekilde ve daha az risk üstlenerek alım opsiyonları satın almaktadır. Her iki durumda da, opsiyon sözleşmelerine ait işlem hacmi ve primler artmakta, böylece kötü senaryo, daha yüksek değerli bir VIX endeksi ile sonuçlanmaktadır. Bunun tersine yatırımcılar piyasanın yükseleceğini düşündüklerinde, satım opsiyonları satma ve alım opsiyonları satın alma yerine vadeli işlem sözleşmeleri satın alma eğilimleri sergilemektedir. Bu durumda ise, opsiyon sözleşmelerine ait işlem hacmi ve primler düşmekte, dolayısıyla daha küçük değerli bir VIX endeksi elde edilmektedir (Pathak & Deb, 2020, s. 6).

Günümüz finansal piyasalarının merkezinde yer alan S&P 500 pay piyasasındaki daha büyük korku ya da panik, daha yüksek bir VIX seviyesine karşılık gelmekte iken; daha fazla iyimserlik ya da rehavet, daha düşük bir VIX seviyesi ile ilişkili kabul edilmektedir. VIX endeksi, her ne kadar ABD pay piyasalarına yönelik hesaplansa da, küresel piyasalarda uluslararası öncü bir volatilité göstergesi olarak algılanmaktadır. Bu

endekse karşı benimsenen ters yönlü bakış açısının nedeni, endeksin geçmiş dönem hareketlerine bakıldığında kolayca anlaşılmaktadır:



Şekil 3. 2: Yıllar İtibariyle Aylık En Yüksek VIX Değerleri

Kaynak: Investing veri tabanından temin edilerek oluşturulmuştur.

VIX endeksinin %20'nin altına düşmesi piyasalardaki risk algısının azaldığına, %30'un üzerine çıkması ise risk algısının arttığına işaret etmektedir (Yıldırım, 2019, s. 47). Şekil 2.11 incelendiğinde, belirli dönemlerde VIX endeksinde ait değerin %30'u bir hayli aştığı görülmektedir. 1997 Asya krizi, 1998 Rusya krizi, 2001'de yaşanan 11 Eylül terör saldırıları, 2002'de ortaya çıkan şirket skandalları ve jeopolitik gerilimler VIX endeksinin yüksek seviyelere çıkmasında etkili olmuştur. Daha sonra 2004-2007 döneminde finansal piyasalarda yaşanan sükûnet, oldukça düşük değerlere sahip VIX endeksinin beraberinde getirmiştir. Fakat bu dönemdeki sakin piyasa koşulları, 2008 küresel finans krizi nedeniyle yerini korku ve panik havasına bırakmıştır. VIX endeksi, Lehman Brothers'ın iflas etmesinin ardından Ekim 2008'de %89.53 değerini görerek tüm zamanların rekorunu kırmıştır. Buna paralel olarak birçok varlık sınıfında önemli geri çekilmeler yaşanmış ve piyasalar son derece volatil hale gelmiştir. Kriz sonrası dönemde de, VIX volatilite endeksinin yatırımcı korku göstergesi rolü devam etmiştir. Yunanistan, Portekiz, İrlanda ve İspanya'da yoğunluk gösteren Avrupa borç krizindeki olumsuz gelişmeler ile VIX endeksinin 2010-2011 yıllarındaki yükselişleri aynı dönemlere denk gelmiştir. 2015 yılında VIX volatilite endeksinde meydana gelen sıçrama ise; Çin ekonomisindeki yavaşlama, merkez bankalarının politika değişimleri ve petrol fiyatlarındaki hızlı düşüşten beslenmiştir. Yine 2017 yılındaki VIX seviyesi; Donald Trump tarafından uygulanan ekonomi politikaları, küresel ticaret savaşlarına dair endişeler ve Brexit sürecinde ortaya çıkan belirsizlik ortamında oldukça artmıştır. Ancak, küresel finans krizinden sonraki en yüksek VIX değeri, Covid-19 pandemisi sebebiyle gerçekleşmiştir. Büyük Buhran'dan bu yana en kötü ekonomik

gerilemeye yol açan ve dünya genelinde uygulanan tecrit ile hafızalara kazınan salgından dolayı VIX endeksi, Mart 2020'de %85.47'ye kadar artış göstermiştir.

Genel anlamda VIX endeksi ile ABD pay piyasaları başta olmak üzere finansal piyasalar arasında ters yönlü asimetrik ilişkiler raporlanmıştır. Buna karşın her zaman söz konusu ilişki geçerli değildir. Örneğin; Nisan 2007 - Ekim 2007, Aralık 2014 - Şubat 2015 ve Ağustos 2017 - Kasım 2017 dönemlerinde, VIX endeksi ile S&P 500 arasında güçlü ayrışmalar yaşanmıştır (Adrangi vd., 2019, s. 2). Öte yandan her ne kadar alım fırsatlarına işaret eden belirli bir VIX seviyesi olmasa da, VIX endeksi aşırı yüksek değerler aldığı anda, bunu geniş piyasa şartlarında bir alım sinyali olarak değerlendiren yatırımcılar bulunmaktadır. Elbette VIX endeksi, risk yönetimi için standart bir araç statüsü kazanmıştır. Fakat bu endeksin, piyasanın yönünü öngörmek amacıyla tek ve özel bir göstergesi olarak kullanılmaması gerekmektedir (Mishra & Debasish, 2020, s. 921). Kaldı ki opsiyon sözleşmelerine ait fiyatlar, çok sayıda faktör tarafından şekillenmektedir. Örneğin, zor zamanların çok fazla uzun sürmesi, hisse senedi fiyatlarındaki düşüşün bir norm olarak kabul görmesine ve bunun bir sonucu olarak azalan belirsizliğin volatilité üzerinde düşürücü bir rol oynamasına neden olabilmektedir (Shover, 2012, s. 57-58).

Sonuç itibarıyla S&P 500 opsiyonları için risk-nötr beklenen piyasa varyansını ölçen (Wang, 2019, s. 1) VIX endeksi, opsiyonların zımni volatilitesi ile daha kolay karşılaştırma yapılabilmesi için standart sapma şeklinde yayınlanmaktadır (Bennett, 2014, s. 109). Bu endeks, doğası gereği piyasa katılımcılarının beklenen volatilitéye ilişkin fikir birliğini yansıtmaktadır. Ayrıca, endeksin hesaplanma metodolojisi S&P 500 opsiyonlarına özgü olmamakla beraber tek noktalı artışlarda yer alan kullanım fiyatlarının sürekli bir dizisi için alış ve satışların bulunduğu herhangi bir opsiyon sınıfına uygulanabilmektedir (Lehman & McMillan, 2011, s. 204). Dolayısıyla VIX endeksi, sadece diğer pay piyasası endekslerinin değil bireysel hisse senetleri, borsa yatırım fonları, faiz oranları, döviz kurları, emtialar ve hatta volatilitenin kendisi için volatilité endekslerinin geliştirilmesine öncülük etmiştir. Son olarak, devlet kurumları ve merkez bankaları, VIX endeksini, küresel piyasalardaki riski değerlendirmek için bir barometre olarak görebilmektedir (Adrangi vd., 2019, s. 8). Örneğin, Türkiye Cumhuriyet Merkez Bankası tarafından alınacak faiz artırım kararlarında, VIX ve MOVE volatilité endekslerinin dikkate alınacağı açıklanmıştır (Erdoğan ve Baykut, 2016, s. 59).

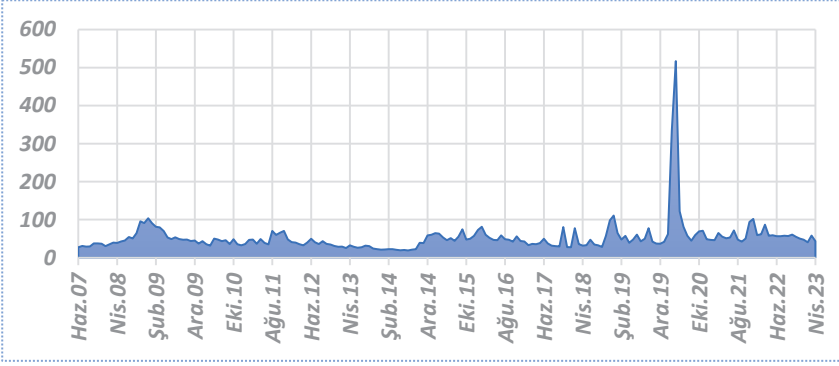
### 3.2.2. OVX Volatilite Endeksi (CBOE Crude Oil Volatility Index)

Hidrolik kırılma gibi teknolojik gelişmelerin yanı sıra kaya petrolü rezervlerinin keşfedilmesi, küresel petrol piyasasını değiştirerek, ABD'yi en fazla petrol üreten ülke konumuna getirmiştir (Adrangi & Chatrath, 2022, s. 58). Bu doğrultuda ABD Petrol Fonu (United States Oil Fund, USO), yatırımcıların ham petrol piyasasına kolay erişim sağlamalarına olanak tanıyan ve ham petrol fiyatlarındaki değişimleri takip etmek için tasarlanan bir borsa yatırım aracı olarak karşımıza çıkmaktadır. Fonun amacı, USO giderleri düşüldükten sonra, West Texas Intermediate (WTI) hafif ve tatlı ham petrolün fiyatını, yüzde cinsinden en doğru biçimde yansıtmaktır (Liu vd., 2013, s. 860).

OVX volatilite endeksi, ham petrolün gelecek 30 günlük volatilesine ilişkin piyasa beklentisini, USO fonu üzerinde işlem gören çok çeşitli kullanım fiyatlarına sahip opsiyonlar aracılığıyla tahmin etmektedir. Modelsiz VIX metodolojisi dikkate alınarak oluşturulan endeks, USO opsiyonlarına ait orta kotasyon fiyatlarının zaman ağırlıklı iki toplamı arasında enterpolasyon yapılarak elde edilmektedir. Topamlardan her biri, esasen 30 günlük bir zaman dilimini kapsayan vade tarihi boyunca, ham petrol fiyatının beklenen varyansını temsil etmektedir. Şu hâlde OVX endeksine; enterpole edilen değerlerin yıllıklandırılması, karekökünün alınması ve sonucun yüzde puan olarak ifade edilmesi suretiyle ulaşılmaktadır (CBOE/OVX, 2023).

OVX volatilite endeksi, diğer zimni volatilite endekslerine nazaran bazı spesifik özelliklere sahiptir. Örneğin, VIX volatilite endeksi, çoğunlukla hisse senedi fiyatları ile ters yönlü bir ilişki sergilemektedir. Dolayısıyla VIX endeksi, temelde aşağı yönlü riski dikkate alan çarpık bir volatilite ölçüsünü simgelemektedir. Buna karşın petrol piyasalarındaki yatırımcılar, vadeli işlem piyasaları üzerinden hem uzun hem de kısa pozisyon alabilmekte, böylece fiyatlarda yaşanan düşüşler, bu piyasalarda işlem yapan yatırımcılara fayda sağlayabilmektedir. Bu realite ise, ham petrol fiyat değişimlerinin OVX volatilite endeksi üzerindeki etkisinin, daha belirsiz olma eğilimi gösterdiği anlamına gelmektedir (Liu vd., 2013, s. 861).

Ham petrol piyasasına ait belirsizliğin ileriye dönük bir ölçüsünü ifade eden OVX endeksi, tıpkı VIX endeksinde olduğu gibi, kendi piyasasında öncü bir risk göstergesi olarak kabul edilmektedir (Dutta vd., 2019, s. 474). OVX endeksinin geçmiş dönemlerdeki hareketleri ve uluslararası petrol piyasasında yaşanan gelişmeler birlikte ele alındığında, zimni bir volatilite sinyali olarak bu endeksin önemi daha net bir şekilde anlaşılmaktadır. Bu doğrultuda yıllar itibarıyla aylık en yüksek OVX endeks değerleri Şekil 2.12'de sunulmuştur:



**Şekil 3. 3: Yıllar İtibariyle Aylık En Yüksek OVX Değerleri**

**Kaynak:** Investing veri tabanından temin edilerek oluşturulmuştur.

OVX endeksi, 2008 küresel finans krizi nedeniyle oldukça yükselerek, 2008 yılının Aralık ayında %100'ü aşmıştır. Bu durumun yaşanmasında, dünya çapında petrol talebinin azalması ve azalan taleplere bağlı olarak petrol fiyatlarında sert düşüşlerin meydana gelmesi etkili olmuştur. Yine ham petrol fiyatlarında önemli geri çekilmelerin görüldüğü 2014'te, dünya petrol piyasasındaki arz-talep dengesizliği ve politik gerilimler, OVX endeksinin yükselmesine katkı sunmuştur. 2017 yılının son aylarında ise, ABD'de yaşanan Harvey ve Irma kasırgaları, ABD'nin petrol üretim kapasitesine zarar vererek dünya ham petrol üretiminin bir kısmının askıya alınmasına neden olmuştur. 2018'in başında, Donald Trump'ın ABD ve İran arasında imzalanan nükleer anlaşmadan çekilmesi ve Venezüella'daki siyasi gelişmeler, endekste yaşanan artışları teşvik etmiş; 2018'in ikinci yarısında ise, küresel ekonomik büyümeye zarar veren ABD-Çin ticaret savaşlarının gölgesinde, OVX endeksi ikinci defa %100'ü geride bırakmıştır. Fakat asıl sıçrama, Covid-19 pandemisinden kaynaklanmıştır. Bu dönemde, küresel ekonomideki belirsizlik ve petrol talebindeki ani düşüş, büyük bir çöküşü tetiklemiştir. Nitekim Nisan 2020'de %517.19 değerini gören OVX endeksi, Mayıs 2020'den itibaren düşüş trendine girmiş ve Ağustos 2020'de %44.43'e kadar gerilemiştir. OVX endeksinin üçüncü defa %100'ü aşması ise, sınırlı petrol üretimi ve Rusya-Ukrayna arasındaki jeopolitik gerilimler eşliğinde 2021 yılının Aralık ayında gerçekleşmiştir.

Özetle OVX volatilité endeksi; dünya genelindeki jeopolitik gerilimler, küresel ekonomideki dalgalanmalar ve petrol piyasasına ait arz-talep dengesinde ortaya çıkan değişimler gibi birtakım faktörlerin etkisiyle yüksek seviyelere ulaşabilmektedir. Bu endeks üzerine yazılan vadeli işlem ve opsiyon sözleşmelerinin yaygınlaşması, üstün bir gösterge niteliği taşıyan endeksin kullanımını daha pratik hale getirmiştir (Lin & Su, 2020,



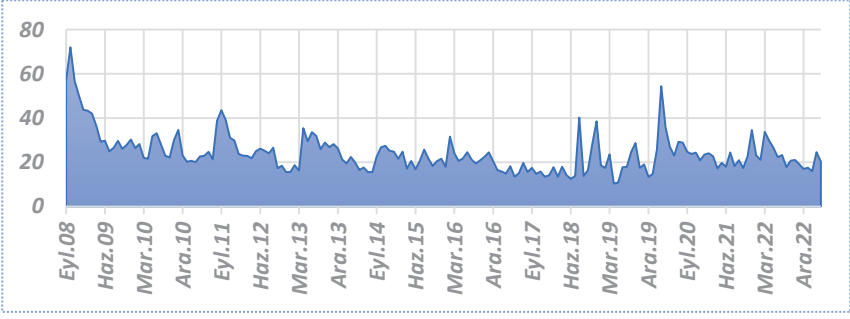
s. 2). Bununla birlikte endeks seviyesindeki yüksek değerler, genellikle artan ham petrol fiyatlarıyla ilişkilendirilmektedir. Bundan dolayı OVX endeksindeki yukarı yönlü hareketler, petrol ihraç eden ülkelerdeki tahvil piyasası ve döviz kurları için olumlu karşılanmasına rağmen çoğu ekonomideki pay piyasaları açısından olumsuz görünmektedir (Adrangı & Chatrath, 2022, s. 51).

### 3.2.3. GVZ Volatilite Endeksi (CBOE Gold Volatility Index)

SPDR borsa yatırım fonları ailesinin bir üyesi olan SPDR Gold Shares (GLD), 18 Kasım 2004 tarihinden bu yana işlem görmektedir. Bir tröst şeklinde yapılandırılan GLD fonu, ihraç edilen her bir hissesi için belirli sayıda külçe altın bulundurmaktadır. Bu nedenle hisse fiyatı, altın fiyatına paralel olarak hareket etmektedir. GLD hisseleri, başlangıçta altın fiyatının 1/10 değerinde olmasına karşın yıllık %0.4 ücret aldığından, bu değer zaman içinde aşınmıştır. GLD fonu, altına yatırım yapmak istemekle birlikte emtia piyasasında ticaret yapmayı düşünmeyen yatırımcılar için cazip bir yatırım aracı olarak kullanılmaktadır (Sadorsky, 2021, s. 6-7).

GVZ volatilite endeksi, altın getirilerinin gelecek 30 günlük volatilitesine ilişkin piyasa beklentisini, GLD fonu üzerine yazılı olan geniş bir kullanım fiyatı aralığındaki opsiyonlar aracılığıyla tahmin etmektedir. OVX endeksine benzer şekilde modelsiz VIX metodolojisi baz alınarak hesaplanan GVZ endeksi, GLD opsiyonlarına ait orta kotasyon fiyatlarının zaman ağırlıklı iki toplamı arasında enterpolasyon yapılarak elde edilmektedir. Söz konusu toplamlardan her biri, temelde 30 günlük bir zaman dilimini kapsayan vade tarihine kadar, altın fiyatlarının beklenen varyansını ölçmektedir. Bu durumda GVZ endeksine; enterpole edilen değerin yıllıklandırılması, karekökünün alınması ve sonucun yüzde puan olarak ifade edilmesi ile ulaşılmaktadır (CBOE/GVZ, 2023).

Altın piyasasına ait beklenen fiyat değişkenliğini ölçen GVZ endeksi, kendi piyasasında öncü bir risk göstergesi olarak kullanılmaktadır (Dutta vd., 2019, s. 474). Günümüzde kıymetli maden piyasası, çok sayıda faktörden etkilenmekle beraber genellikle GVZ endeksinin, altın piyasasındaki fiyat hareketlerini iyi bir şekilde yakaladığı belirtilmektedir. Nitekim başta uluslararası altın piyasası olmak üzere küresel finans piyasalarında belirsizlik ve risk arttığında, GVZ endeksi de artış göstermektedir. Bu artışın yaşanmasında, güvenli liman olarak ifade edilen altının, yüksek likiditeye sahip düşük riskli bir yatırım aracı olması ve enflasyon ya da savaş gibi ekonomik istikrarı bozabilecek olumsuz gelişmelere karşı değerini muhafaza edebilmesi etkili olmuştur:



**Şekil 3. 4: Yıllar İtibariyle Aylık En Yüksek GVZ Değerleri**

**Kaynak:** Investing veri tabanından temin edilerek oluşturulmuştur.

2008 küresel finans krizinde, küresel piyasalardaki artan belirsizlik ve endişeler nedeniyle güvenli liman olarak anılan altın fiyatlarının zımni volatilitesi, %71.96'ya kadar yükselmiştir. 2010-2011 yıllarındaki artışlarda ise, birçok ülkede meydana gelen politik ve ekonomik istikrarsızlıklar ön plana çıkmıştır. Bahse konu dönemde, Avrupa borç krizinin derinleşmesi ile birlikte Orta Doğu ve Kuzey Afrika ülkelerinde, “Arap Baharı” şeklinde adlandırılan protestolar ve ayaklanmalar, uluslararası piyasalardaki belirsizlik algısını körüklemiştir. Yine 2018 yılının Ağustos ve Aralık aylarında; ABD ve Çin arasında süren ticaret savaşları, ABD Merkez Bankası (Federal Reserve, FED) tarafından uygulanan para politikaları, küresel ekonomik büyümeye yönelik kaygılar ve Brexit müzakerelerinde ortaya çıkan anlaşmazlıklar, GVZ endeksinin yukarı yönlü hareketlerini teşvik etmiştir. Bunun yanı sıra VIX ve OVX endekslerinde olduğu gibi GVZ endeksi de, Covid-19 pandemisinde büyük bir artış kaydetmiştir. Öyle ki endeks, dünya geneline yayılan korku, panik ve belirsizliğin etkisiyle 2020 yılının Mart ayında, %54.37'yi görerek tarihindeki en yüksek ikinci seviyeye ulaşmıştır. İlaveten Aralık 2021'de, yükselen enflasyon endişeleri ve Çin Evergrande krizi; Mart 2022'de ise, faiz oranı artışlarına ilişkin beklentiler, Rusya'nın Ukrayna'yı işgal etme girişimi ve enerji fiyatlarındaki yükselişler gibi ekonomik ve politik riskler GVZ endeksindeki artışları desteklemiştir.

“Gold VIX” olarak da isimlendirilen GVZ volatilité endeksi, altın opsiyonlarına yönelik talep doğrultusunda; altın fiyatlarındaki dalgalanmalar, faiz oranı değişimleri, döviz kuru dalgalanmaları, altın rezervleri, jeopolitik riskler, makroekonomik veriler, küresel ekonomiye olan genel güven düzeyi, risk iştahı ve likidite koşulları gibi birçok faktörden etkilenmektedir. Bu endeks, altın piyasalarında ya da altına dayalı türev piyasalarda işlem yapmayı düşünen yatırımcılar tarafından öncü bir gösterge olarak yakından takip edilmektedir.

### 3.2.4. MOVE Volatilite Endeksi (ICE BofA Volatility Index Move)

Merrill Lynch Option Volatility Estimate (MOVE), borçlanma piyasasının zımnı volatilitelerini ölçen ilk endeks olarak bilinmektedir. Endeks, Intercontinental Exchange (ICE) şirketinin Ağustos 2019'da Bank of America Merrill Lynch (BofA) şirketinden sabit getirili volatilitite endekslerini satın almasının ardından "ICE BofA Volatility Index Move" olarak adlandırılmıştır. Günümüzde ICE tarafından vadeye kalan süresi bir, üç ve altı ay olan opsiyonlar kullanılarak 3 adet MOVE endeksi hesaplanmaktadır (Fassas & Siriopoulos, 2021, s. 306-309).

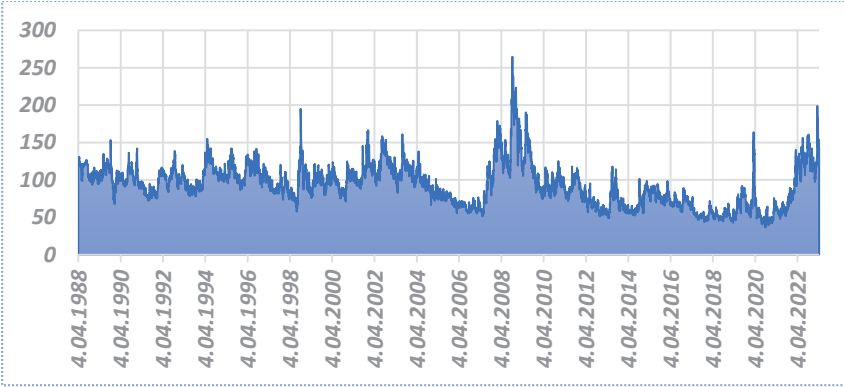
BofA şirketinden Harley Bassman, MOVE volatilitite endeksini, VIX endeksinin tahvil piyasasındaki eşdeğeri olarak tanımlamıştır (Zhou, 2014, s. 227). Buradan hareketle MOVE endeksi; 2, 5, 10 ve 30 yıl vadeli gösterge ABD hazine tahvilleri üzerine yazılı sabit bir aylık başabaş tezgâh üstü opsiyonlardan elde edilen normalize edilmiş zımnı volatilitelerin ağırlıklı ortalamasıdır (Markellos & Psychoyios, 2018, s. 192). Her bir vade için opsiyon işlem hacimlerine yönelik tahminlere dayanan (Zhou, 2014, s. 217) ağırlıklar; 2, 5, 10 ve 30 yıllık hazine tahvilleri için sırasıyla %20, %20, %40 ve %20 olarak uygulanmaktadır (Cieslak & Povala, 2016, s. 1400).

Tahvil piyasasındaki yatırımcıların geleceğe ilişkin hissiyatlarını ortaya koyan MOVE endeksi, temel anlamda faiz oranlarının gelecekteki dalgalanmalarını tahmin etmektedir. Endeksin yüksek değerleri, yatırımcıların faiz oranlarındaki beklenmedik hareketlere karşı korunmak için daha fazla ödeme yapmaya istekli oldukları zamanları göstermektedir (Budd, 2017, s. 24).

MOVE endeksine ait zımnı volatiliteler, ABD hazine tahvilleri üzerine yazılan başabaş opsiyonlardan Black (1976b) modeli aracılığıyla tespit edilmektedir. Burada MOVE endeksinin dayandığı opsiyonların vadeleri yaklaşık bir ay olduğundan, bu endeks üzerinden uzun vadeli getirilerin nispeten kısa bir ufuktaki zımnı volatilitesi ölçülebilmektedir. Ayrıca, MOVE endeksinde bir getiri değişimi olarak nitelendirilen volatilitite, VIX endeksi gibi yüzde cinsinden değil baz puan şeklinde ifade edilmektedir (Zhou, 2014, s. 217).

MOVE endeksi tarafından kullanılan opsiyonlar, hazine vadeli işlemleri yerine nakit tahviller üzerine yazıldıklarından, tezgâh üstü işlem görmekte ve daha düşük bir likiditeye sahip olmaktadır. Bu nedenle veriler, yalnızca büyük aracı kurumlar gibi spesifik kaynaklardan temin edilebilmektedir (Cieslak & Povala, 2016, s. 1400). Öte yandan MOVE

endeksinde meydana gelen hareketler; finansal krizler, siyasi belirsizlikler ve ekonomik göstergelerdeki dalgalanmalar gibi borçlanma piyasasını etkileyen önemli olayların başabaş opsiyon fiyatları (böylece fiyatlardan elde edilen zımni volatiliteler) üzerinde önemli düzeyde değişimlere neden olması yoluyla gerçekleşebilmektedir. Yine faiz oranlarının seviyesi de, MOVE endeksindeki değişimin boyutunu etkileyebilmektedir. Örneğin, faiz oranlarının çok düşük bir seviyede olması halinde, yapılacak küçük çaplı bir faiz artırımını dahi, MOVE endeksinde yüksek bir hareketliliğe yol açabilmektedir:



**Şekil 3. 5: Yıllar İtibariyle Günlük Kapanış MOVE Değerleri**

**Kaynak:** MacroVar veri tabanından temin edilerek oluşturulmuştur.

Diğer zımni volatiliteler endekslerine benzer şekilde MOVE volatiliteler endeksi de, çok sayıda faktörden etkilenmektedir. Buna karşın küresel finansal piyasalarda ortaya çıkan gelişmelerin, zımni endeksler üzerindeki etkisi kaçınılmaz görünmektedir. Bazı dönemlerde MOVE endeksi, oldukça yüksek değerler almıştır. Bu kapsamda Rusya'da meydana gelen finansal kriz ve devamında sabit getirili varlıklardan arbitraj geliri elde etmeyi amaçlayan Long Term Capital Management (LTCM) isimli hedge fonun iflasi, Ekim 1998'de, küresel tahvil piyasasındaki belirsizliği arttırmış ve MOVE endeksinin bu dönem için 195 baz puanına kadar çıkmasında etkili olmuştur. 2008 yılında ise; VIX ve GVZ endekslerinde olduğu gibi MOVE volatiliteler endeksi de rekor seviyeye (264.60 baz puan) ulaşmıştır. Bunun yaşanmasında, küresel finans krizinden dolayı bankalar arasındaki güvensizliğin derinleşmesi, kredi faaliyetlerinin durma noktasına gelmesi ve borçlanma piyasasında artan kaygılar ön plana çıkmıştır. Covid-19 pandemisi de, kısa süreli olmasına rağmen (28.02.2020-24.03.2020) MOVE volatiliteler endeksinde bir sıçramayı tetiklemiştir. Son olarak, yatırımlarını daha çok ABD hazinesine ait menkul kıymetlere yapan Silicon Valley Bank ve kaynaklarını büyük ölçüde kripto varlık piyasalarına aktaran Silvergate Capital ve Signature Bank, FED tarafından enflasyonu

dizginlemek adına verilen faiz artırım kararlarından ve bu kararların bir sonucu olarak kripto varlık piyasasında ortaya çıkan büyük düşüşlerden olumsuz yönde etkilenerek, 2023 yılının Mart ayında iflas etmişlerdir. Bu bankaların iflası, yatırımcıların güvenli liman olarak gördükleri varlıklara yönelmesi, piyasa stres göstergelerinin yükselmesi, dolayısıyla da MOVE endeksinde son 14 yıldaki en büyük artışlarının yaşanmasıyla sonuçlanmıştır.

Kısacası MOVE volatilite endeksi, dünya genelinde yatırımcıların güvenli varlık olarak kabul ettikleri ABD hazine tahvillerinin gelecek 30 günlük volatilitesine ilişkin piyasa beklentisini yansıtmaktadır. Bu özelliği, küresel tahvil piyasasının duyarlılığını ölçmek üzere MOVE endeksinin faydalı bir araç kılmasıdır. Yüksek MOVE değerleri, uluslararası tahvil piyasasındaki belirsizliğin arttığı anlamına gelirken; düşük endeks değerleri, tahvil piyasalarının daha öngörülebilir olduğuna işaret etmektedir. MOVE volatilite endeksi; ilgili uluslararası kuruluşlar, kamu kurumları ve merkez bankaları tarafından küresel risk algısını belirlemede öncü bir gösterge olarak yakından takip edilmektedir. Bununla birlikte endeks, küresel tahvil piyasasındaki risklerin izlenmesi, yönetilmesi ve portföy çeşitlendirmesi amacıyla kullanılmaktadır.

## SONUÇ

Niteliği itibariyle soyut bir kavram olan volatilité, istikrarsızlığın ölçüsü olarak kaçınılmaz bir piyasa deneyimini yansıtmaktadır. Dolayısıyla volatilité olgusunun iyi bir şekilde anlaşılması ve finansal piyasalardaki rolünün belirlenmesi oldukça önem arz etmektedir. İfade edildiği üzere, volatilitéyi karakterize eden belli başlı kalıplar bulunmaktadır. Volatilité kümelenmesi, volatilité asimetrisi, volatilitenin ortalamaya dönüş eğilimi, uzun dönem hafıza etkisi ve volatilitenin ortak hareket özelliği gibi bu kalıplar, her ne kadar nispeten basit olan zaman serisi tahmin modellerinde dikkate alınmasa da, ARCH-GARCH tipi spesifikasyonlarda ve stokastik volatilité tahmin modellerinde göz önünde bulundurulmaktadır. Böylece doğru ve güvenilir volatilité tahminleri üzerinden piyasa dinamiklerine daha uygun risk yönetimi ve varlık tahsisli hedeflenmektedir. Zımni volatilité ise, piyasanın gelecekteki volatilitésinin beklenen değeri şeklinde ifade edilmektedir. Bu volatilité, bir dayanak varlığa ait fiyatın gelecekteki belirli bir süre boyunca hangi ölçüde dalgalanacağına dair piyasadaki fikir birliğini yansıtmaktadır.

Çok sayıda dayanak varlık üzerine (pay, endeks, döviz kuru, emtia, faiz oranı gibi) çeşitli opsiyon sözleşmelerinin düzenlenebildiği günümüz dünyasında, finansal piyasalara ilişkin birçok zımni volatilité endeksi oluşturulmuştur. Bu endekslerin ilki olan VIX endeksi, geniş bir kullanım fiyatı aralığında yer alan yakın ve bir sonraki yakın dönem S&P 500 alım-satım opsiyonlarına ait ağırlıklı fiyatların ortalaması alınarak ölçülmekte, böylece ABD pay piyasasının 30 takvim günü (22 işlem günü) boyunca beklenen volatilitésini tespit edilmektedir. Bu endeks, kısa bir sürede küresel piyasalar açısından etkili bir duyarlılık göstergesine dönüşmüş ve diğer piyasaların da kendi zımni volatilité endekslerini oluşturmalarına zemin hazırlamıştır. Nitekim günümüzde, tüm büyük küresel hisse senedi endekslerinin yanı sıra çeşitli emtialar, döviz kurları ve faiz oranları için zımni volatilité endeksleri yayınlanmaktadır.

Zımni volatilité endeksleri, son dönemde artış gösteren belirsizlik ortamında oldukça popüler hale gelmişlerdir. Bu endeksler; ileriye dönük olmaları, modelsiz bir yapı sergilemeleri ve profesyonel piyasa katılımcılarının hem korkularını hem de coşkularını yansıtmaları bakımından üstün araçlar olarak kabul edilmektedirler. Uluslararası piyasa koşullarının daha iyi anlaşılabilmesi ve uygun portföy yönetim

stratejilerinin belirlenebilmesi açısından zımnı volatilite endeksleri oldukça kıymetli bilgiler sunmaktadır. Bu endeksler üzerine oluşturulan opsiyonlar ve vadeli işlemler gibi çeşitli volatilite türevleri ise, piyasalardaki dalgalanmalardan yararlanmak ya da volatilite riskinden korunmak isteyen yatırımcılar için oldukça ideal finansal araçlar olarak ön plana çıkmaktadır.

Bu çalışmanın, finansal piyasalardaki volatilite olgusunun anlaşılmasına katkı sunması beklenmektedir. Ayrıca, volatilite tahmininde uygulayıcılara birtakım yararlı bilgiler sağlayacağı düşünülmektedir. Son olarak, yenilikçi bir bakış açısını temsil eden ve geleneksel kalıplar dışında volatilite ticaretini mümkün kılan zımnı volatilite endekslerinin tanıtılmasına yardımcı olacağı değerlendirilmektedir.

## KAYNAKÇA

- Aboura, S., & Chevallier, J. (2013). Leverage vs. Feedback: Which Effect Drives the Oil Market? *Finance Research Letters*, 10(3), 131-141.
- Adrangi, B., & Chatrath, A. (2022). Dynamic Responses of Major Pacific Rim Emerging Equity Markets to the US Crude Oil Fear Index (OVX). *Bulletin of Applied Economics*, 9(1), 51-84.
- Adrangi, B., Chatrath, A., Macri, J., & Raffice, K. (2019). Dynamic Responses of Major Equity Markets to the US Fear Index. *Journal of Risk and Financial Management*, 12(4), 1-23.
- Akgün, E. (2016). *Türkiye Risk Primi Göstergelerinde Dalgalı Bazlı Parçalı Durağanlık Analizi ve Volatilité Modelleri*. Antalya: Akdeniz Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Yayınlanmamış Doktora Tezi.
- Alexander, C., Kapraun, J., & Korovilas, D. (2015). Trading and Investing in Volatility Products. *Financial Markets, Institutions & Instruments*, 24(4), 313-347.
- Amado, C., Silvennoinen, A., & Teräsvirta, T. (2019). Models with Multiplicative Decomposition of Conditional Variances and Correlations. J. Chevallier, S. Goutte, D. Guerreiro, S. Saglio, & B. Sanhaji içinde, *Financial Mathematics, Volatility and Covariance Modelling* (s. 217-260). Oxford: Routledge.
- Andersen, T. G. (2000). Some Reflections on Analysis of High-Frequency Data. *Journal of Business & Economic Statistics*, 18(2), 146-153.
- Andersen, T. G., & Benzoni, L. (2009). Stochastic Volatility. *Working Paper Series*, 1-56.
- Andersen, T. G., & Bollerslev, T. (1998). Answering the Skeptics: Yes, Standard Volatility Models do Provide Accurate Forecasts. *International Economic Review*, 39(4), 885-905.
- Ataş, B., & Arlı, O. E. (2022). Covid-19 Pandemisi Döneminde Asimetrik Volatilité Bulguları: BIST Sektör Endekslerinde Bir İnceleme. *Alanya Akademik Bakış Dergisi*, 6(2), 2217-2233.
- Augen, J. (2008). *The Volatility Edge in Options Trading: New Technical Strategies for Investing in Unstable Markets*. Upper Saddle River, New Jersey: FT Press.
- Auinger, F. (2015). *The Causal Relationship between the S&P 500 and the VIX Index: Critical Analysis of Financial Market Volatility and Its Predictability*. New York: Springer.



- Aydemir, A. B. (2002). Volatility Modelling in Finance. S. Satchell, & J. Knight içinde, *Forecasting Volatility in the Financial Markets* (s. 1-46). Jordan Hill, Oxford: Butterworth-Heinemann.
- Badshah, I. U., Frijns, B., & Tourani-Rad, A. (2013). Contemporaneous Spill-Over among Equity, Gold, and Exchange Rate Implied Volatility Indices. *Journal of Futures Markets*, 33(6), 555-572.
- Back, S., Mohanty, S. K., & Glambosky, M. (2020). COVID-19 and Stock Market Volatility: An Industry Level Analysis. *Finance Research Letters*, 37, 1-10.
- Bahra, B. (2007). Implied Risk-Neutral Probability Density Functions from Option Prices: A Central Bank Perspective. J. Knight, & S. Satchell içinde, *Forecasting Volatility in the Financial Markets* (s. 201-226). Jordan Hill, Oxford: Butterworth-Heinemann.
- Baillie, R. T. (1996). Long Memory Processes and Fractional Integration in Econometrics. *Journal of Econometrics*, 73(1), 5-59.
- Baillie, R. T., & Morana, C. (2009). Modelling long Memory and Structural Breaks in Conditional Variances: An Adaptive FIGARCH Approach. *Journal of Economic Dynamics & Control*, 33(8), 1577-1592.
- Baillie, R. T., Bollerslev, T., & Mikkelsen, H. O. (1996). Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 74(1), 3-30.
- Banerjee, A., & Urga, G. (2005). Modelling Structural Breaks, Long Memory and Stock Market Volatility: An Overview. *Journal of Econometrics*, 129, 1-34.
- Banulescu-Radu, D., & Dumitrescu, E. (2019). Do High-Frequency-Based Measures Improve Conditional Covariance Forecasts? J. Chevallerier, S. Goutte, D. Guerreiro, S. Saglio, & B. Sanhaji içinde, *Financial Mathematics, Volatility and Covariance Modelling* (s. 261-285). Oxford: Routledge.
- Bauwens, L., Hafner, C. M., & Laurent, S. (2012). Volatility Models. L. Bauwens, C. Hafner, & S. Laurent içinde, *Handbook of Volatility Models and Their Applications* (s. 1-45). Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons Inc.
- Bauwens, L., Laurent, S., & Rombouts, J. V. (2006). Multivariate GARCH Models: A Survey. *Journal of Applied Econometrics*, 21(1), 79-109.
- Bayramoğlu, M. F., & Abasız, T. (2017). Gelişmekte Olan Piyasa Endeksleri Arasında Volatilite Yayılım Etkisinin Analizi. *Muhasebe ve Finansman Dergisi*(74), 183-200.
- Belasri, Y., & Ellaia, R. (2017). Estimation of Volatility and Correlation with Multivariate Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity Models: An Application to Moroccan Stock Markets. *International Journal of Economics and Financial Issues*, 7(2), 384-396.
- Bennett, C. (2014). *Trading Volatility: Trading Volatility, Correlation, Term Structure and Skew*. Charleston, South Carolina: CreateSpace.

- Bera, A. K., & Higgins, M. L. (1993). ARCH Models: Properties, Estimation and Testing. *Journal of Economic Surveys*, 7(4), 305-366.
- Bera, A. K., & Kim, S. (2002). Testing Constancy of Correlation and Other Specifications of the BGARCH Model with an Application to International Equity Returns. *Journal of Empirical Finance*, 9(2), 171-195.
- Bessembinder, H., Coughenour, J. F., Seguin, P. J., & Smoller, M. M. (1995). Mean Reversion in Equilibrium Asset Prices: Evidence from the Futures Term Structure. *The Journal of Finance*, 50(1), 361-375.
- Black, F. (1976a). Studies of Stock Market Volatility Changes. *Proceedings of the American Statistical Association, Business and Economic Statistics Section*, 177-181.
- Black, F. (1976b). The Pricing of Commodity Contracts. *Journal of Financial Economics*, 3(1-2), 167-179.
- Black, F., & Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *The Journal of Political Economy*, 81(3), 637-654.
- Blair, B. J., Poon, S.-H., & Taylor, S. J. (2001). Forecasting S&P 100 Volatility: The Incremental Information Content of Implied Volatilities and High-Frequency Index Returns. *Journal of Econometrics*, 105, 5-26.
- Blenman, L. P., & Wang, G. J. (2012). New Insights on the Implied and Realized Volatility Relation. *Review of Pacific Basin Financial Markets and Policies*, 15(1), 1-22.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31(3), 307-327.
- Bollerslev, T. (1987). A Conditionally Heteroskedastic Time Series Model for Speculative Prices and Rates of Return. *The Review of Economics and Statistics*, 69(3), 542-547.
- Bollerslev, T. (1990). Modelling the Coherence in Short-Run Nominal Exchange Rates: A Multivariate Generalized ARCH Model. *The Review of Economics and Statistics*, 72(3), 498-505.
- Bollerslev, T. (2010). Glossary to ARCH (GARCH). T. Bollerslev, J. Russell, & M. Watson içinde, *Volatility and Time Series Econometrics: Essays in Honor of Robert F. Engle* (s. 137-163). Oxford: Oxford University Press.
- Bollerslev, T., & Mikkelsen, H. O. (1996). Modeling and Pricing Long Memory in Stock Market Volatility. *Journal of Econometrics*, 73(1), 151-184.
- Bollerslev, T., Engle, R. F., & Wooldridge, J. M. (1988). A Capital Asset Pricing Model with Time-Varying Covariances. *Journal of Political Economy*, 96(1), 116-131.
- Bossu, S. (2014). *Advanced Equity Derivatives: Volatility and Correlation*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons Inc.

- Bouri, E., Demirel, R., Gupta, R., & Pierdzioch, C. (2020). Infectious Diseases, Market Uncertainty and Oil Market Volatility. *Energies*, 13(16), 1-8.
- Bozkurt, H. (2009). M-GARCH Modellerinin Karşılaştırmalı Analizi. *Kocaeli Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*(18), 126-145.
- Bozkurt, H. (2009). Türkiye’de Doğrudan Yatırımların Belirleyicileri Üzerine Bir Analiz: CCC-MGARCH Modeli ile Tahmin. *ODTÜ Gelişme Dergisi*, 36, 71-92.
- Breeden, D. T., & Litzenberger, R. H. (1978). Prices of State-Contingent Claims Implicit in Option Prices. *The Journal of Business*, 51(4), 621-651.
- Brenner, M., & Galai, D. (1989). New Financial Instruments for Hedging Changes in Volatility. *Financial Analysts Journal*, 45(4), 61-65.
- Brooks, C. (2019). *Introductory Econometrics for Finance* (4 b.). Cambridge: Cambridge University Press.
- Budd, B. (2017). Canaries in the Coal Mine. The Tale of Two Signals: The VIX and the MOVE Indexes. *8th Economics & Finance Conference* (s. 22-32). London: International Institute of Social and Economic Sciences. 05 29, 2017 tarihinde alındı
- Büberkökü, Ö. (2021). Risk-Getiri İlişkisinin Analizi: Türkiye Örneği. *Finans Ekonomi ve Sosyal Araştırmalar Dergisi*, 6(1), 14-38.
- Cai, C. X., Faff, R., Hillier, D., & Lhaopadchan, S. (2009). Information Transmission across Stock and Bond Markets. G. Gregoriou içinde, *Stock Market Volatility* (s. 293-310). Boca Raton, Florida: CRC Press.
- Calvet, L. E., & Fisher, A. J. (2008). *Multifractal Volatility: Theory, Forecasting, and Pricing*. Cambridge, Massachusetts: Academic Press.
- Campbell, J. Y., Lo, A. W., & MacKinlay, A. C. (1997). *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.
- Carr, P., & Wu, L. (2006). A Tale of Two Indices. *The Journal of Derivatives*, 13(3), 13-29.
- Carroll, R., & Kearney, C. (2009). GARCH Modeling of Stock Market Volatility. G. Gregoriou içinde, *Stock Market Volatility* (s. 71-90). Boca Raton, Florida: CRC Press.
- CBOE. (2023, 03 20). *Governance*. 04 11, 2023 tarihinde Cboe Global Markets: <https://www.cboe.com/indices/governance/> adresinden alındı
- CBOE/GVZ. (2023, 04 17). *Index Dashboard*. 04 17, 2023 tarihinde Cboe Global Markets: <https://www.cboe.com/us/indices/dashboard/gvz/> adresinden alındı
- CBOE/OVX. (2023, 04 17). *Index Dashboard*. 04 17, 2023 tarihinde Cboe Global Markets: <https://www.cboe.com/us/indices/dashboard/ovx/> adresinden alındı
- Ceylan, A., & Korkmaz, T. (2018). *İşletmelerde Finansal Yönetim* (16 b.). Bursa: Ekin Yayınevi.

- Chen, H. (2021). Analysis of Influencing Factors of Financial Market Volatility Based on Cluster Analysis. *Mobile Information Systems*, 1-13.
- Chen, W., Wei, Y., Lang, Q., Lin, Y., & Liu, M. (2014). Financial Market Volatility and Contagion Effect: A Copula-Multifractal Volatility Approach. *Physica A*, 398, 289-300.
- Christodoulakis, G. A., & Satchell, S. E. (2002). Correlated ARCH (CorrARCH): Modelling the Time-Varying Conditional Correlation between Financial Asset Returns. *European Journal of Operational Research*, 139(2), 351-370.
- Christoffersen, P. F., Diebold, F. X., Mariano, R. S., Tay, A. S., & Tse, Y. K. (2007). Direction-of-Change Forecasts Based on Conditional Variance, Skewness and Kurtosis Dynamics: International Evidence. *Journal of Financial Forecasting*, 1(2), 1-22.
- Chun, D., Cho, H., & Ryu, D. (2020). Economic Indicators and Stock Market Volatility in an Emerging Economy. *Economic Systems*, 44(2), 1-18.
- Cieslak, A., & Povala, P. (2016). Information in the Term Structure of Yield Curve Volatility. *The Journal of Finance*, 71(3), 1393-1436.
- Cipollini, A., & Manzini, A. (2007). Can the VIX Signal Market's Direction? An Asymmetric Dynamic Strategy. *SSRN Electronic Journal*, 1-23.
- Cochran, S. J., Mansur, I., & Odusami, B. (2019). Long Memory and Asymmetry in Commodity Returns and Risk: The Role of Term Spread. J. Chevallier, S. Goutte, D. Guerreiro, S. Saglio, & B. Sanhaji içinde, *Financial Mathematics, Volatility and Covariance Modelling* (s. 9-38). Oxford: Routledge.
- Cont, R. (2007). Volatility Clustering in Financial Markets: Empirical Facts and Agent-Based Models. *Long Memory in Economics*, 289-309.
- Corsi, F. (2009). A Simple Approximate Long-Memory Model of Realized Volatility. *Journal of Financial Econometrics*, 7(2), 174-196.
- Cox, J. C., & Rubinstein, M. (1985). *Options markets*. New Jersey: Prentice Hall.
- Cox, J. C., Ross, S. A., & Rubinstein, M. (1979). Option Pricing: A Simplified Approach. *Journal of Financial Economics*, 7(3), 229-263.
- Çelik, İ., Özdemir, A., Gürsoy, S., & Ünlü, H. U. (2018). Gelişmekte Olan Hisse Senedi Piyasaları ile Kıymetli Madenler Arasındaki Getiri ve Volatilite Yayılımı. *Ege Akademik Bakış*, 18(2), 217-230.
- Çelik, N., & Kaya, M. F. (2010). Uç Değerler Yöntemi ile Riske Maruz Değer'in Tahmini ve İstanbul Menkul Kıymetler Borsası Üzerine Bir Uygulama. *Bankacılık ve Sigortacılık Araştırmaları Dergisi*, 1(1), 19-32.
- Çevik, E. İ., & Sezen, S. (2020). Bankacılık Sektörü için Etkin Piyasalar Hipotezinin Uzun Hafıza Modelleri ile Analizi. *Yönetim ve Ekonomi Araştırmaları Dergisi*, 18(1), 332-351.

- Çevik, E., Terzioğlu, H. Ç., & Çevik, E. İ. (2021). Bitcoin ile Önemli Döviz Kurları Arasında Nedensellik İlişkisi. *Iğdır Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi*, 10(ICOMEF Özel Sayısı), 108-130.
- Davasligil Atmaca, V. (2018). BİST Şehir Endeksleri Oynaklığının DCC-GARCH Model İle Analizi. *Yönetim Bilimleri Dergisi*, 16(31), 287-308.
- Davidson, J. (2004). Moment and Memory Properties of Linear Conditional Heteroscedasticity Models, and a New Model. *Journal of Business & Economic Statistics*, 22(1), 16-29.
- De Pooter, M., & Van Dijk, D. (2004). *Testing for Changes in Volatility in Heteroskedastic Time Series - A Further Examination*. Rotterdam: Erasmus University Rotterdam, Econometric Institute Report, No. 2004-38.
- Demeterfi, K., Derman, E., Kamal, M., & Zou, J. (1999). *More Than You Ever Wanted to Know about Volatility Swaps*. New York: Goldman Sachs Quantitative Strategies Research Notes.
- Demir, İ., & Çene, E. (2012). İMKB 100 Endeksindeki Kaldıraç Etkisinin ARCH Modelleriyle İki Alt Dönemde İncelenmesi. *İstanbul Üniversitesi İşletme Fakültesi Dergisi*, 41(2), 214-226.
- Demireli, E., & Torun, E. (2010). Alternatif Piyasa Oynaklıklarında Meydana Gelen Kırılmaların ICSS Algoritmasıyla Belirlenmesi ve Sürengliğe Etkileri: Türkiye ve Londra Örneği. *Muhasebe ve Finansman Dergisi*(46), 129-145.
- Derman, E., & Miller, M. B. (2016). *The Volatility Smile*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons Inc.
- Diebold, F. X., & Nerlove, M. (1989). The Dynamics of Exchange Rate Volatility: A Multivariate Latent Factor ARCH Model. *Journal of Applied Econometrics*, 4(1), 1-21.
- Ding, D. (2011). *Modeling of Market Volatility with APARCH Model*. Uppsala: Uppsala University, Department of Mathematics, Project Report 2011:6.
- Ding, Z., Granger, C. W., & Engle, R. F. (1993). A Long Memory Property of Stock Market Returns and a New Model. *Journal of Empirical Finance*, 1(1), 83-106.
- Dowling, S., & Muthuswamy, J. (2003). The Implied Volatility of Australian Index Options. *SSRN Electronic Journal*, 14, 1-35.
- Dutta, A., Bouri, E., & Roubaud, D. (2019). Nonlinear Relationships amongst the Implied Volatilities of Crude Oil and Precious Metals. *Resources Policy*, 61, 473-478.
- Dutta, A., Nikkinen, J., & Rothovius, T. (2017). Impact of Oil Price Uncertainty on Middle East and African Stock Markets. *Energy*, 123, 189-197.
- Dzielinski, M., Rieger, M. O., & Talpsepp, T. (2011). Volatility Asymmetry, News, and Private Investors. G. Mitra, & L. Mitra içinde, *The Handbook of News Analytics in Finance* (s. 255-270). John Wiley & Sons Ltd: West Sussex.

- Ellis, C., & Sundmacher, M. (2009). The Economic Implications of Volatility Scaling by the Square-Root-of-Time Rule. G. Gregoriou içinde, *Stock Market Volatility* (s. 147-161). Boca Raton, Florida: CRC Press.
- Emeç, H., & Özdemir, M. O. (2014). Türkiye’de Döviz Kuru Oynaklığının Otor regresif Koşullu Değişen Varyans Modelleri ile İncelenmesi. *Finans Politik ve Ekonomik Yorumlar*, 51(596), 85-99.
- Enders, W. (2014). *Applied Econometric Time Series* (4 b.). John Wiley & Sons Inc.: Hoboken, New Jersey.
- Engle, R. (2002). Dynamic Conditional Correlation: A Simple Class of Multivariate Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity Models. *Journal of Business & Economic Statistics*, 20(3), 339-350.
- Engle, R. (2010). What is Happening with Financial Market Volatility and Why? R. Schwartz, J. Byrne, & A. Colaninno içinde, *Volatility: Risk and Uncertainty in Financial Markets* (s. 29-45). New York: Springer.
- Engle, R. F. (1982). Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Econometrica*, 50(4), 987-1007.
- Engle, R. F., & Bollerslev, T. (1986). Modelling the Persistence of Conditional Variances. *Econometric Reviews*, 5(1), 1-50.
- Engle, R. F., & Kroner, K. F. (1995). Multivariate Simultaneous Generalized ARCH. *Econometric Theory*, 11(1), 122-150.
- Engle, R. F., & Ng, V. K. (1993). Measuring and Testing the Impact of News on Volatility. *The Journal of Finance*, 48(5), 1749-1778.
- Engle, R. F., & Patton, A. J. (2001). What Good is a Volatility Model? *Quantitative Finance*, 1(2), 237-245.
- Engle, R. F., & Rangel, J. G. (2008). The Spline-GARCH Model for Low Frequency Volatility and Its Global Macroeconomic Causes. *The Review of Financial Studies*, 21(3), 1187-1222.
- Engle, R. F., Granger, C. W., & Kraft, D. (1984). Combining Competing Forecasts of Inflation Using a Bivariate ARCH Model. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 8(2), 151-165.
- Engle, R. F., Ito, T., & Lin, W.-L. (1990). Meteor Showers or Heat Waves? Heteroskedastic Intra-Daily Volatility in the Foreign Exchange Market. *Econometrica*, 58(3), 525-542.
- Engle, R. F., Lilien, D. M., & Robins, R. P. (1987). Estimating Time Varying Risk Premia in the Term Structure: The ARCH-M Model. *Econometrica*, 55(2), 391-407.
- Erdoğan, H., & Baykut, E. (2016). BIST Banka Endeksi’nin (XBANK) VIX ve MOVE Endeksleri ile İlişkinin Analizi. *Bankacılar Dergisi*(98), 57-72.

- Erer, E., Dumlu Kırkpınar, A., & Erer, D. (2016). Türkiye Cumhuriyet Merkez Bankası Para Politikasının Gecelik Repo Faiz Oranlarının Oynaklığı Üzerindeki Etkisi. *İktisat Politikası Araştırmaları Dergisi*, 3(1), 37-54.
- Erer, E., Erer, D., & Korkmaz, Ö. (2019). Farklı Rejimler Altında Türkiye, İngiltere, Amerika ve Euro Bölgesi Tahvil Piyasaları, Emtia Piyasası ve Döviz Piyasasından BIST100 Endeksine Volatilite Yayılımı. *BDDK Bankacılık ve Finansal Piyasalar Dergisi*, 13(1), 77-103.
- Ertuğrul, M. (2019). Kripto Paraların Volatilite Dinamiklerinin İncelenmesi: GARCH Modelleri Üzerine Bir Uygulama. *Yönetim ve Ekonomi Araştırmaları Dergisi*, 17(4), 59-71.
- Eyüboğlu, K., & Eyüboğlu, S. (2022). Bist Ana Sektör Endekslerinde Zayıf Formda Etkinliğin Yapısal Kırılmalı Uzun Hafıza Modelleri ile Analizi. *Abant Sosyal Bilimler Dergisi*, 22(2), 702-720.
- Fama, E. F. (1965). The Behavior of Stock-Market Prices. *Journal of Business*, 38(1), 34-105.
- Fassas, A. P., & Siriopoulos, C. (2021). Implied Volatility Indices - A Review. *The Quarterly Review of Economics and Finance*, 79, 303-329.
- Fernandes, M., Medeiros, M. C., & Scharth, M. (2014). Modeling and Predicting the CBOE Market Volatility Index. *Journal of Banking & Finance*, 40, 1-10.
- Fleming, J., Ostdieck, B., & Whaley, R. E. (1995). Predicting Stock Market Volatility: A New Measure. *The Journal of Futures Markets*, 15(3), 265-302.
- Fontanills, G. A., & Gentile, T. (2002). *The Volatility Course Workbook: Step-by-Step Exercises to Help You Master the Volatility Course*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons Inc.
- Fouque, J.-P., Papanicolaou, G., & Sircar, K. R. (2000). Mean-Reverting Stochastic Volatility. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 3(1), 101-142.
- Fung, W. K., & Hsieh, D. A. (1991). Empirical Analysis of Implied Volatility: Stock, Bonds and Currencies. *Working Paper*, Duke University.
- Füss, R., Mager, F., Wohlenberg, H., & Zhao, L. (2011). The Impact of Macroeconomic Announcements on Implied Volatility. *Applied Financial Economics*, 21(21), 1571-1580.
- Gallant, A. R., Hsieh, D. A., & Tauchen, G. E. (1991). On Fitting a Recalcitrant Series: The Pound/Dollar Exchange Rate 1974-83. W. Barnett, J. Powell, & G. Tauchen içinde, *Nonparametric and Semiparametric Methods in Econometrics and Statistics: Proceedings of the Fifth International Symposium in Economic Theory and Econometrics* (s. 199-240). New York: Cambridge University Press.
- Garman, M. B., & Kohlhagen, S. W. (1983). Foreign Currency Option Values. *Journal of International Money and Finance*, 2(3), 231-237.

- Garner, C., & Brittain, P. (2009). *Commodity Options: Trading and Hedging Volatility in the World's Most Lucrative Market*. Upper Saddle River, New Jersey: FT Press.
- Gastineau, G. L. (1977). An Index of Listed Option Premiums. *Financial Analysts Journal*, 33(3), 70-75.
- Gatheral, J. (2006). *The Volatility Surface: A Practitioner's Guide*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons Inc.
- Gebka, B. (2009). Do Tigers Care about Dragons? Spillovers in Returns and Volatility between Chinese Stock Markets. G. Gregoriou içinde, *Stock Market Volatility* (s. 457-481). Boca Raton, Florida: CRC Press.
- Giannopoulos, K. (2000). Measuring Volatility. M. Lore, & L. Borodovsky içinde, *The Professional's Handbook of Financial Risk Management* (s. 42-74). Jordan Hill, Oxford: Butterworth-Heinemann.
- Glosten, L. R., Jagannathan, R., & Runkle, D. E. (1993). On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks. *The Journal of Finance*, 48(5), 1779-1801.
- Gök, İ. Y., & Kalaycı, Ş. (2015). Endeks Futures Piyasalar Arasında Uluslararası Etkileşimler: Türkiye ve ABD Piyasaları Üzerinde Sıcak Dalga ve Meteor Yağmuru Hipotezlerinin Sınanması. *Business and Economics Research Journal*, 6(4), 39-53.
- Granger, C. W., & Joyeux, R. (1980). An Introduction to Long-Memory Time Series Models and Fractional Differencing. *Journal of Time Series Analysis*, 1(1), 15-29.
- Gunn, M. (2009). *Trading Regime Analysis: The Probability of Volatility*. West Sussex: John Wiley & Sons Ltd.
- Güleç, T. C., & Aktaş, H. (2019). Kripto Para Birimi Piyasalarında Etkinliğin Uzun Hafıza ve Değişen Varyans Özelliklerinin Testi Yoluyla Analizi. *Eskişehir Osmangazi Üniversitesi İİBF Dergisi*, 14(2), 491-510.
- Hacıhasanoğlu, E. (2003). *Menkul Kıymet Piyasalarında Volatilitenin Modellenmesi: İstanbul Menkul Kıymetler Borsası için Bir Deneme*. Ankara: Sermaye Piyasası Kurulu.
- Hamzaçebi, C., & Kutay, F. (2004). Yapay Sinir Ağları ile Türkiye Elektrik Enerjisi Tüketiminin 2010 Yılına Kadar Tahmini. *Gazi Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi Dergisi*, 19(3), 227-233.
- Harvey, A. C. (2007). Long Memory in Stochastic Volatility. J. Knight, & S. Satchell içinde, *Forecasting Volatility in the Financial Markets* (s. 351-363). Jordan Hill, Oxford: Butterworth-Heinemann.
- Harvey, A., Ruiz, E., & Shephard, N. (2005). Multivariate Stochastic Variance Models. N. Shephard içinde, *Stochastic Volatility: Selected Readings* (s. 156-176). Oxford: Oxford University Press.
- Hepsağ, A., & Yaşar Akçalı, B. (2016). Analysis of Volatility Spillovers between the Bank Stocks Traded in Istanbul Stock Exchange and New York Stock



- Exchange. *Eurasian Econometrics, Statistics & Empirical Economics Journal*, 1, 54-72.
- Hilpisch, Y. J. (2016). *Listed Volatility and Variance Derivatives: A Python-based Guide*. West Sussex: John Wiley & Sons Ltd.
- Hosking, J. R. (1981). Fractional Differencing. *Biometrika*, 68, 165-176.
- Hull, J. C. (2012). *Options, Futures, and Other Derivatives: Global Edition* (8 b.). Harlow, Essex: Pearson Education Limited.
- Hurst, H. E. (1951). Long-Term Storage Capacity of Reservoirs. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 116(1), 770-799.
- Hwang, S., & Satchell, S. E. (2007). Implied Volatility Forecasting: A Comparison of Different Procedures Including Fractionally Integrated Models with Applications to UK Equity Options. J. Knight, & S. Satchell içinde, *Forecasting Volatility in the Financial Markets* (s. 249-277). Jordan Hill, Oxford: Butterworth-Heinemann.
- İmre, S. (2021). Bitcoin ve Euro Arasındaki Volatilite Etkileşiminin Analizi. *Uluslararası Ekonomik Araştırmalar Dergisi*, 7(4), 1-13.
- Inclán, C., & Tiao, G. C. (1994). Use of Cumulative Sums of Squares for Retrospective Detection of Changes of Variance. *Journal of the American Statistical Association*, 89(427), 913-923.
- Iqbal, A. S. (2018). *Volatility: Practical Options Theory*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons Inc.
- Itkin, A. (2020). *Fitting Local Volatility: Analytic and Numerical Approaches in Black-Scholes and Local Variance Gamma Models*. Toh Tuck, Singapur: World Scientific.
- Javaheri, A. (2015). *Inside Volatility Filtering: Secrets of the Skew* (2 b.). Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons Inc.
- Jiang, G. J. (2007). Stochastic Volatility and Option Pricing. J. Knight, & S. Satchell içinde, *Forecasting Volatility in the Financial Markets* (s. 131-171). Jordan Hill, Oxford: Butterworth-Heinemann.
- Jiang, G. J., & Tian, Y. S. (2007). Extracting Model-Free Volatility from Option Prices: An Examination of the VIX Index. *The Journal of Derivatives*, 14(3), 35-60.
- Kacppel, J. (2002). *The Option Trader's Guide to Probability, Volatility, and Timing*. New York: John Wiley & Sons Inc.
- Kalotychou, E., & Staikouras, S. K. (2009). An Overview of the Issues Surrounding Stock Market Volatility. G. Gregoriou içinde, *Stock Market Volatility* (s. 3-30). Boca Raton, Florida: CRC Press.
- Kanas, A. (2012). Modelling the Risk-Return Relation for the S&P 100: The Role of VIX. *Economic Modelling*, 29(3), 795-809.

- Karabiyik, L., & Anbar, A. (2007). Volatilite ve Varyans Swapları. *Muhasebe ve Finansman Dergisi*(35), 62-77.
- Karali, B., & Power, G. J. (2013). Short-and Long-Run Determinants of Commodity Price Volatility. *American Journal of Agricultural Economics*, 95(3), 724-738.
- Kayalidere, K. (2013). *Volatilite Tahmin Modelleri ve Performanslarının Ölçümü: Hisse Senedi Piyasalarında Bir Uygulama*. Ankara: Gazi Kitabevi.
- Kaynar, O., & Taştan, S. (2009). Zaman Serisi Analizinde MLP Yapay Sinir Ağları ve ARIMA Modelinin Karşılaştırılması. *Erciyes Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi*, 33, 161-172.
- Kayral, İ. E. (2020). En Yüksek Piyasa Değerine Sahip Üç Kripto Paranın Volatilitelerinin Tahmin Edilmesi. *Finansal Araştırmalar ve Çalışmalar Dergisi*, 12(22), 152-168.
- Kendirli, S., & Karadeniz, G. (2012). 2008 Kriz Sonrası İMKB 30 Endeksi Volatilitelerinin Genelleştirilmiş ARCH Modeli ile Tahmini. *Kabramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi*, 2(2), 95-104.
- Kim, T.-H., & White, H. (2004). On More Robust Estimation of Skewness and Kurtosis. *Finance Research Letters*, 1(1), 56-73.
- Korkmaz, T., & Bostancı, A. (2011). RMD Hesaplamalarında Volatilite Tahminleme Modellerinin Karşılaştırılması ve Basel II Yaklaşımına Göre Geriye Dönük Test Edilmesi: İMKB 100 Endeksi Uygulaması. *Business and Economics Research Journal*, 2(3), 1-17.
- Koutmos, G. (1996). Modeling the Dynamic Interdependence of Major European Stock Markets. *Journal of Business Finance & Accounting*, 23(7), 975-988.
- Koutmos, G., & Booth, G. G. (1995). Asymmetric Volatility Transmission in International Stock Markets. *Journal of International Money and Finance*, 14(6), 747-762.
- Koy, A., & Ekim, S. (2016). Borsa İstanbul Sektör Endekslerinin Volatilite Modellemesi. *Trakya Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi*, 5(2), 1-23.
- Kömm, H. (2016). *Forecasting High-Frequency Volatility Shocks: An Analytical Real-Time Monitoring System*. New York: Springer.
- Körs, M. (2021). *Finansal Piyasalarda Volatilite Tahmini: Midas Regresyon Yöntemiyle Bir Uygulama*. Ankara: Hacettepe Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Yayınlanmamış Doktora Tezi.
- Kraft, D. F., & Engle, R. F. (1982). *Autoregressive Conditional Heteroskedasticity in Multiple Time Series*. San Diego: Department of Economics, University of California, Unpublished manuscript.
- Kumar, S. S. (2012). A First Look at the Properties of India's Volatility Index. *International Journal of Emerging Markets*, 7(2), 160-176.

- Kwok, Y. K., & Zheng, W. (2022). *Pricing Models of Volatility Products and Exotic Variance Derivatives*. Boca Raton, Florida: CRC Press.
- Latane, H. A., & Rendleman, R. J. (1976). Standard Deviations of Stock Price Ratios Implied in Option Prices. *The Journal of Finance*, 31(2), 369-381.
- Lehman, R., & McMillan, L. G. (2011). *Options for Volatile Markets: Managing Volatility and Protecting Against Catastrophic Risk* (2 b.). Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons Inc.
- Lcón, Á., Rubio, G., & Serna, G. (2005). Autoregressive Conditional Volatility, Skewness and Kurtosis. *The Quarterly Review of Economics and Finance*, 45, 599-618.
- Lin, B., & Su, T. (2020). The Linkages between Oil Market Uncertainty and Islamic Stock Markets: Evidence from Quantile-on-Quantile Approach. *Energy Economics*, 88, 1-10.
- Liu, M.-L., Ji, Q., & Fan, Y. (2013). How does Oil Market Uncertainty Interact with Other Markets? An Empirical Analysis of Implied Volatility Index. *Energy*, 55, 860-868.
- Lopez, J. A. (2001). Evaluating the Predictive Accuracy of Volatility Models. *Journal of Forecasting*, 20(2), 87-109.
- Luo, Y., & Huang, Y. (2018). Long Memory or Structural Break? Empirical Evidences from Index Volatility in Stock Market. *China Finance Review International*, 9(3), 324-337.
- Majmudar, U., & Banerjee, A. (2004). VIX Forecasting. *In The 40th Annual Conference of the Indian Econometrics Society*, 1-23.
- Manda, K. (2010). Stock Market Volatility during the 2008 Financial Crisis. *The Leonard N. Stern School of Business Glucksman Institute for Research in Securities Markets*, 1-32.
- Mandelbrot, B. (1963). The Variation of Certain Speculative Prices. *The Journal of Business*, 36(4), 394-419.
- Markellos, R. N., & Psychoyios, D. (2018). Interest Rate Volatility and Risk Management: Evidence from CBOE Treasury Options. *The Quarterly Review of Economics and Finance*, 68, 190-202.
- Mazıbaş, M. (2005). İMKB Piyasalarındaki Volatilitenin Modellenmesi ve Öngörülmesi: Asimetrik GARCH Modelleri ile Bir Uygulama. *Bankacılık Düzenleme ve Denetleme Kurumu (BDDK)*, 1-29.
- McAleer, M., & Medeiros, M. C. (2008). A Multiple Regime Smooth Transition Heterogeneous Autoregressive Model for Long Memory and Asymmetries. *Journal of Econometrics*, 147(1), 104-119.
- McMillan, D., Speight, A., & Apgwilym, O. (2000). Forecasting UK Stock Market Volatility. *Applied Financial Economics*, 10(4), 435-448.

- Mele, A., Obayashi, Y., & Shalen, C. (2015). Rate Fears Gauges and the Dynamics of Fixed Income and Equity Volatilities. *Journal of Banking & Finance*, 52, 256-265.
- Merton, R. C. (1973). Theory of Rational Option Pricing. *The Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, 141-183.
- Mills, T. C., & Markellos, R. N. (2008). *The Econometric Modelling of Financial Time Series*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Mishra, P., & Debasish, S. S. (2020). Exploring Relationship between Stock Market Indices and India Volatility Index Using Econometric Analysis. *International Journal of Management*, 11(12), 919-930.
- Mostafa, F., Dillon, T., & Chang, E. (2017). *Computational Intelligence Applications to Option Pricing, Volatility Forecasting and Value at Risk*. New York: Springer.
- Natenberg, S. (2012). *Basic Option Volatility Strategies: Understanding Popular Pricing Models*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons Inc.
- Natenberg, S. (2014). *Option Volatility and Pricing: Advanced Trading Strategies and Techniques* (2 b.). New York: McGraw-Hill Education.
- Nelson, D. B. (1991). Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 59(2), 347-370.
- Newey, W. K., & West, K. D. (1994). Automatic Lag Selection in Covariance Matrix Estimation. *The Review of Economic Studies*, 61(4), 631-653.
- Oduncu, A., Ermişoğlu, E., & Akçelik, Y. (2013). Merkez Bankasının Yeni Enstrümanı Rezerv Opsiyonu Mekanizması ve Kur Oynaklığı. *Bankacılar Dergisi*(86), 43-52.
- Ozair, M. (2014). What does the VIX Actually Measure? An Analysis of the Causation of SPX and VIX. *ACRN Journal of Finance and Risk Perspectives*, 3(2), 83-132.
- Önder, E., & Hasgül, Ö. (2009). Yabancı Ziyaretçi Sayısının Tahmininde Box-Jenkins Modeli, Winters Yöntemi ve Yapay Sinir Ağlarıyla Zaman Serisi Analizi. *Istanbul University, Business Economy Institute Journal of Management*, 62, 62-83.
- Pabuçcu, H., & Değirmenci, N. (2018). Volatilitenin Modellenmesi ve ANFIS Model ile BIST100 Getiri Tahmini. *Adam Academy Journal of Social Sciences*, 8(2), 325-345.
- Parkinson, M. (1980). The Extreme Value Method for Estimating the Variance of the Rate of Return. *The Journal of Business*, 53(1), 61-65.
- Passarelli, D. (2012). *Trading Options Greeks: How Time, Volatility, and Other Pricing Factors Drive Profits* (2 b.). Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons Inc.
- Pathak, J., & Deb, S. G. (2020). Stylized Patterns in Implied Volatility Indices and Stock Market Returns: A Cross Country Analysis across Developed and Emerging Markets. *Cogent Economics & Finance*, 8(1), 1-24.

- Polat, M., & Kılıç, E. (2022). BRICS Ülkelerinde Döviz Kuru ve Borsa Arasındaki Getiri ve Volatilite Etkileşimi: VAR-EGARCH Modeli ile Bir Uygulama. *Pamukkale Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*(49), 539-551.
- Poon, S.-H. (2005). *A Practical Guide to Forecasting Financial Market Volatility*. London: John Wiley & Sons Inc.
- Poon, S.-H., & Granger, C. W. (2003). Forecasting Volatility in Financial Markets: A Review. *Journal of Economic Literature*, 41(2), 478-539.
- Poon, S.-H., & Granger, C. W. (2005). Practical Issues in Forecasting Volatility. *Financial Analysts Journal*, 61(1), 45-56.
- Psychoyios, D., Dotsis, G., & Markellos, R. N. (2006). *Does the VIX Jump? Implications for Pricing and Hedging Volatility Risk*. Atina: Athens University of Economics and Business, Working Paper.
- Rachev, S. T., Mittnik, S., Fabozzi, F. J., Focardi, S. M., & Jašić, T. (2007). *Financial Econometrics: From Basics to Advanced Modeling Techniques*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons.
- Redhead, K. (1997). *Financial Derivatives: An Introduction to Futures, Forwards, Options and Swaps*. London: Prentice Hall.
- Sadeghzadeh, K. (2018). Borsanın Psikolojik Faktörlere Duyarlılığı: Oynaklık Endeksi (VIX) ve Tüketici Güven Endeksi (TGE) ile BIST 100 Endeksi Arasındaki İlişkiler. *Cumhuriyet Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Dergisi*, 19(2), 238-253.
- Sadorsky, P. (2021). Predicting Gold and Silver Price Direction Using Tree-Based Classifiers. *Journal of Risk and Financial Management*, 14(5), 1-21.
- Sansó, A., Aragó, V., & Carrion, J. L. (2004). Testing for Changes in the Unconditional Variance of Financial Time Series. *Revista de Economía Financiera*, 4, 32-53.
- Sayın, S., Doğru, E., & Gürsoy, S. (2020). Dolar Kuru ile Seçili BIST Şehir Endeksleri Arasında Getiri ve Volatilite Yayılmı: Çok Değişkenli VAR-EGARCH Uygulaması. *Van Yüzcüncü Yıl Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*(49), 441-466.
- Shahzad, S. J., Ferrer, R., Ballester, L., & Umar, Z. (2017). Risk Transmission between Islamic and Conventional Stock Markets: A Return and Volatility Spillover Analysis. *International Review of Financial Analysis*, 52, 9-26.
- Shephard, N. (2005). General Introduction. N. Shephard içinde, *Stochastic Volatility: Selected Readings* (s. 1-33). Oxford: Oxford University Press.
- Shover, L. (2012). *Trading Options in Turbulent Markets: Master Uncertainty Through Active Volatility Management* (2 b.). Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons Inc.
- Sinclair, E. (2013). *Volatility Trading* (2 b.). Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons Inc.

- Singh, V. K., Nishant, S., & Kumar, P. (2018). Dynamic and Directional Network Connectedness of Crude Oil and Currencies: Evidence from Implied Volatility. *Energy Economics*, 76, 48-63.
- Siriopoulos, C., & Fassas, A. (2012). An Investor Sentiment Barometer — Greek Implied Volatility. *Global Finance Journal*, 23(2), 77-93.
- Söylemez, Y. (2020). Genelleştirilmiş Otoregresif Koşullu Değişen Varyans Modelleri ile Bitcoin Volatilitésinin Analizi. *İşletme Araştırmaları Dergisi*, 12(2), 1322-1333.
- Taylor, S. J. (1986). *Modelling Financial Time Series*. Chichester, West Sussex: John Wiley & Sons Ltd.
- Thupayagale, P. (2011). Long Memory in the Volatility of an Emerging Fixed-Income Market: Evidence from South Africa. *South African Journal of Economics*, 79(3), 290-300.
- Tsay, R. S. (2005). *Analysis of Financial Time Series* (2 b.). Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons Inc.
- Tse, Y. K. (1998). The Conditional Heteroscedasticity of the Yen-Dollar Exchange Rates. *Journal of Applied Econometrics*, 13, 49-55.
- Tse, Y. K. (2000). A Test for Constant Correlations in a Multivariate GARCH Model. *Journal of Econometrics*, 98(1), 107-127.
- Tse, Y. K., & Tsui, A. K. (2002). A Multivariate Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity Model With Time-Varying Correlations. *Journal of Business & Economic Statistics*, 20(3), 351-362.
- Türkyılmaz, S., & Balıbcı, M. (2014). Türkiye Hisse Senedi Piyasası Oynaklığındaki Asimetrik Uzun Hafıza Özelliği. *Bankacılık ve Finansal Araştırmalar Dergisi*, 1(1), 1-10.
- Ural, M., & Adakale, T. (2009). Beklenen Kayıp Yöntemi ile Riske Maruz Değer Analizi. *Akdeniz İ.İ.B.F. Dergisi*, 9(17), 23-39.
- Verbeek, M. (2017). *A Guide to Modern Econometrics* (6 b.). Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons.
- Wang, H. (2019). VIX and Volatility Forecasting: A New Insight. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 533, 1-7.
- Whaley, R. E. (1993). Derivatives on Market Volatility: Hedging Tools Long Overdue. *The Journal of Derivatives*, 1(1), 71-84.
- Whaley, R. E. (2000). The Investor Fear Gauge. *The Journal of Portfolio Management*, 26(3), 12-17.
- Whaley, R. E. (2009). Understanding the VIX. *The Journal of Portfolio Management*, 35(3), 98-105.
- White, H., Kim, T.-H., & Manganelli, S. (2010). Modeling Autoregressive Conditional Skewness and Kurtosis with Multi-Quantile CAViaR. T. Bollerslev, J. Russell, & M. Watson içinde, *Volatility and Time Series*

- Econometrics: Essays in Honor of Robert F. Engle* (s. 231-256). Oxford: Oxford University Press.
- Xiao, L., & Aydemir, A. (2007). Volatility Modelling and Forecasting in Finance. J. Knight, & S. Satchell içinde, *Forecasting Volatility in the Financial Markets* (s. 1-45). Jordan Hill, Oxford: Butterworth-Heinemann.
- Yalçın, Y. (2007). Stokastik Oynaklık Modeli ile İstanbul Menkul Kıymetler Borsasında Kaldıraç Etkisinin İncelenmesi. *Dokuz Eylül Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi*, 22(2), 357-365.
- Yang, D., & Zhang, Q. (2000). Drift-Independent Volatility Estimation Based on High, Low, Open, and Close Prices. *The Journal of Business*, 73(3), 477-492.
- Yıldırım, H. (2019). The Long-Term Relationship of Fear Index with Dollar Index, DAX Volatility Index and Crude Oil Prices: ARDL Bond Test. T. Çürük içinde, *Economics and Administrative* (s. 47-58). Ankara: Akademisyen Kitabevi.
- Yıldırım, H., & Çolakyan, A. (2014). Finansal Yatırım Araçlarında Riske Maruz Değer Uygulaması. *Dokuz Eylül Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi*, 29(1), 1-24.
- Yıldız, B., & Dam, M. M. (2022). Erken Dönem Covid-19 Pandemisinin Avrupa Borsalarındaki Volatiliteye Etkisinin Araştırılması. *Cumhuriyet Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Dergisi*, 23(1), 167-182.
- Zakoian, J.-M. (1994). Threshold Heteroskedastic Models. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 18(5), 931-955.
- Zhou, S., Wang, H., Lai, K. K., & Yen, J. (2013). *Volatility Surface and Term Structure: High-Profit Options Trading Strategies*. Oxford: Routledge.
- Zhou, Y. (2014). Modeling the Joint Dynamics of Risk-Neutral Stock Index and Bond Yield Volatilities. *Journal of Banking & Finance*, 38, 216-228.

# Volatilite Tahmini ve Zımnı Volatilite

Dr. Enes Yıldız • Doç. Dr. Müslüm Polat

 ÖZGÜR  
YAYINLARI

