Bölüm 4

Matematiksel Modelleme Sürecinde Epistemik Eylemlerin İşe Koşulması

Rümeysa Beyazhançer[1]

Barış Demir[2]

Ayşe Arzu Arı[3]

Özet

1960'lı yıllardan bu yana matematiksel modellemenin ne olduğu, hangi perspektiflerden değerlendirilmesi gerektiği, amaç olarak mı yoksa araç olarak mı kullanılacağı ve hepsinden önemlisi de nasıl öğretilmesi gerektiği konularında çalışmalar yapılmaktadır. Matematiksel modelleme eğitimi, öğrencilere matematik becerilerini gerçek dünya problemlerini çözmek için kullanma yeteneği kazandırmayı amaçlamaktadır. Ancak, matematiksel modelleme eğitimi konusunda farklı yaklaşımlar ve görüşler bulunmakta ve bu konuda ortak bir anlayış oluşturmak bazen zor olabilmektedir. Bu çalışma, matematiksel modelleme süreçleriyle oluşturulan matematiksel bilginin nasıl soyutlandığını ortaya çıkarmak üzere geliştirilen yeni bir model sunmaktır. Bu amaçla matematiksel modelleme etkinlikleri ortamında yürütülen matematik eğitimi sürecinin analizinde teorik ve yöntemsel bir model olan RBC+C Model'inin işe koşulmasını sağlayan bir model önerilmiştir. Matematiksel soyutlamaların yer aldığı deneysel modelleme ortamında epistemik eylemlerin varlığının görülebileceği ve dolayısıyla bu durumun oluşturulması beklenen modelin soyutlanıp soyutlanmadığını anlamaya yardımcı olacağı öngörülmektedir. Modelleme süreç basamaklarından bu çalışmada genel hatlarıyla ele alınan dördünün epistemik eylem basamaklarının dördüne etki ve zaman büyüklüğü göz ardı edilerek karşılık geldiği belirlenmiştir. Bu durumda, RBC+C Model'inin, modelleme sürecinde oluşturulan matematiksel bilginin analizinde "tanılama aracı" ya da "açıklayıcı araç" olarak kullanılabileceği sonucu ortaya çıkmaktadır. Matematiksel modelleme

1 Dr., Bursa Uludağ Üniversitesi, rumeysahan@hotmail.com, ORCID ID: 0000-0001-5061-8835

2 Dr., Kocaeli Üniversitesi, baris.demir@kocaeli.edu.tr, ORCID ID:0000-0001-6997-6413

3 Dr., Kocaeli Üniversitesi, abural@kocaeli.edu.tr, ORCID ID: 0000-0002-0907-2663

https://doi.org/10.58830/ozgur.pub238.c998

eğitim alanı dışında çeşitli alanlarda kullanıldığı gibi, geliştirilen bu model, eğitimde de modelleme ve soyutlama içeren etkinlikler aracılığıyla öğrencilerin matematiksel düşünme becerilerini geliştirmelerine yardımcı olmak için kullanılabilir.

Giriş

Son yıllarda yapılan ICME (International Congresses on Mathematical Education) ve ICTMA (International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications) gibi matematik eğitiminde önemli olan uluslararası kongrelerde matematiksel modelleme üzerine özellikle modelleme yeterlikleri sınıf içinde modelleme ve öğretmen eğitimi üzerine oldukça fazla araştırmanının yapıldığı gözlemlenmektedir (Lesh ve Fennewald, 2010; Niss, Blum ve Galbright, 2007). Modellemenin matematiksel öğrenmedeki rolünün yanı sıra modelleme bilgisinin nasıl elde edildiğiyle ilgili de çeşitli çalışmalar mevcuttur. Ayrıca modelleme döngüsündeki basamakların analizine vurgu yapan (Borromeo,2006; Blomhoj ve Jensen, 2006) çalışmalar da bulunmaktadır. Fakat burada modelleme süreçleriyle oluşan matematiksel bilginin nasıl oluştuğunu anlamaya yardımcı olan çalışmaların azlığı göze çarpmaktadır.

Modellemede gerçek yaşam durumundan matematiksel modele geçişteki karmaşıklığa ilişkin çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Borromeo (2006) bu karmaşayla ilgili dört yaklaşımı ön plana çıkarmıştır:

(1) Durum ile gerçek model arasındaki zihinsel temsilin farkı

(2) Zihinsel temsil ile gerçek modelin karıştırılması

(3) Zihinsel temsil ile gerçek model arasında farkın olmaması

(4) Zihinsel temsil ya da gerçek model ayırt etmeden gerçek durumdan matematiksel modellemeye geçiş yapılması.

Modelleme döngüsünde ana fark aşamaları tanımlamaktır. Gerçek durumdan matematiksel modellemeye geçişte öğrencilerin farklı zorluklar yaşadıkları belirlenmiştir. Bu zorluklar genelde durumun ve bağlamın çeşidine göre değişmektedir (Busse, 2005). Bir araştırmada modelleme döngüsündeki yapı, biçim ve aşamalar, modelleme sürecini temsil etmek için seçilen etkinliğin içinde bulunduğu bağlam ve problemin karmaşıklığıyla anlam kazanır. Borromeo (2006)' ya göre problem durumuna bağlı olarak kurulan zihinsel temsiler ile bireylerin bilişsel süreçleri oldukça önemlidir. Bu aşama, bireyin etkinliği okumaya başlamasından itibaren sahip olduğu zihinsel imaj ile o etkinliği anlaması sırasında yaşadığı geçişi temsil ettiği için çok önemlidir. Bu çalışmada ise, modelleme sürecinde öğrencilerin matematiksel bilgiyi nasıl oluşturduğunu anlamaya önem verilmiştir.

Matematiksel bilginin oluşma sürecinde matematiksel modelleme ve bağlamdan soyutlamanın birlikte kullanılması sürecin analizinde önem arz etmektedir (Ortiz, Lorca ve Soto, 2018). Sınıf ortamında öğrencilerin verilen etkinlik üzerine tartışmaları, matematiksel bir model oluştururken Bağlamdan Soyutlama adı verilen teorik ve metodolojik çerçevenin unsurları olan epistemik eylemler ile süreç analiz edilebileceği ve matematiksel bir modelin oluşturulmasında epistemik eylemlerin süreci nasıl desteklediği bu çalışmada tartışılacaktır. Bu kapsamda modelleme bilgisinin oluşturulma sürecinde akla gelen temel sorular: "Öğrenciler modelleme etkinliklerini yaparken ortaya çıkan fırsatları nasıl kullanıyorlar ve nasıl planlıyorlar?" "Öğrencilerin akıl yürütme yollarına matematiksel modelleme etkinlikleri etki eder mi?", "Öğrenciler karmaşık modelleme etkinliklerinde içerdiği matematik dışında neler öğrenmektedir?" biçiminde olabilir. Bu tarz sorular modelleme süreçlerinin epistemolojik doğasına bakmaktadır. Modelleme etkinlikleri üzerinde çalışılarak elde edilen zihinsel yapılar üzerine odaklanıldığında "Matematiksel modelleme bilgisi nasıl inşa edilir?" temel sorusuna çözüm üretmesi beklenebilir.

Matematiksel modelleme ile bağlamdan soyutlama arasındaki tutarlılık şu şekilde görülebilir; bağlamdan soyutlama, eski matematiksel yapıların dikey olarak yeniden organize edilmesiyle matematiksel olarak oluşturulması iken (Tabach vd., 2014); modelleme, belirlenen fenomenle etkileşerek ve deney yapılarak anlamlı matematiksel modeller geliştirmeyi hedefler (Doer ve Tripp, 2000). Sözü edilen matematiksel yapılar; yeterli matematiksel bilginin yorumlanması ve seçilmesini içeren döngüsel süreçlerin kademeli olarak yapılandırılması ve anlamlı olarak organize edilmesidir. Buna ek olarak genellenebilen modeller geliştirmek, bireyin başlangıç problemini çözmesiyle başlayarak yeni yapıları geliştirmesini ve keşfetmesini sağlar.

Matematikte soyutlama, bir matematiksel kavram veya genelleme, örneklerden bağımsız olarak zihinsel bir nesne haline gelme sürecidir. Bu soyutlama süreci, (Altun, 2019) deneysel soyutlama ve bilişsel soyutlama olmak üzere iki ana türde incelenebilir (Hershkowitz, Schwarz ve Dreyfus, 2001). Deneysel soyutlama, farklı durumların gözlenerek bu durumların ortak özelliklerinin fark edilmesi ve bu ortak özelliğin bağımsız bir nesne olarak zihinde oluşturulması sürecini ifade eder. Örnek olarak, "2" sayısının farklı nesne kümelerindeki ikişer öğenin ortaklığını temsil ettiği gözlemlenir. Bu nedenle "2," gözlenen nesnelerin denk olduğunu anlatan bir zihinsel şema olarak zihinde canlanır ve çokluk kavramını temsil eder. Buna karşılık, bilişsel soyutlama, deneysel soyutlama ile başlayan bir kavramın, yeni özelliklerin keşfedilmesiyle anlamının daraltılması, genişletilmesi veya daha ileri bir seviyeye taşınması sürecini ifade eder. Örneğin, "2" sayısının bilişsel soyutlaması zaman içinde 2'nin çift sayı, asal sayı, asal ve çift olan tek sayı, sayı sisteminde taban olarak kullanılabilir ve her doğal sayının 2'nin kuvvetlerinin toplamı olarak ifade edilebilir gibi yeni özellikleri içerebilir. Bu sayede "2," zihinsel olarak daha zengin bir kavrama dönüşür. Bu şekilde oluşan kavramsal gelişme süreci, modelleme ile tam bir uyum içerisindedir (Altun, 2020).

Halverschield (2008)' a göre epistemik eylemlerin doğası ile deneysel modelleme çalışmalarını kapsayan bir matematik eğitimi teorisi bulunmamaktadır. Bunun yanında matematik öğreniminde matematiksel modelleme için teorik çerçeveler olduğu gibi epistemolojik teoriler bulunmaktadır. Fakat bu çalışmada cevap aranan problem cümleleri için matematiksel modelleme ve epistemoloji alanlarını birbirine bağlayan belirli bir teorik çerçeve yoktur. Söz konusu problem durumları farklı teorik yaklaşımların birleştirilmesine olan ihtiyacın tipik bir örneğidir.

2. Kavramsal Çerçeve

Alan yazında matematiksel modelleme sürecinde kullanılan birçok basamak verilmektedir. Burada tasarlanmaya çalışılan ise bu basamaklar yerine RBC+C modelinin basamaklarının birkaçının ya da tamamının kullanılabilir olmasıdır. Bu bölümde, iki kavramsal yapıyı birbirine bağlamayı mümkün kılan noktalar incelenerek iki yaklaşımın benzerlikleri ve farklılıkları tartışılmaktadır.

2.1. Matematiksel Modelleme ve Modelleme Süreçlerindeki Yapısal Araçlar

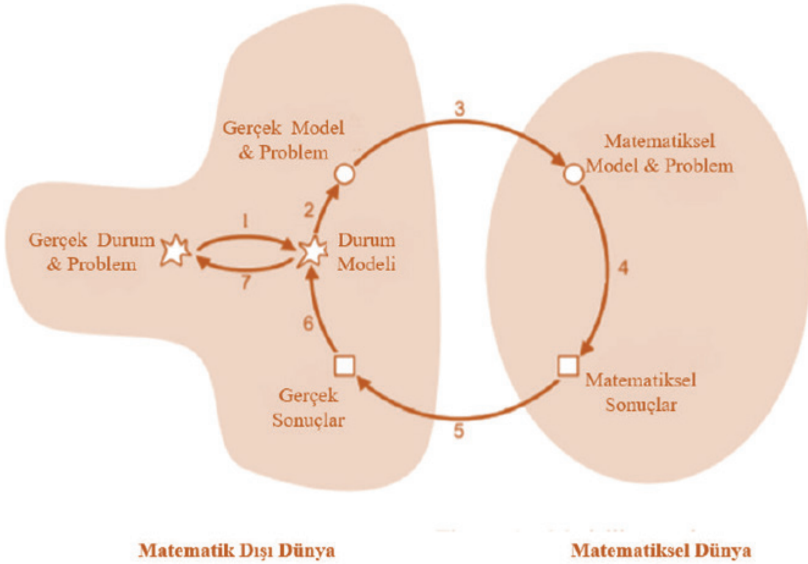
Alan yazında matematiksel modellemeyle ilgili çeşitli tanımlamalar mevcut olup bu tanımlamaların ortak tarafı matematiksel modellemenin gerçek dünya ile matematik dünyası arasında süreç gerektiren bir köprü vazifesinde olduğudur. Matematiksel modelleme gerçek dünyadaki bir durum üzerine kurulan bir uygun bir matematiksel modelin matematikleştirme eylemiyle yapılandırılmasıdır.

Birçok basamaktan oluşan matematiksel modelleme süreci de araştırmacıların felsefe ve amaçları doğrultusunda farklılıklar göstermektedir. Bu araştırmacıların belirttiği basamaklar kısmen birbirine yakın ve tutarlı basamaklardır. Alanın önemli isimlerinden Blum (2003) göre modelleme süreci beş adımda yapılandırılabilir: Birinci adımda gerçek dünya problemini gerçek modele indirgenir. Sonraki adımda bu gerçek model matematikleştirilerek matematiksel modele dönüştürülür. Üçüncü adımda matematiksel model üzerinde matematiksel çalışmalar geçekleştirilerek çözüme ulaşılır. Ardından gelen adımda bu matematiksel çözüm yorumlanır. Son adımda ise gerçek dünya problemi bağlamında çözümün doğrulaması yapılır. Dolayısıyla bu basamaklar gerçek dünya ile matematik arasındaki karmaşık etkileşimle oluşan modelleme kavramına karşılık gelen modelleme sürecindeki basamaklardır (Blum ve Niss, 1991).

Modelleme yeterlikleri son yıllarda detaylandırılmıştır (Kaiser ve Maass, 2006). Yeterlikler bu çalışma ile geliştirilen kavramsal çerçevede kullanılmak üzere Blum ve Kaiser'in (akt. Maas,2006) modelleme için geliştirdikleri formülle beş kategoride ele alınmıştır: Gerçek problemi anlamak ve gerçek modeli kurmak; gerçek modelden matematiksel model geliştirmek; matematiksel model üzerinde matematik soruları çözmek; matematiksel sonuçları sırasıyla gerçek model ya da gerçek durum üzerinde yorumlamak; bir çözümü incelemek ya da gerekirse yenilenen modelleme sürecini gerçekleştirmek.

Lesh ve Doerr (2003) ve Blum ve Niss (1991) matematiksel modellemedeki problem çözme eylemlerini şu şekilde açıklamaktadırlar. İlk olarak problemi basitleştirme ve anlama; tabloyu, grafiği, sözel ifadeleri ve yapılan ve onlardan elde edilen çıkarımları anlama eylemleri gerçekleştirilir. Ardından problem manipüle edilerek etme bir matematiksel model geliştirilir; değişkenleri ve aralarındaki ilişkileri tanımlanır, hipotezler kurulur; kavramsal bilgi değerlendirilir ve modeller geliştirilir. Ardından çözümü yorumlama; kararlar verme, sistemi analiz etme ve yeni sonuçlar önerme etkinlikleri gerçekleştirilir. Son olarak da çözümü gösterme ve doğrulama; çözümleri paylaşma ve genelleme, farklı açılardan çözümü değerlendirme eylemleri ile süreç tamamlanır.

Blum (1985)' un matematiksel modelini geliştirirken yararlandığı bilişsel modelleme yaklaşımına dikkat çeken ve süreç modeli çalışmalarının en kapsamlılarından birini gerçekleştiren Borromeo Ferri (2006)' nin modelleme süreç döngüsü aşağıdaki Şekil 1.'de verilmiştir. Borromeo Ferri (2007)' nin matematiksel modelleme sürecinde beklenen bilişsel becerileri; (1) problemi anlama, (2) sadeleştirme, (3) matematikselleştirme, (4) matematiksel olarak çalışma, (5) yorumlama ve (6) doğrulama olmak üzere altı başlıkta ve bunlara ait alt başlıklarda değerlendirilmektedir.

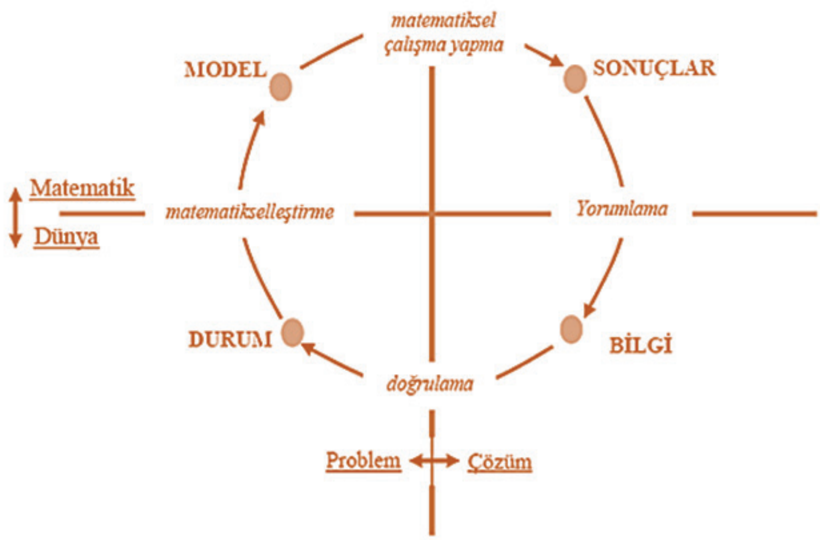


Şekil 1. BorromeoFerri (1985)' nin modelleme süreç döngüsü

Voskoglou (2006) matematiksel modelleme sürecini problemin anlamakla başlatmaktadır. Bir sonraki adımı gerçek yaşam durumunun formüle edilmesini ve matematiksel ifadelerle modelin kurulmasını içermektedir. Bu iki basamakta elde edilenlerden oluşturulan model yardımıyla problem durumunu çözümü elde edilmektedir. Ardından gerçek yaşam durumundaki verilerle modelde elde edilen verilerin karşılaştırılarak çözümün doğrulanması gerçekleştirilmelidir. Sonuçların yorumlanmasında ise probleme cevap olarak elde edilen sonucun matematiksel yorumları yapılmakta ve bu sonuçlar gerçek yaşam durumuyla da ilişkilendirilmektedir. Voskoglou (2006) çalışmasında diğer araştırmacılardan farklı olarak, modelleme sürecinde modelin doğrulanmasının sonuçların yorumlanması temel basamağından önce gerçekleştiğini ifade etmektedir. Ayrıca Voskoglou (2006)' nun bahsi geçen matematiksel modelleme basamakları doğrusal bir yapıda değil ihtiyaç duyulduğunda basamaklara geri dönüşlerin gerçekleşebildiği döngüsel bir yapıdadır.

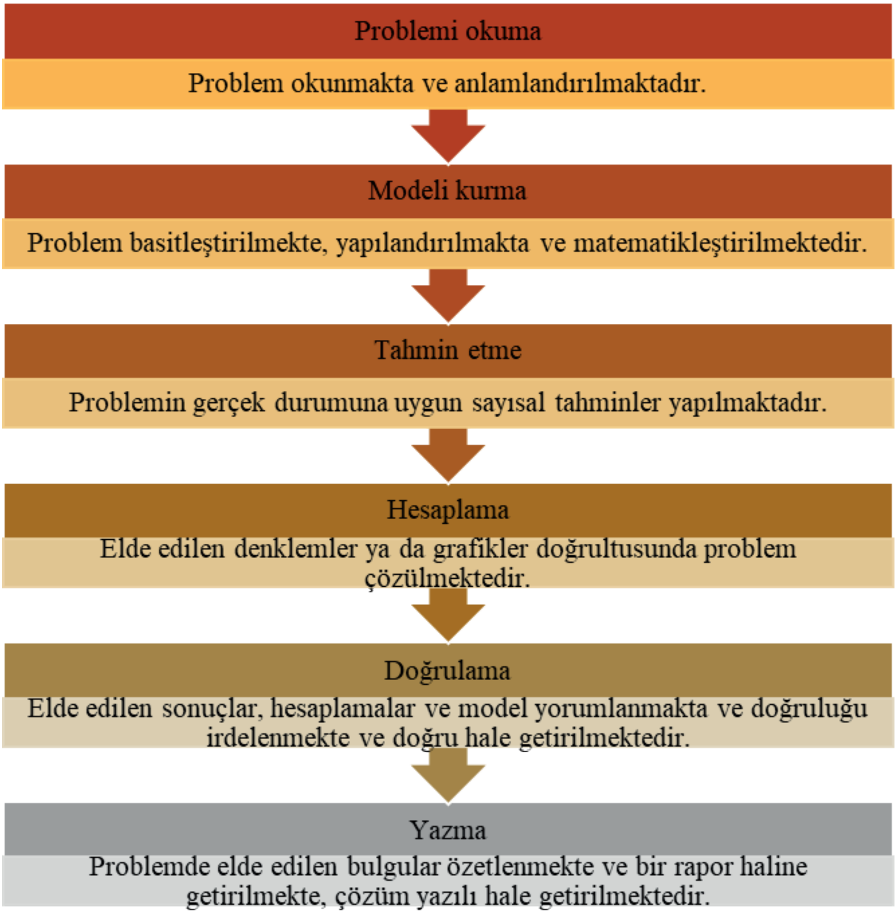
Şekil 2. Voskoglou (2006)' nun matematiksel modelleme süreci

Schupp (1988) tarafından önerilen düşünceleri temel alarak Neubrand (2013), süreç modelini dört temel karara dayandırmaktadır. Bu süreç modeli, dört ana bölümden oluşmaktadır. Dikey geçiş, gerçek yaşamdan matematiksel düzleme geçişi temsil ederken, yatay geçiş ise bir problemi çözüme dönüştürme sürecini anlatır. Ayrıca, bu süreç modeli bileşen ve basamak arasındaki ayrımı da göz önünde bulundurur. Model, durum, model, bilgi ve sonuç olmak üzere dört temel bileşeni içerirken, matematiksel işleme dönüştürme, matematiksel analiz, yorumlama ve doğrulama gibi dört temel adımdan oluşur.



Şekil 3. Neubrand (2013) matematiksel modelleme süreci

Ärlebäck ve Bergsten (2010) tarafından sunulan süreç modeli, problem çözme sürecini Borromeo Ferri'nin (2006) problemi anlama aşaması ile başlatırken, model kurma aşaması problemi daha basit ve yapılandırılabilir hale getirme adımlarıyla devam eder. Hesaplama aşaması matematiksel olarak çözümlemeyi içerirken, doğrulama aşaması ise çözümü yorumlama ve doğrulama süreçleriyle paralellik göstermektedir (Şekil 4).



Şekil 4. Ärlebäck ve Bergsten (2010)' in matematiksel modelleme süreci

2.2. Bağlamdan Soyutlama ve Epistemik Eylemler

Bağlamdan soyutlamanın epistemik eylem modeli olan RBC+C, soyutlama süreçlerinin mikro düzeyde tanımlanmasına ve analiz edilmesine yardım etmeyi amaçlamaktadır (Dreyfus, Hershkowitz ve Schwarz, 2001). "Soyutlama" kelimesi bilginin dikey olarak organize edilmesiyle yeni bilginin ortaya çıkması olarak açıklanır.

Matematiğin gerçek dünyanın soyutlanmış bir temsili olduğu belirtilirken öğrencilerin bilgiyi nasıl derinlemesine soyutladıklarının öğretmenler ve araştırmacılar için ne kadar önemli olduğunu vurgulanmaktadır. Ayrıca, yeni matematiksel kavramların oluşturulmasının önceki kavramların yapılandırılması ve bu kavramların ilişkilendirilmesine bağlı olduğu ifade edilmekte olup (Dreyfus vd., 2015) bu süreçlerin zihinsel olduğu ve dolayısıyla doğrudan gözlemlenemeyeceği belirtmektedir.

Soyutlama, bir bireyin yeni bir yapıya ulaşmak için önceki matematiksel yapıları dikey olarak yeniden düzenleme süreci olarak tanımlanmaktadır. Bu soyutlamanın üç aşaması ise yeni bir yapıya olan ihtiyaç, yeni yapının ortaya çıkışı ve yeni yapının pekiştirilmesidir

Metinde bu aşamalardan ikincisi olan "yeni yapının oluşumu"nun özellikle önemli olduğu ve bu aşamanın mikro düzeyde nasıl modellediğini açıklamak için Hershkowitz ve diğerleri tarafından 2001 yılında geliştirilen epistemik eylemler modeli olan RBC+C modelinden bahsetmektedir. Altun (2008), RBC+C modelinin soyutlamanın yani bilgi oluşturmanın önemli modellerinden biri olduğunu vurgulamaktadır.

Soyutlama sıklıkla aşağıda belirtilen epistemik eylemlerle deneysel olarak gözlemlenebilir. Bu eylemler bilginin yeniden oluşturulduğu zihinsel eylemlerdir:

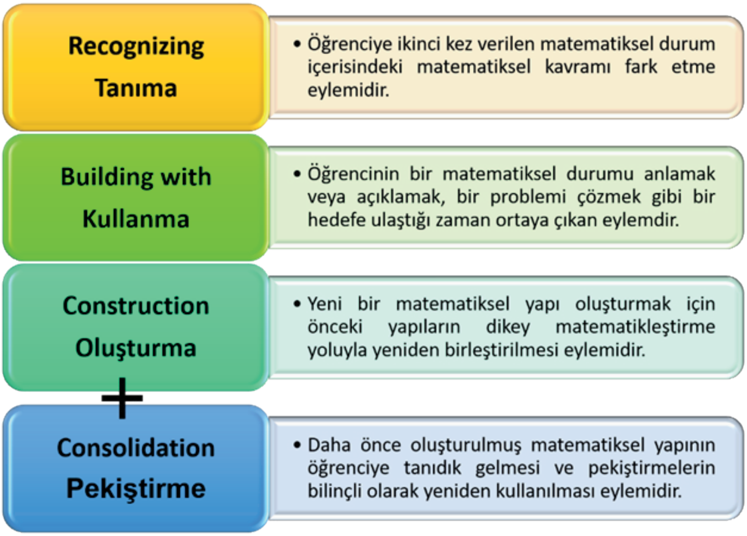
i. Tanıma (Recognizing)

ii. Kullanma (Building with)

iii. Oluşturma (Constructing)

iv. Pekiştirme (Consolidation)

Eylemlerin ilk harflerinin bir araya getirilmesiyle "RBC+C" kısaltması oluşmuştur. Bu eylemler gözlemlenebilir (Pontecorvo ve Girardet, 1993). Aynı zamanda birbirlerine dinamik olarak iç içe geçmiş durumdadırlar, eş zamanlı olarak yer alabilirler ve etkileşim içindedirler (Dreyfus ve Kidron, 1991). Bir epistemik eylem modeli olan RBC+C Modeli' ne ait eylem basamakları Şekil 5'de verilmiştir.



Şekil 5. RBC+C eylem basamakları

Bu bilişsel eylemlerden ilki tanıma eylemi daha önceki matematiksel kavramlarda karşılaşılan ve bilinen yapıların yeni çalışma esnasında tanınmasını ve gerekli durumlarda kullanılmasını ifade etmektedir. Eylemlerden ikincisi kullanmadır. Bireyin tanımış olduğu matematiksel kavramları yeni bilgi üretmeye giden yolda ilişkilendirme ve bunlardan yararlanma anlamına gelen kullanma eylemine ilişkin süreçte, birey problemde uygulanabilir bir çözümü oluşturmak için mevcut yapısal bilgisini kullanmakta ve daha önceden oluşturmuş olduğu bilgileri kullanarak amaca ulaşmaktadır (Dreyfus vd., 2001). Tanıma süreci ile iç içe geçmiş olan kullanma eyleminin gerçekleştiği bu süreçte bilinen bilgilerin yeni içerikle birleştirilmesi sağlanmaktadır (Bikner- Ahsbahs, 2004; Hershkowitz ve diğerleri, 2001).

Bu model, oluşturma eylemini matematiksel soyutlamanın merkezi eylemi olarak belirlemiştir. Oluşturma, önceki yapıların dikey matematikleştirme ile yeni bir yapı oluşturmak için birleşmesini içermektedir (Hershkovitz vd., 2001). Oluşturma eylemi öğrenen kişinin sahip olduğu R, B ve düşük seviyedeki C (Constructing) eylemlerinin, yeni yapıyı sözlü ya da eylemsel olarak ilk kullandığı zemini hazırlamasıdır. Oluşturma aşaması öğrenenin yeni yapıyı tam olarak elde ettiği anlamına gelmez. Bu aşamada öğrenen kişi yeni yapının farkındadır ve oluşturduğu yapı kırılgan ve bağlama bağlıdır. Bundan dolayı yeni bir oluşturma, pekiştirilmeye ihtiyaç duyar (Özmantar, 2004). Pekiştirilen oluşturmalar aslında soyutlamayı doğurmaktadır.

C- eylemi, R ve B eylemlerine bağlıdır. Bundan dolayıdır ki R ve B eylemleri belirleyicidir ve C eylemi içinde iç içe geçmiştir. Aynı şekilde R eylemi de B eylemi içinde iç içe geçmiştir, bir önceki yapıyı kullanma, bu yapıyı tanımayı gerektirir (Schwarz vd., 2009).

Hershkowitz ve diğerleri (2001) tarafından soyutlama süreçlerini analiz etmek amacıyla ortaya atılan epistemik eylemler modeli olan RBC (recognizing, building with, construction) modeli, 2004 yılında Dreyfus ve Tsamir tarafından bu soyutlama sürecine pekiştirme (consolidation) bilişsel eyleminin de eklenmesiyle RBC+C soyutlama modeli olarak son halini almıştır.

Pekiştirme, kısaltma adıyla +C epistemik eylemi; yapının tanınması, kullanılması, üzerinde derinlemesine düşünülmesi ve potansiyel olarak ileriki yapıların oluşturulması gibi bir dizi işlem sırasında oluşur.

Tsamir ve Dreyfus (2004) 'a göre pekiştirme, önceden oluşturulmuş olan matematiksel yapının, esnek şekilde problem çözme ve zihinsel yansımada kullanılmasını sağlayarak, problemin ya da yapının öğrenene çok tanıdık hale gelmesiyle gerçekleşir. Yapının tanınması ve kullanılmasıyla yapı, açık, doğrudan ve güvenle yapılmış hale gelir.

Pekiştirmenin iki farklı çeşidi vardır Birincisi; yeni yapıyı kullanma sırasında eski yapıyı pekiştirmedir. İkincisi ise önceden oluşturulan bilginin biraz daha farklı problemler üzerinde tekrar kullanılarak pekiştirilmesidir (Dreyfus ve Tsamir, 2004; Monaghan ve Özmantar, 2004).

2.3. İki Kavramsal Yapının Bağlantısı

Her iki modeli modifiye etmeden ve yeni bir kavramsal çerçeve oluşturmadan önce matematiksel modelleme ve RBC+C Modeli teorik çerçeveleri arasında bağlantı olup olmadığını denemenin makul olduğu gözlemlenmiştir (Halverscheid, 2008).

Son yıllarda modellemenin bilişsel yönleri oldukça ilgi görmektedir (Borromeo-Ferri, 2006). Modelleme süreçlerinin epistemik doğası her zaman mevcuttur. Dreyfus ve Kidron yaptıkları çalışmada (2006) epistemik eylemleri gösteren diyagramları kullanma fikrinden bahsetmişlerdir. Ayrıca Pollak (1969), etkinlik üzerinde çalışma devam ederken tanıma, formüle etme ve çözme basamakları arasında ileri ve geri gidebilen bir süreç olduğunu belirtmiştir.

Epistemik eylem modelinin basamakları olan "tanıma, kullanma, oluşturma ve pekiştirme" basamaklarına bakılarak yola çıkıldığında "Tanıma, formüle etme, çözme ve doğrulama" nın modelleme süreçlerinin parçalarından olduğu keşfedilecektir. Her iki yaklaşımın ortak özelliği tarif ettikleri adımların ve zamanlamalarının esnekliğidir. Modelleme etkinlikleri kısa bir zaman aralığına ilişkin de olabilir daha uzun da olabilir. Örneğin bir fikir bir süreliğine unutulabilir ve bir süre sonra tekrar rol oynayabilir. Benzer şekilde bağlamdan soyutlamanın RBC+C teorisine göre bir "oluşturma" çok hızlı veya çok yavaş gerçekleşebilir ya da görünüşe göre çok ortak noktası olmayan başka eylemlerle durdurulabilir. Halverscheid (2008) ve Guerrero-Ortiz ve arkadaşları (2018) yaptıkları çalışmada her iki teorik yaklaşımın RBC+C Modeli'nde "pekiştirme" ve matematiksel modellemede "doğrulama" basamaklarına değinmemişlerdir. Fakat soyutlama süreçlerinde oluşan bilgi "kırılgan" yapıya sahip olduğundan Dreyfus (2007)' un eklediği pekiştirme basamağına karşılık gelebilecek modelleme basamağı araştırıldığında "doğrulama" basamağının uygun gelebileceği öngörülmüştür. Bu doğrultuda bu çalışmada ilk kez dördüncü basamak eklenmiştir.

İki kavramsal çerçeveye ait öğrenme süreçlerine yakından bakıldığında biraz farklı ölçülere sahip olduğu görünmektedir (Halverschid, 2008). Modelleme çerçevesi ile cevap verilen soruların genelde modelleme döngüsünün yüzeysel bir bilgi verdiği belirlenmiştir. Bunun aksine epistemik eylemlerle analiz edilen yapılar, daha detaylı ve derin bilgi vermektedir.

İki yaklaşımın birleşiminde yukarıda dile getirilen farklı açılardan kaynaklanan farklı büyüklükteki basamakları için hem dezavantaj hem de avantaj bulunmaktadır. Mikroskopik ve makroskopik aynı zamanda analiz etmeyi organize etmek oldukça zordur. Elde edilen deneysel bilginin farklı mercek büyüklükleri için yeterli derecede bilgi verici olması gerekmektedir. Diğer taraftan büyüklükleri tipik olarak farklı iki çerçevenin uyumluluğu daha kolaydır. İki teorik çerçevenin benzer mercek büyüklüklerini eşleştirirken uyumlu bir çerçevede bir araya getirmek ayrı bir dikkat gerektirmektedir. Çünkü birçok basamak iç içe geçmiş olabilir.

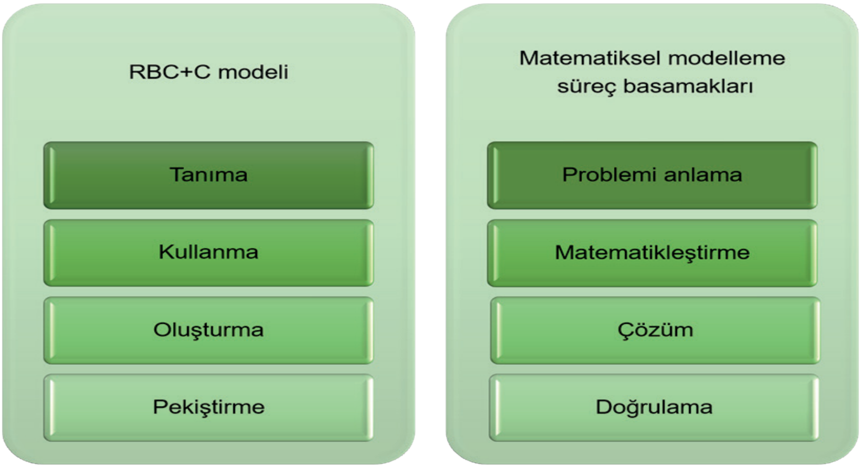
Öne sürülen kavramsal çerçeve üç hipotez üzerine kurulmuştur.

1.Matematiksel modelleme etkinliklerine karşılık gelen epistemik eylemlerin olduğu varsayılmıştır.

2. Epistemik eylemlerin dört çeşidi olan tanıma kullanma oluşturma ve pekiştirme modelleme etkinliklerinde tanımlanıp kullanılabilir.

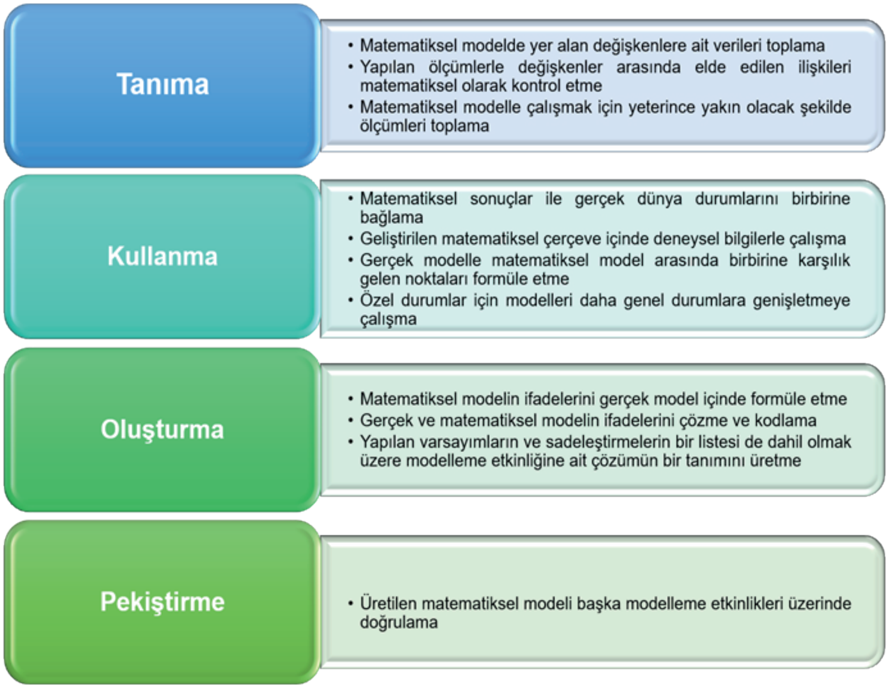
3. Farklı mercek büyüklükleri, matematiksel modelleme çerçevesi ölçeği (daha genel) ile RBC+C Modeli ölçeğinin (daha detaylı) aynı anda dikkate alınmasına izin vermektedir.

Burada bağlamdan soyutlamanın epistemik eylem modeli olan RBC+C modeli ile matematiksel modellemenin kavramsal çerçevesinin birlikte kullanılabileceği düşünülmektedir. Şekil 6'da bu iki kavramsal çerçevenin basamakları yer almaktadır.



Şekil 6. RBC+C ve Matematiksel modelleme süreç basamakları

RBC+C Modeli'nin ilk basamağı olan "tanıma"ya karşılık gelen modelleme basamağı "problemi anlama"dır. Öğrencinin bir problemle karşı karşıya geldiğinde önceki matematiksel bilgisinden yararlanarak problemi anlaması tanıması ve işe koşacağı gerekli bilgileri hatırlamasıdır. Bir sonraki aşama RBC+C Modeli'nde "kullanma" iken modellemede buna karşılık gelen basamak "matematikleştirme"dir. Bu basamakta öğrenci problemi anladıktan sonra sahip olduğu matematiksel bilgiyi etkinliği ya da problemi çözmede kullanır. Epistemik eylemlerin üçüncü basamağı olan "oluşturma" basamağının modellemedeki karşılığı ise "çözüm"dür. Öğrenci bu aşamaya ulaştığında soyutlamanın ilk aşaması olan oluşturma basamağına ulaşmış ve dolayısıyla modeli oluşturmuş olur. Oluşturulan ya da diğer adıyla soyutlama yapılan bilgi bu aşamada Dreyfus ve arkadaşlarının (2007) belirttiği üzere "kırılgan" yapıya sahiptir. Bundan dolayıdır ki pekiştirilmesi gerekir. Bu durumda epistemik eylem modelinin son basamağı olan "pekiştirme" basamağı ile öğrenci oluşturduğu matematiksel kavram ile ilgili ek etkinlik ya da modelleme sorularıyla bilgiyi "doğrulama"ya ihtiyaç duyar. RBC+C Modeli'ndeki pekiştirma basamağı modelleme sürecindeki "doğrulama" basamağına karşılık gelmektedir. Böylece Halverschid'in (2008) açıkladığı gibi gerçek model ya da durumdaki matematiksel sonuçları yorumlamak, tanılamak ve analiz etmek için RBC+C Modeli kullanılabilir.



Şekil 7. Gerçek durum ya da gerçek modelde matematiksel sonuçları yorumlamak için gerekli eylemler (Halverschid, 2008)

3. Sonuç ve Tartışma

Matematiksel modelleme ile bağlamdan soyutlama, matematiksel düşünce ve analiz süreçlerinde önemli bir ilişkiye sahiptir. Matematiksel modelleme ve bağlamdan soyutlama, gerçek dünya problemlerini daha iyi anlamak ve çözmek için bir araçlar dizisini temsil eder. Bağlamdan soyutlama, matematiksel modelleme sürecini yönlendirirken, matematiksel modelleme de bağlamdan soyutlamanın sonuçlarını somut bir şekilde ifade etmeye yardımcı olur (Guerrero-Ortiz, Lorca ve Soto, 2018).

Çalışmanın amacı matematiksel modelleme ve bağlamdan soyutlamayı aynı anda kullanarak yeni bir kavramsal çerçeve oluşturmaktır. Matematiksel modelleme sürecinde epistemik eylemler tanılama aracı olarak kullanılabilir. Bunun yanı sıra, modelleme etkinlikleri için tanıma, kullanma, oluşturma ve pekiştirme epistemik eylemlerini kullanmak için girişimde bulunulmuştur. Bu bağlamda modelleme süreçlerine uygun gelen epistemik eylemler belirlenmiştir. Geliştirilen kavramsal çerçevenin tanımlayıcı araç olarak kullanılabileceği diyagramlarla gösterilmeye çalışılmıştır. Aynı anda kullanıma uygun olarak diyagramlarda her iki teorik çerçeve eş zamanda kullanılacak şekilde resmedilmiştir. Her iki yapının kullanımında ihtiyaç duyulan sürecin zamanı ve çözülen problemin bağlamının genişliği her iki yapıyı da aynı anda kullanmaya müsaade etmektedir. Çerçeveleri birbirine paralel olarak ele almak için orijinal hallerini ya da ilgili terimlerini değiştirmeye ihtiyaç duyulmamıştır.

Modelleme noktasından bakıldığında, modellemenin deneysel ve matematiksel değerlendirmelerle ilgili genel yönünün, soyutlamadaki epistemolojik yapıyla zenginleştiği ortaya konulmuştur. Bağlamdan soyutlamanın matematiksel modellemenin temelinin oluşturulmasına, modelin basit ve anlaşılır olmasını sağlama ve matematiksel modelleme sürecini yönlendirilmesine katkıda bulunacağı düşünülmektedir. Bir problemi matematiksel olarak modellemeye başlamadan önce, o problemi bağlamdan soyutlamak ve hangi faktörlerin önemli olduğunu belirlemek önemlidir. Bu soyutlama süreci, matematiksel modelin temelini oluşturur. Çünkü hangi değişkenlerin ve ilişkilerin model içinde temsil edileceğini belirler. Bağlamdan soyutlama, gerçek dünya karmaşıklığını azaltır ve modelin daha anlaşılır ve yönetilebilir olmasını sağlar. Bu, modelin daha kolay analiz edilmesini ve sonuçların daha iyi anlaşılmasını sağlar. Bir problemi matematiksel olarak modellemeye başladığınızda, bağlamdan soyutlama yapmak, hangi matematiksel ifadelerin kullanılacağına ve hangi parametrelerin dikkate alınacağına karar vermenize yardımcı olur. Bu nedenle, bağlamdan soyutlama, modelleme sürecinin başlangıcında çok önemli bir adımdır.

Sonuç olarak, bağlamdan soyutlama ve matematiksel modelleme, problemin anlaşılması ve çözülmesi için birbirini tamamlayan iki süreçtir. Bağlamdan soyutlama, karmaşıklığı azaltırken matematiksel modelleme, problemin matematiksel ifadelerle açıklanmasını ve analizini kolaylaştırır. Bu iki aşama, gerçek dünya problemleriyle başa çıkmak için çok kullanışlıdır ve birçok bilim dalında ve mühendislik uygulamalarında yaygın olarak kullanılır.

Epistemik eylemlerin çeşitli bağlamlarla değişip değişmediği sonraki araştırmalarda incelenebilir. Matematiksel modelleme fizik, mühendislik, ekonomi ve biyoloji de dahil olmak üzere birçok alanda önemli bir araçtır. Eğitimde de modelleme ve soyutlama içeren etkinlikler aracılığıyla öğrencilerin matematiksel düşünme becerilerini geliştirmelerine yardımcı olmak için kullanılabilir.

Kaynakça

Altun, M. (2019). Yaşam Temelli Müfredatlar için Öğretim ve Değerlendirme. *Uluslararası Fen, Matematik, Girişimcilik ve Teknoloji Eğitimi Kongresi,* İzmir.

Altun, M. (2020). Bir Yeterlik Alanı Olarak Matematiksel Modellemenin Yeniden Gözden Geçirilmesi, *2 nd International Conference on Science, Mathematics, Entrepreneurship and Technology Education*. Bursa.

Altun, M., & Yılmaz, A. (2008). Lise öğrencilerinin tam değer fonksiyonu bilgisini oluşturma süreci. *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi, 41*(2), 237-271.

Ärlebäck, J. B., & Bergsten, C. (2010). On the Use of Realistic Fermi Problems in Introducing Mathematical Modelling in Upper Secondary Mathematics. In R. Lesh, P. L. Galbraith, W. Blum & A. Hurford (Eds.), *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies.* ICTMA 13. (pp. 597-609) Springer

Bikner-Ahsbahs, A. (2004). Towards the emergence of constructing mathematical meaning. *In Proceeding of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (2), 119-126.

Blomhøj, M., & Jensen, T. H. (2007). What's all the fuss about competencies? Experiences with using a competence perspective on mathematics education to develop the teaching of mathematical modelling. In W. Blum, P. L. Galbraith, H. W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 45-56). New York: Springer

Blum, W. (1985). Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der didaktischen Diskussion*Mathematische Semesterberichte*. *32*, 195-232.

Blum, W. (2003). ICME Study 14: Applications and modelling in mathematics education–Discussion document. *Educational studies in mathematics*, *51*(1-2), 149-171.

Blum, W. & Niss, M. (1991). Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Application, and Links to Other Subjects-State, Trends and Issues in Mathematics İnstruction. *Educational Studies in Mathematics. 22(*1), 37- 68

Borromeo-Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *The International Journal on Mathematics Education, 38*(2), 86-95.

Busse, A. (2005). Individual ways of dealing with the context of realistic tasks—first steps towards a typology. *The International Journal on Mathematics Education, 37*(5), 354- 360.

Doerr, H. M. & Tripp, J. S. (1999). Understanding how students develop mathematical models, *Mathematical Thinking and Learning, 1*, 3, 231 - 254

Dreyfus, T. (1991). On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education. *In Proc. 15th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 33-48).

Dreyfus, T. (2007). Processes of abstraction in context the nested epistemic actions model.

Dreyfus, T., & Tsamir, P. (2004). Ben's consolidation of knowledge structures about infinite sets. *The Journal of Mathematical Behavior, 23*(3), 271-300.

Dreyfus, T., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. (2001). Abstraction in context II: The case of peer interaction. *Cognitive Science Quarterly, 1*(3/4), 307-368.

Dreyfus, T., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. (2015). The nested epistemic actions model for abstraction in context: Theory as methodological tool and methodological tool as theory. *In Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education* (pp. 185-217). Springer, Dordrecht.

Ferri, R. B. (2007). Personal experiences and extra-mathematical knowledge as an influence factor on modelling routes of pupils. *Proceedings of CERME-5, WG 13 Modelling and Applications*, 2080-2089.

Guerrero-Ortiz, C., Mena-Lorca, J., & Soto, A. M. (2018). Fostering transit between real world and mathematical world: Some phases on the modelling cycle. *International Journal of Science and Mathematics Education, 16(*8), 1-27

Halverscheid, S. (2008). Building a local conceptual framework for epistemic actions in a modelling environment with experiments. *ZDM*, 40, 225-234.

Hershkowitz, R., Schwarz, B. B., & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education,* 195-222.

Kaiser, G., & Mass, K. (2006). Modelling in lower secondary mathematics classrooms: problems, opportunities. In W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn, M. Niss (Eds.), *Applications and modelling in mathematics education. The 14th ICMI Study* (pp. 99–108). New York: Springer.

Lesh, R. & Doerr, H. M. (2003). (Eds.). Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning and Teaching. Mahwah, NJ:Lawrence Erlbaum.

Lesh, R., Young, R., & Fennewald, T. (2010). Modeling in k-16 mathematics classrooms-and beyond. In R. Lesh, P. L. Galbraith, C. R. Haines, & A. Hurford (Eds.), *Modeling students' mathematical modeling competencies* (pp. 275-283). Springer

Maaß, K. (2006). What are modelling competences? Zentralblatt fu¨r *Didaktik der Mathematik (ZDM),* 38(2), 113–142.

Neubrand, M. (Ed.). (2013). *Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland: Vertiefende Analysen im Rahmen von PISA 2000*. Springer-Verlag.

Niss, M., Blum, W. & Galbraith, P. L. (2007). Introduction. İçinde W. Blum, P. Galbraith, H. Henn &M. Niss (Eds*.), Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study* (ss. 3-32). New York: Springer

Ozmantar, M. F. (2004). Scaffolding, abstraction and emergent goals. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 24(*2), 83-89.

Ozmantar, M. F., & Monaghan, J. (2007). A dialectical approach to the formation of mathematical abstractions. *Mathematics Education Research Journal, 19*(2), 89-112.

Pollak, H. O. (1969). How can we teach applications of mathematics? *Educational studies in mathematics, 2*, 393–404.

Pontecorvo, C., & Girardet, H. (1993). Arguing and reasoning in understanding historical topics. *Cognition and instruction, 11*(3-4), 365-395.

Schupp, H. (1988). Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I zwischen Tradition und neuen Impulsen. *Der Mathematikunterricht. 36*(6), 5-16.

Tabach,M., Hershkowitz,R., Rasmussen,C., & Dreyfus,T.(2014).Knowledge shifts and knowledge agents in the classroom. *The Journal of Mathematical Behavior,* 33,192-208.

Voskoglou, M. G. (2006). The Use of Mathematical Modelling as a Tool for Learning Mathematics. *Quaderni di Ricerca in Didattica. 16*, 53-60.