Bölüm 12

Koşullu Değişen Varyans Modeli ile Elektrik Tüketim Miktarının Tahmini[1]

Savaş Tarkun[2]

Özet

Elektrik; sürdürülebilir yaşamda önemli bir rol oynayan ve çeşitli sektörlere katma değeri çok yüksek olan enerji türüdür. Elektrik, sosyo-ekonomik kalkınmada stratejik önemde bulunduğu için ekonomik refahın ve büyümenin en önemli aktörlerindendir. Yapısı gereği depolanamayan ve üretildiği anda tüketilmesi gereken bu enerji türü, ekonomik kalkınmanın tüm yönleri ile entegre olması ve aynı zamanda tek bir modelin her zaman doğru tahminleri vermemesi sebebi ile elektrik talep tahmini çalışmaları her dönem güncelliğini korumuştur. Çalışmada, 2007:01 – 2020:12 dönemine ilişkin elektrik tüketim miktarının koşullu değişen varyans model ile oynaklığı belirlenmeye çalışılmıştır. Ele alınan çalışma döneminde, elektrik talebi değişkeninde ARCH etkisi belirlenmiştir. Bu sonuç, elektrik talebine ait seride, önemli artma veya azalma olması nedeniyle, hata teriminin de bu hareketlerden etkilenerek sabit varyans özelliğini yitirmesine yol açmıştır. Dolayısıyla, bu sonuç elektrik talebinde simetrik bir etkiyi göstermektedir. Diğer bir deyişle, ARCH (1) modeli, pozitif ve negatif şokların, önceki dönem şoklarının kareleri ile ilişkili olduğunu ve oynaklığın ise bu ilişkiden aynı şekilde etkilendiğini göstermektedir. Çalışma modelinde ARCH katsayısı, (α_1 =0.55) olarak hesaplanmıştır. Dönemsel etkiler nedeniyle, oynaklığın etki süresinin çok uzun olmayacağını, ancak bir oynaklığa neden olduğu sonucuna varılmıştır.

1. Giriş

1950'lerde portföy teorisi üzerine yapılan ilk çalışmaların ardından oynaklık (volatility) konusu, finans alanında son derece önemli bir kavram haline gelmiştir (Mills, 2019, s. 161). Oynaklığın çeşitli tanımları

1 Bu çalışma "*Elektrik Talebinin Zaman Serisi Analizi, Yapay Sinir Ağları ve Hibrit Yöntem ile Tahmini*" Bursa Uludağ Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Ekonometri Anabilim Dalı, İstatistik Bilim Dalı, Danışman: Prof. Dr. Erkan Işığıçok, Bursa 2023, Doktora Tezinden üretilmiştir.

2 Dr., Bağımsız Araştırmacı, savastarkun@gmail.com, ORCID ID: 0000-0002-2684-184X,

https://doi.org/10.58830/ozgur.pub138.c563

bulunmasına rağmen, bir zaman serisi temelinde genellikle yüksek değişkenlik veya eşdeğer yüksek varyans ile ilişkilendirilen yapı, oynaklık olarak tanımlanabilir (Mills, 2019, s. 161). Bu sadece finansal getirilerin değil, aynı zamanda birçok zaman serisinin değişkenliğinin düşük olduğu ve göreli oynaklığın önemli ölçüde daha yüksek olduğu değişkenlik gösteren bir yapı olarak ifade edilebilir.

Genellikle finansal piyasalarda, özelde hisse senetlerinin oynaklığının bir özelliği de doğrudan gözlemlenebilir olmasıdır. Oynaklığın gözlemlenemezliği, koşullu değişen varyans modellerinin tahmin performansının değerlendirilmesini zorlaştırmaktadır. Örneğin, BİST hisse senetlerinin günlük kazanç uzunlukları düşünülebilir. Günlük oynaklık, bir işlem gününde yalnızca bir gözlem olduğundan dolayı getiri verilerinden doğrudan gözlenemez. Bir hisse senedinin 15 dakikalık getirisi gibi gün içi veriler mevcut ise günlük oynaklık tahmin edilebilir. Ancak böyle bir tahminin doğruluğu için dikkatli bir çalışma gerektirmektedir. Örneğin, elektrik tüketimi oynaklığı gün içi-gece veya kış-yaz mevsimi ya da bölgesel gelişmişlik gibi faktörlere göre bölgelerarası farklılıklar gösterebilmektedir. Bir ülkedeki elektrik tüketiminin yüksek frekanslı olduğu sanayileşmiş bölgeler, daha az gelişmiş bölgelerin elektrik tüketimi oynaklığı hakkında çok sınırlı bilgiyi içerebilir.

1980'lerin başında, oynaklığın gözlemlenen zaman serileri için stokastik model içine yerleştirilmesi önerildi. Bu bazı serilerin, korelasyonsuz görünmesine rağmen, zaman içinde bağımsız olmadıklarından kaynaklandığı gözlemlenmiştir (Durllauf & Blume, 2010, s. 15). Bu nedenle, serilerdeki olağanüstü hareketlilik sonucunda zengin dinamikler sergileme potansiyeline sahip olduklarından dolayı, bunlar genellikle Gaussian olmayan dağılım özellikleri sergilemektedirler. Bu koşullar altında, sadece koşullu ortalamayı modellemekten ziyade, serinin daha yüksek momentlerinin özelliklerine odaklanılmaktadır (Mills, 2019, s. 161).

Bu durumu gerçekleştirmenin en basit hali, Y_t serisini oluşturan sürecin varyansının ya sürekli olarak ya da zaman içinde belirli ayrık noktalarda değişmesine izin vermektir (Mills, 2019, s. 162). Durağan bir sürecin sabit bir varyansa sahip olması gerekse de belirli koşullu varyanslar değişebilir ve böylece koşulsuz varyanslar V_t tüm t için sabit olsa da koşullu varyans $V(Y_t|Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots)$, Y_t'nin gerçekleşmesine bağlı olan t'nin gözlemden gözleme değişir olmasıdır.

1.1. Otoregresif Koşullu Değişen Varyans (ARCH) Modeli

Bu bölümün amacı, bir zaman serisinin oynaklığını modellemek için literatürde mevcut olan bazı istatistiksel ve ekonometrik modelleri incelemektir. Bu modeller ise koşullu varyans modelleri olarak adlandırılır. Oynaklık, bir zaman serisi için önemli faktördür. Dolayısıyla; ARCH modelleri, başta finansal piyasalar olmak üzere, birçok zaman serisine uygulanmaktadır. Ayrıca ortalama ve varyansı sabit olmayan (değişkenlik gösteren) bir zaman serisinin oynaklığının modellenmesi, parametre tahminindeki verimliliği ve aralık tahminindeki başarısını artırabilmektedir.

Standart regresyon ve zaman serisi modellerindeki birçok tanısal kontrol, hata terimine ilişkin varsayımlarla belirlenir: Bağımsızlık, sıfır ortalama ile özdeş dağılım ve sabit varyans varsayımları bunlardan bazılarıdır. Varyans başta olmak üzere, daha yüksek koşullu momentler arasında bağımlı olma olasılığı, zaman serisi verilerinde doğrusal olmayan stokastik süreçleri daha gerçekçi bir perspektiften incelemeyi ima eder. Bazı zaman serileri rasgele yürüyüş modelleri ile yaklaşık olarak hesaplanabilmektedir. Ancak rasgele yürüyüş varsayımlarının çok kısıtlayıcı olması nedeniyle, oynaklığın zamanla değişmesi sürecin durağanlığını ihlal edebilmektedir.

Ampirik bir bakış açısına göre, özelde finansal zaman serileri, çeşitli doğrusal olmayan dinamikler sunar. Bunların en önemlisi ise serilerin değişkenliğinin geçmiş dönem değerlerine güçlü şekilde bağımlı olmasıdır. Serilerin, doğrusal olmama durumları, sabit olmayan koşullu değişen varyanstır ve genellikle bağımlı değişkene yönelik büyük şokların kümelenmesi ile kendini gösterirler. Diğer bir deyişle, oynaklığın olduğu bir seride varyans zamanla değişir ve büyük (küçük) değişiklikleri takip etme eğilimindedir (Montgomery et al., 2015, s. 507). Koşullu değişen varyans modellerinin ek bir avantajı ise tahmin aralıklarının tahminini iyileştirmek için stokastik hatadaki, koşullu varyansı modele dahil etmesidir. Bazı doğrusal olmayan modeller, hem koşullu ortalama hem de koşullu varyans ile modellenebilmektedir (Poo, 2003, s. 256).

Ekonometrik modellerin çoğunda bir zaman serisinin gelişimi, koşullu ortalamayı/beklentiyi kullanmaktır. Öngörü hatalarının varyansının en aza indirilmesi anlamında en iyi (optimal) tahmin, temel alınan modelin koşullu ortalaması ile elde edilmektedir. Burada hataların sadece korelasyonsuz değil aynı zamanda sabit varyansa sahip (homoscedasticity) olduğu, yani açıklanamayan dalgalanmaların ikinci momentlerde hiçbir bağımlılığının olmadığını varsayar (Kirchgässner & Wolters, 2007, s. 241). Ancak; Benoit Mandelbort (1963), bazı finansal verilerin (genellikle varsayılan) normal dağılıma uygun olmasından ziyade, aykırı değere sahip olabildiğini ve oynaklık kümelerine[3] sahip olduğunu göstermiştir. Bu durum normal

---

3 Oynaklık kümesi veya oynaklık havuzu: Küçük (büyük) şokların tekrar büyük (küçük) şokları takip etmesidir.

dağılıma kıyasla, dağılımın merkezinde ve kuyruklarda daha fazla kütle sergileyen asimetrik/çarpık (leptokurtik) dağılımlara yol açabilmektedir (Brooks, 2008, s. 380). Dolaysıyla bu durum, "aşırı sivrilik" ile neticelenir. Diğer bir deyişle, basıklık değerinin 3'ün üzerine çıkmasına yol açmaktadır (Kirchgässner & Wolters, 2007, s. 242).

Doğrusal regresyon analizindeki sabit varyans varsayıma göre, hataların karelerinin toplamı farklı zaman dönemlerinde aynı olmalıdır (Brooks, 2008, s. 387). Bununla birlikte, birçok zaman serisi verisi, hata terimlerinin varyanslarının eşit olmadığı bazı gözlemler ya da veri dönemleri için hata terimlerinin diğerlerinden daha büyük olması durumunda değişen varyans (heteroscedasticity) olduğu söylenir (Rachev et al., 2007, s. 279). Engle (1982) tarafından literatüre kazandırılmış olan otoregresif koşullu değişen varyans (ARCH) modeli, bu tez çalışmasının uygulama modellerinden birini oluşturmaktadır.

1.2. ARCH (p) Modeli

Engle (1982) çalışmasında, varyansın geçmişe bağlı olduğu bir model sınıfı önermiş ve ekonomideki yararlarını tartışmıştır. Tahmin yöntemleri, bu tür modellerin varlığına yönelik testler ve ampirik bir örnek sunmuştur. Başlangıçta birinci dereceden otoregresyon modeli şu şekildedir:

$$Y_t = \gamma Y_{t-1} + \varepsilon_t \tag{1}$$

Burada ε, $V(\varepsilon) = \sigma^2$ ile beyaz gürültülüdür. Y_t'nin koşullu ortalaması γY_{t-1} iken koşulsuz ortalaması sıfırdır. Zaman serisi modellerinden kaynaklanan tahminler, koşullu ortalamanın kullanılmasından kaynaklanmaktadır. Y_t'nin koşullu varyansı σ^2 iken koşulsuz varyansı $\sigma^2/(1-\gamma^2)$'dir. Geçmişten gelen ek bilgilerin tahmin varyansını etkilemesine izin verilirse, gerçek süreçler için daha iyi tahmin aralıkları beklenebilir.

Değişen varyansın standart yaklaşımı, varyansı tahmin eden bir dışsal değişken X_t'nin ortalaması sıfır olarak bilinen bir modeli aşağıdaki eşitlik ile verilmektedir:

$$Y_t = \varepsilon_t X_{t-1} \tag{2}$$

Burada yine $V(\varepsilon) = \sigma^2$'dir. y_t'nin varyansı $\sigma^2 X_{t-1}^2$ dir ve bu nedenle tahmin aralığı dışsal bir değişkenin gelişimine bağlıdır. Soruna yönelik bu standart çözüm hem koşullu ortalamanın hem de varyansların zamanla birlikte gelişebileceği için yetersiz görünmektedir. Belki de bu zorluk nedeniyle, zaman serisi verilerinde değişen varyans düzeltmeleri nadiren dikkate alınır.

Koşullu varyansın serinin geçmiş gerçekleşmesine bağlı olmasına izin veren bir model Granger ve Andersen tarafından tanımlanan doğrusal modeldir:

$$Y_t = \varepsilon_t Y_{t-1} \tag{3}$$

Bu durumda koşullu varyans artık $\sigma^2 Y_{t-1}$'dir (Işığıçok, 1999, s. 2). Bununla birlikte, koşulsuz varyans ya sıfırdır ya da sonsuzdur. Bu da bunu çekici olmayan bir formülasyon haline getirir ancak hafif genellemeler bu sorunu önler. Tercih edilen bir model:

$$Y_t = e_t \sqrt{h_t}$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1}^2 \tag{4}$$

Burada $V(\varepsilon_t) = 1$'dir. Bu otoregresif koşullu varyans ARCH modeli olarak isimlendirilecek olanın bir örneğidir. Tam olarak çift doğrusal bir model değil, ancak bire çok yakındır. Normallik varsayımı eklendiğinde t zamanda mevcut olan bilgi seti olan Ψ_t türünden ifade edilebilir:

$$Y_t | \psi_{t-1} \sim N(0, h_t) \tag{5}$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1}^2 \tag{6}$$

Varyans fonksiyonu daha genel şu şekilde ifade edilebilir:

$$Y_t = h(Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-p}, \alpha) \tag{7}$$

ARCH regresyon modeli Y_t'nin ortalamasının $X_t\beta$ olarak verildiği varsayılarak elde edilir. ψ_{t-1} bilgi kümesine dahil edilen gecikmeli içsel ve dışsal değişkenlerin doğrusal bir kombinasyonu ve β ise bilinmeyen parametre vektörüdür. Model biçimsel olarak şöyle yazılabilir:

$$Y_t | \psi_{t-1} \sim N(X_t\beta, h_t)$$

$$h_t = h(e_{t-1}, e_{t-2}, \dots, e_{t-p}, \alpha) \tag{8}$$

$$\varepsilon_t = Y_t - X_t\beta$$

Burada *p*, ARCH sürecinin sırasıdır ve α bilinmeyen parametrelerin bir vektörüdür. Varyans fonksiyonu mevcut gecikmeli *X*'leri de içerecek şekilde daha da genişletilebilir. Çünkü bunlar da bilgi kümesine girmektedir (Engle, 1982, s. 989):

$$h_t = h(e_{t-1}, e_{t-2}, \dots, e_{t-p}, X_t, X_{t-1}, \dots, X_{t-p}, \alpha) \tag{9}$$

veya

$$h_t = h(\psi_{t-1}, \alpha)$$

ve özellikle h_t fonksiyonu aşağıdakileri hesaba katarsa, şöyle yazılabilir:

$$h_t = h_t(\varepsilon_{t-1}, \dots, \varepsilon_{t-p}, \alpha) h_x(X_t, \dots, X_{t-p}) \tag{10}$$

Bu genelleme bu çalışmada ele alınmadığı için sadece tanım olarak verilmiştir.

1.3. Olabilirlik Fonksiyonu

Y_t'nin Eşitlik (5) ve (6)'te açıklanan bir ARCH süreci tarafından üretildiği varsayılsın. Bu sürecin özellikleri $E(x) = E(E(x)|\psi)$ ilişkisinin tekrar tekrar uygulanmasıyla belirlenebilir. Y_t'nin ortalaması ve tüm otokovaryansları sıfırdır. Koşulsuz varyansı ise $\sigma_t^2 = EY_t^2 = Eh_t$'dir. Birçok h fonksiyonu ve α'nın değeri için varyans *t*'den bağımsızdır. Bu koşullar altında Y_t'nin kovaryansı durağanlığı için bir dizi yeterli koşul aşağıda türetilmiştir. (5) ve (6) ile tanımlanan süreç tüm gözlemlerin koşullu normal dağılıma sahip olmasına rağmen, Y vektörü ile birlikte normal dağılım sergilemez. Ortak yoğunluk, tüm koşullu yoğunlukların ürünüdür ve bu nedenle *log* olabilirlik (5) ve (6)'e karşılık gelen normal koşullu *log* olasılıklarının toplamıdır. *l* ortalama log olabilirlik ve l_t, *t*'inci gözlemin *log* olabilirliği ile örneklem büyüklüğü *T* olsun. Bu durumda,

$$l = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} l_t \qquad (11)$$

$$l_t = -\frac{1}{2}\log h_t - \frac{1}{2}y_t^2/h_t$$

olabilirlikteki bazı sabitler dışında bilinmeyen parametreleri α tahmin etmek için bu olabilirlik fonksiyonu maksimize edebilir. Birinci-sıra koşullar;

$$\frac{\partial l_t}{\partial \alpha} = \frac{1}{2h_t}\frac{\partial h_t}{\partial \alpha}\left(\frac{Y_t^2}{h_t} - 1\right) \qquad (12)$$

ve Hessian,

$$\frac{\partial^2 l_t}{\partial \alpha \partial \alpha'} = -\frac{1}{2h_t}\frac{\partial h_t}{\partial \alpha}\frac{\partial h_t}{\partial \alpha'}\left(\frac{y_t^2}{h_t}\right) + \left[\frac{y_t^2}{h_t} - 1\right]\frac{\partial}{\partial \alpha'}\left[\frac{1}{2h_t}\frac{\partial h_t}{\partial \alpha}\right] \qquad (13)$$

ψ_{t-m-1} verilen ikinci terimin koşullu beklentisi sıfırdır ve birincideki son faktör birdir. Dolaysıyla, tüm gözlemler üzerinden ortalaması alınan Hessian'nın olumsuz beklentisi olan bilgi matrisi tarafından

$$\mathrm{I}_{\alpha\alpha} = \sum_t \frac{1}{2T} E\left[\frac{1}{h_t^2}\frac{\partial h_t}{\partial \alpha'}\frac{\partial h_t}{\partial \alpha'}\right] \qquad (14)$$

tutarlı bir şekilde tahmin edilen,

$$\hat{I}_{\alpha\alpha} = \frac{1}{T}\sum_t \left[\frac{1}{2h_t^2}\frac{\partial h_t}{\partial \alpha}\frac{\partial h_t}{\partial \alpha'}\right] \qquad (15)$$

h fonksiyonu *p*'inci dereceden lineer ise (karelerde) şöyle yazılabilir:

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_p Y_{t-p}^2 \tag{16}$$

O zaman bilgi matrisi ve gradient (gradyan-eğim-türev) özellikle basit bir forma sahiptir. $Z_t = \left(1, Y_{t-1}^2, \ldots, Y_{t-p}^2\right)$ ve $\alpha' = \left(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p\right)$ olsun, böylece (16)'deki eşitlik yeniden yazılabilir:

$$h_t = z_t \alpha \tag{17}$$

Kısmi türev alınarak,

$$\frac{\partial l}{\partial \alpha} = \frac{1}{2h_t} z_t \left(\frac{Y_t^2}{h_t} - 1\right) \tag{18}$$

ve bilgi matrisinin tahmini:

$$\hat{\mathrm{I}}_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2T} \sum_t (Z_t' Z_t / h_t^2) \tag{19}$$

elde edilecektir.

1.4. ARCH Regresyon Modelinin Tahmini

ARCH rasgele değişkenleri, dışsal ve gecikmeli bağımlı değişkenlerin doğrusal bir kombinasyonu olarak ve regresyon çerçevesine uygun olarak ifade edilebilen ve Eşitlik (8) ve (9)'daki gibi yazılabilir. Model için alternatif bir yorum ise doğrusal bir regresyondaki bozulmanın bir ARCH sürecini takip etmesidir. *p*'inci dereceden olabilirlik spesifikasyonu şu şekilde verilir:

$$\begin{aligned}
&Y_t | \psi_{t-1} \sim N(X_t\beta, h_t),\\
&h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2,\\
&\varepsilon_t = Y_t - X_t\beta,\\
&l = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} l_t,\\
&l_t = \frac{1}{2} log h_t - \frac{1}{2} \varepsilon_t^2 / h_t
\end{aligned} \tag{20}$$

Bu olabilirlik fonksiyonu bilinmeyen α ve β parametrelerine göre maksimize edilebilir. (1.47)'deki varsayımlar altında, β parametresinin olağan en küçük kareler (OLS) tahmincisi tutarlıdır. Çünkü X ve ε, regresyonun koşullu bir beklenti olarak tanımlanması yoluyla korelasyonsuzdur. Eğer X'ler sabit olarak ele alınıyorsa, OLS tahmininin standart hataları doğru olacaktır. Ancak X_t'de gecikmeli bağımlı değişkenler varsa, hataların kareleri ile bağıntılı olacağından, geleneksel hesaplanan standart hatalar tutarlı olmayacaktır. Bu White'ın değişen varyans ile ilgili argümanının bir uzantısı olup kovaryans matrisi için alternatif formunu kullanmanın, OLS standart hatasının tutarlı bir tahminini vereceğini öne sürer.

Regresörler bağımlı değişken içermiyorsa ve süreç durağan ise *Y* ve *X*'in sırasıyla $Tx1$ ve TxK vektörü ile bağımlı ve bağımsız değişken olmasına izin veren süreç şu şekilde ifade edilir:

$$E(Y|X) = X\beta \tag{21}$$

$$Var(Y|X) = \sigma^2 l \tag{22}$$

Geçerli olan bu ifade, aynı zamanda Gauss-Markov varsayımlarını da sağlayacaktır. OLS, Eşitlik (20)'deki model için en iyi doğrusal yansız tahmin edicidir ve varyans tahminleri yansız ve tutarlıdır. Ancak maksimum olabilirlik farklıdır ve asimptotik olarak üstündür. Birinci sıra koşul yerine getirilerek *β*'ya göre kısmi türevi alınarak maksimum olabilirlik tahmincisi şöyle bulunur:

$$\frac{\partial l_t}{\partial \beta} = \frac{\varepsilon_t X_t'}{h_t} + \frac{1}{2h_t}\frac{\partial h_t}{\partial \beta}\left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t} - 1\right) \tag{23}$$

Birinci terim dışsal değişken varyans düzeltmesi için bilinen birinci dereceden koşuludur. İkinci terim ortaya çıkar, çünkü h_t aynı zamanda Amemiya (1973)'de olduğu gibi *β*'ların bir fonksiyonudur. Doğrusal varyans fonksiyonunun yerine konulması ile;

$$\frac{\partial l}{\partial \beta} = \frac{1}{T}\sum\left[\frac{\varepsilon_t X_t'}{h_t} - \frac{1}{h_t}\left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t} - 1\right)\sum_j \alpha_j \varepsilon_{t-j}\varepsilon_{t-j}'\right] \tag{24}$$

X ve ε terimlerini aşağıdaki gibi toplayarak yaklaşık olarak yeniden yazılabilir:

$$\frac{\partial \iota}{\partial \beta} = \frac{1}{T}\sum_t X_t' \,\varepsilon_t\left[h_t^{-1} - \sum_{j=1}^{p} \alpha_j h_{t+j}^{-2}\left(\varepsilon_{t+j}^2 - h_{t+j}\right)\right] \tag{25}$$

Köşeli parantez içerisindeki ifade s_t olarak isimlendirilerek aşağıdaki gibi belirtilir:

$$\equiv \frac{1}{T}\sum_t X_t' \varepsilon_t s_t$$

$$\frac{\partial^2 l_t}{\partial \beta \partial \beta'} = -\frac{X_t' X_t}{h_t} - \frac{1}{2h_t^2}\frac{\partial h_t}{\partial \beta}\frac{\partial h_t}{\partial \beta'}\left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t}\right) - \frac{2\varepsilon_t}{h_t^2}\frac{\partial h_t}{\partial \beta} + \left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t} - 1\right)\frac{\partial}{\partial \beta'}\left[\frac{1}{2h_t}\frac{\partial h_t}{\partial \beta}\right]$$

Hessian'dan koşullu beklentiler alındığında, son iki terim tamamen geçmişin bir fonksiyonu olduğu için ortadan kalkar. Benzer şekilde ikinci terimdeki ε_t^2 / h_t ifadesi geçerli olduğundan bir olmaktadır. X_t'nin gecikmeli bağımlı değişkenleri içerip içermediğine bakılmaksızın geçerliliğini korumaktadır. Bilgi matrisi, koşullu beklentilerin beklenen değerinin tüm t'lerin ortalamasıdır ve bu nedenle aşağıdaki gibi verilir:

$$\mathrm{I}_{\beta\beta} = \frac{1}{T}\sum_{t} E\left[E\left(\frac{\partial^2 l_t}{\partial\beta\partial\beta'}\,|\psi_{t-1}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{T}\sum_t E\left[\frac{X_t' X_t}{h_t} + \frac{1}{2h_t^2}\frac{\partial h_t}{\partial\beta}\frac{\partial h_t}{\partial\beta'}\right] \quad (26)$$

p'inci dereceden doğrusal ARCH regresyonu için tutarlı bir şekilde şu şekilde tahmin edilir:

$$\hat{\mathrm{I}}_{\beta\beta} = \frac{1}{T}\sum\left[\frac{X_t' X_t}{h_t} + 2\sum_j \alpha_j^2 \frac{\varepsilon_{t-j}^2}{h_t^2} X_{t-j}' X_{t-j}\right] \quad (27)$$

Eşitlik (27)'deki son etkiler dışında, terimleri $X_t' X_t$'de toplayarak ve köşeli parantezi r_t^2 ile ifade edilirse eşitlik yeniden şöyle yazılabilir:

$$\hat{\mathrm{I}}_{\beta\beta} = \frac{1}{T}\sum_t X_t' X_t \left[\frac{1}{h_t} + 2\varepsilon_t^2 \sum_{j=1}^{p} \alpha_j^2 h_{t+j}^{-2}\right] \quad (28)$$

$$\equiv \frac{1}{T}\sum_t X_t' X_t r_t^2$$

Bilgi matrisinin diagonal olmayan bloku ise şöyledir:

$$\mathrm{I}_{\alpha\beta} = \frac{1}{T} E\left(\frac{1}{2h_t^2}\frac{\partial h_t}{\partial\alpha}\frac{\partial h_t}{\partial\beta'}\right) \quad (29)$$

Eşitlik (29)'daki $\mathrm{I}_{\alpha\beta}$ Hessian matrisinin ters işaretlisi olması nedeniyle, bilgi sisteminin dioganal olmayan blokuna eşit olmaktadır. ARCH, simetrik ve düzenli olması nedeniyle $\mathrm{I}_{\alpha\beta} = 0$ olacak ve bu diagonal olmayan bloku sıfıra eşit hale getirecektir. Dolaysıyla α ve β parametrelerinin tahmini asimptotik verim kaybı olmadan ayrı ayrı ele alınabildiği ve bunların varyanslarının da ayrı ayrı hesaplanabildiği için ulaşılan çıkarımlar geniş kapsamlıdır (Engle, 1982, s. 996).

2. GENELLEŞTİRİLMİŞ OTOREGRESİF KOŞULLU DEĞİŞEN VARYANS (GARCH) MODELİ

Geleneksel zaman serileri ve ekonometrik modeller, sabit varyans varsayımı altında oluşturulurken, Engle (1982) tarafından literatüre ARCH süreci olarak sunulan model, koşullu varyansın, koşulsuz varyansı sabit bırakarak, hataların geçmiş dönem değerlerinin bir fonksiyonu olarak zaman içerisinde değişmesine izin veren modeli öne sürmüştür.

GARCH modeli, varyansın cari dönem değerlerinin belirlenmesinde, geçmiş dönem değerleri rol almaktadır. Bu nedenle, ARCH modeli yerine zaman zaman tercih edilebilmektedir (Işığıçok, 1999, s. 6). Aynı zamanda ARCH modelindeki gecikme değerleri çok uzun olduğunda, GARCH modelinin kullanılması gecikme yapısının kısalmasında etkili olması nedeniyle, daha kullanışlı modellerdir. Bu başlıkta, çok daha esnek bir gecikme yapısına izin veren ve daha genel bir süreç sınıfı olan Genelleştirilmiş Otoregresif Koşullu Değişen Varyans modeli ele alınacaktır.

2.1. GARCH(p,q) Modeli

ARCH modelinin uygulamalarında, koşullu varyans denkleminde, gecikme yapısının uzunluğu ve negatif ARCH parametrelerinin (α), tahminiyle ilgili sorundan kaçınmak için tipik olarak sabit bir gecikme yapısı uygulanır. Bu doğrultuda hem daha uzun bir hafızaya (Nargeleçekenler, 2004, s. 158) hem de daha esnek bir gecikme yapısına izin verebilmek için Bollerslev (1986) tarafından ARCH modeli genelleştirilmiş ve GARCH süreci olarak literatüre kazandırılmıştır.

ε_t, gerçek değerli ayrık zamanlı bir stokastik süreci ve ψ_t, t zamanı boyunca tüm bilgileri içeren bilgi kümesini göstermek üzere, GARCH(p,q) modeli (süreci) aşağıdaki gibi verilmektedir (Bollerslev, 1986, s. 309):

$$\varepsilon_t|\psi_{t-1} \sim N(0, h_t) \tag{30}$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j h_{t-j} \tag{31}$$

$$= \alpha_0 + A(L)\varepsilon_t^2 + B(L)h_t$$

Burada şu kısıtlamalar vardır:

- ☞ $p \geq 0\,,\ q > 0$
- ☞ $\alpha_0 > 0\ \ ve\ \alpha_i \geq 0$ $\qquad i = 1,2, \dots, q$
- ☞ $\beta_j \geq 0$ $\qquad j = 1,2, \dots, p$

$p = 0$ için model ARCH(q) modeline indirgenir ve p=q=0 için, ε_t sadece beyaz gürültüdür. ARCH(q) işlemine koşullu varyans, yalnızca geçmiş örnek varyanslarının doğrusal bir fonksiyonu olarak belirtirken GARCH(p,q) modeli gecikmeli koşullu varyansların da modele girmesine izin verir. Bu bir tür uyarlanabilir öğrenme mekanizmasına (adaptive learning) karşılık gelir.

GARCH(p,q) regresyon modeli, ε_t'lerin lineer bir regresyonda yenilikler olmasına izin verilerek elde edilir:

$$\varepsilon_t = Y_t - X_t'b, \tag{32}$$

Burada Y_t bağımlı değişken, X_t bağımsız değişkenlerin bir vektörü ve b ise bilinmeyen parametrelerin bir vektörüdür. $1 - B(z) = 0$'ın tüm kökleri birim çember dışında ise Eşitlik (31), ε_t'lerin dağıtılmış gecikmesi olarak yeniden yazılabilir:

$$h_t = \alpha_0\left(1 - B(1)\right)^{-1} + A(L)\left(1 - B(L)\right)^{-1}\varepsilon_t^2$$
$$= \alpha_0\left(1 - \sum_{j=1}^{p}\beta_j\right)^{-1} + \sum_{i=1}^{\infty}\delta_i\varepsilon_{t-i}^2 \qquad (33)$$

Eşitlik (30) ile birlikte sonsuz boyutlu bir ARCH (∞) süreci olarak görülebilir. δ_i'ler $D(L) = A(L)(1 - B(L))^{-1}$'in güç serisi (power series) açılımında bulunur:

$$\delta_i = \alpha_i + \sum_{j=i}^{n}\beta_j\delta_{i-j} \qquad i = 1,2,\dots,q$$
$$= \sum_{j=i}^{n}\beta_j\delta_{i-j} \qquad i = q+1,\dots \qquad (34)$$

Burada, $n = min\{p, i-1\}$'dir. Eğer $B(1) < 1$ ise ve δ_i, $m = max\{p, q\}$'den büyük i için azalıyor olacaktır. Bu nedenle $D(1) < 1$ ise GARCH(p,q) süreci yeterince büyük bir *q* değeri için durağan bir ARCH(q) ile herhangi bir doğruluk derecesine yaklaştırılabilir (Bollerslev, 1986, s. 310). Sonlu boyutlu ARCH(q) süreçleri teorisinden, geniş anlamda durağanlık için $D(1) < 1$ veya eşdeğeri $A(1) + B(1) < 1$ olması beklenir (Milhøj 1985). GARCH (p,q) sürecinin eşdeğer bir temsili şu şekilde verilmektedir:

$$\varepsilon_t^2 = \sum_{i=1}^{q}\alpha_i\varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=i}^{p}\beta_j\varepsilon_{t-j}^2 - \sum_{j=1}^{p}\beta_j v_{t-j} \qquad (35)$$

ve

$$v_t = \varepsilon_t^2 - h_t = (\eta_t^2 - 1)h_t \qquad (36)$$

Burada, $\eta_t \sim N(0,1)$'dir.

Tanım gereği v_t'nin ortalaması sıfır ve korelasyonsuzdur. Bu nedenle, GARCH(p,q) süreci, sırasıyla $m = max\{p, q\}$ ve p'inci mertebeden ε_t^2'de bir otoregresif hareketli ortalama süreci olarak yorumlanabilir. Ayrıca, Y_t değişkeninin artıklarının koşullu varyansının, bir ARMA sürecini oluşturmasını göstermesi beklenir. Dolaysıyla, ARMA modelinden elde edilen hatalar, bu yapıya benzerlik gösterirler (Işığıçok, 1999, s. 7). ARMA süreci olarak öngörülen Y_t serisi ile oluşturulan model uygun ise otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon fonksiyonları beyaz gürültü sürecini göstermelidir (Nargeleçekenler, 2004, s. 159). Aynı zamanda, ARCH sürecinin, GARCH sürecine genişletilmesi, standart zaman serisi modellerinden AR modeli sürecinin genel ARMA sürecine genişletilmesine benzemektedir.

1.2. GARCH (1,1) Süreci

En basit ama genellikle çok kullanışlı GARCH (1,1) süreci, Eşitlik (30)'da verilen genel GARCH(p,q) sürecinden hareketle aşağıdaki gibidir:

$$h_t = \alpha_0\alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1} \qquad (37)$$

$\alpha_0 > 0, \quad \alpha_1 \geq 0, \quad \beta_1 \geq 0$

Geniş anlamda durağanlık için $\alpha_1 + \beta_1 < 1$ yeterlidir. Eşitlik (31) ve (35) de verilen GARCH (1,1) süreci, 2. momentin varlığı için yeterli ve gerekli koşul:

$$\mu(\alpha_1, \beta_1 m) = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} a_j \alpha_1^j \beta_1^{m-j} < 1 \tag{38}$$

Burada:

$$a_0 = 1, a_j = \prod_{i=1}^{j} (2j-1) \quad \text{ve } j = 1,2,\ldots \tag{39}$$

2. moment özyinelemeli formülle ifade edilebilir:

$$E(\varepsilon_t^{2m}) = a_m \left[\sum_{n=0}^{m-1} a_n^{-1} E(\varepsilon_t^{2n}) \alpha_0^{m-n} \binom{m}{m-n} \mu(\alpha_1, \beta_1, n) \right]$$

$$\text{x}[1 - \mu(\alpha_1, \beta_1, m)]^{-1} \tag{40}$$

İkinci moment varsa, simetri $E(\varepsilon_t^{2m-1}) = 0$ olur (Bollerslev, 1986, s. 311).

$\beta_1 = 0$ için Eşitlik 9'a göre ARCH (1) süreci için en iyi koşul, $a_m \alpha_1^m < 1$;((Engle, 1982, ss. 1005–1006). Böylece ARCH (1) sürecinde $\alpha_1 > (a_m)^{-1/m}$ ise ikinci moment mevcut değildir. Oysa $\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i = \alpha_i (1-\beta)^{-1} > (a_m)^{-1/m}$ GARCH (1,1) sürecinde bu işlemde daha uzun bellek nedeniyle ikinci moment çok iyi var olabilir. GARCH(1,1) sürecinde koşullu varyansta ortalama gecikme denklem tarafından verilir (Bollerslev, 1986, s. 311):

$$\varsigma = \sum_{i=1}^{\infty} i\delta_i \Big/ \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i = (1-\beta_i)^{-1}$$

ve medyan gecikme olduğu bulunabilir:

$$v = -log2/log\beta_1$$

Burada, $\frac{\sum_{i=1}^{v} \delta_i}{\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i} = \frac{1}{2}$ ve δ_i değeri, Eşitlik (31)'de tanımlanmıştır (Bollerslev, 1986, s. 312). Eğer, $3\alpha_1^2 + 2\alpha_1\beta_1 + \beta_1^2 < 1$ ise Bollerslev (1986)'da öne sürmüş olduğu Teorem 2[4]'ye göre dördüncü dereceden moment mevcuttur.

4 Bkz. Bollerslev 1986, s. 325.

$$E(\varepsilon_t^2) = \alpha_0(1 - \alpha_1 - \beta_1)^{-1}$$

ve

$$E(\varepsilon_t^4) = 3\alpha_0^2 = (1 + \alpha_1 + \beta_1)[(1 - \alpha_1 - \beta_1)(1 - \beta_1^2 - 2\alpha_1\beta_1 - 3\alpha_1^2)]^{-1}$$

Bu nedenle basıklık katsayısı:

$$K = (E(\varepsilon_t^4) - 3E(\varepsilon_t^2)^2)E(\varepsilon_t^2)^{-2}$$

$$= 6\alpha_1^2(1 - \beta_1^2 - 2\alpha_1\beta_1 - 3\alpha_1^2)^{-1}$$

Bu değer, varsayıma göre sıfırdan büyüktür. Dolayısıyla; GARCH (1,1) süreci, sürecin ARCH (q) süreci ile paylaştığı bir özellik olan leptokurtic (ağır kuyruk / sivri seri) özelliğine sahiptir (Milhøj 1985).

2.3. GARCH Regresyon Modelinin Tahmini

Bu bölümde Eşitlik (30), (31) ve (32)'da verilen GARCH regresyon modelinin maksimum olabilirlik tahmini ele alınacaktır. Ancak sonuçların ARCH regresyon modeline benzemesi nedeniyle, anlatım kısa tutulacaktır. GARCH regresyon modeli

$Z_t' = \left(1, \varepsilon_{t-1}^2, \ldots, \varepsilon_{t-q}^2, h_{t-1}, \ldots, h_{t-p}\right)$, $w' = \left(\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_q, \beta_1, \ldots, \beta_p\right)$
ve $\theta = (b', w')$

olarak tanımlandıktan sonra, model (41)'deki gibi yeniden yazılabilir. Bu eşitlikteki w', $(1 + p + q)\text{x}1$ boyutlu varyans denklemine ait parametreler vektörü, θ ise sistemin bütün parametrelerini barındıran $(k + 1 + q + p)\text{x}1$ boyutlu vektördür.

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= Y_t - X_t'b \\ \varepsilon_t|\psi_{t-1} &\sim N(0, h_t) \\ h_t &= Z_t'w \end{aligned} \tag{41}$$

T örnek büyüklüğü için log olabilirlik fonksiyonu:

$$L_T = T^{-1}\sum_{t=1}^{T} l_t(\theta)$$

$$l_t(\theta) = -\frac{1}{2}\log h_t - \frac{1}{2}\varepsilon_t^2 h_t^{-1} \tag{42}$$

Varyans denklemi parametresi olan *w*'ye göre kısmi türevi alındığında,

$$\frac{\partial l_t}{\partial w} = \frac{1}{2}\frac{1}{h_t}\frac{\partial h_t}{\partial w}\left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t} - 1\right) \tag{43}$$

$$\frac{\partial^2 l_t}{\partial w \partial w'} = \left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t} - 1\right)\frac{\partial}{\partial w'}\left[\frac{1}{2}h_t^{-1}\frac{\partial h_t}{\partial w}\right] - \frac{1}{2}h_t^{-2}\frac{\partial h_t}{\partial w}\frac{\partial h_t}{\partial w'}\frac{\varepsilon_t^2}{h_t} \tag{44}$$

Burada,

$$\frac{\partial h_t}{\partial w} = Z_t + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \frac{\partial h_{t-i}}{\partial w} \tag{45}$$

Bu eşitlikteki tek fark Eşitlik (45)'deki özyinelemeli kısmın dahil edilmesidir. Burada, $B(1) < 1$, Eşitlik (45)'nin kararlı olduğu belirtilmektedir. Eşitlik (44)'deki ilk terimin koşullu beklentisi sıfır olduğundan bilgi matrisinin *w*'ye karşılık gelen kısmı, yalnızca birinci türevleri içeren Eşitlik (44)'deki son terimin örnek benzerliği (analoğu) tarafından tutarlı bir şekilde tahmin edilir. Ortalama parametre verimlerine göre farklılaştırma şöyledir:

$$\frac{\partial l_t}{\partial b} = \varepsilon_t X_t h_t^{-1} + \frac{1}{2} h_t \frac{\partial h_t}{\partial b}\left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t} - 1\right) \tag{46}$$

$$\frac{\partial^2 l_t}{\partial b \partial b'} = -\frac{1}{h_t} X_t X_t' - \frac{1}{2} h_t^{-2} \frac{\partial h_t}{\partial b}\frac{\partial h_t}{\partial b'}\left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t}\right)$$

$$= -2h_t^2 \varepsilon_t \frac{\partial h_t}{\partial b} + \left(\frac{\varepsilon_t^2}{h_t} - 1\right)\frac{\partial}{\partial b'}\left[\frac{1}{2} h_t^{-1} \frac{\partial h_t}{\partial b}\right] \tag{47}$$

Burada,

$$\frac{\partial h_t}{\partial b} = -2\sum_{j=1}^{q} \alpha_j X_{t-j} \varepsilon_{t-j} + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \frac{\partial h_{t-j}}{\partial b} \tag{48}$$

şeklindedir.

Burada da ARCH regresyon denkleminden tek fark özyinelemeli kısmın Eşitlik (48)'e dahil edilmesidir. Bilgi matrisinin *b*'ye karşılık gelen kısmının tutarlı bir tahmini, Eşitlik (47)'deki ilk iki terimin örnek benzerliği tarafından verilir. Ancak ikinci terimdeki $\varepsilon_t^2 h_t^{-1}$, beklenen değeri bir ile değiştirilmiştir. Bu tahmin yalnızca birinci türevleri de içerecektir.

Son olarak, bilgi matrisindeki köşegen dışı bloktaki elemanlar sıfır olarak gösterilebilir. Bu asimptotik bağımsızlık nedeniyle *w*, tutarlı bir *b* tahminine dayalı olarak asimptotik etkinlik kaybı olmadan tahmin edilebilir ve bunun tersi de geçerlidir.

Maksimum olabilirlik tahminlerini ve ikinci dereceden verimliliği (second-order effency) elde etmek için iteratif bir prosedür gereklidir (Bollerslev, 1986, s. 316). ARCH(q) regresyon modeli için puanlama yöntemi, basit bir yardımcı regresyon olarak ifade edilebilir. Ancak Eşitlik (45) ve (48)'deki özyinelemeli terimler bu prosedürü karmaşıklaştırır. Bunun yerine; Bernart, Hall, Hall ve Hausman (BHHH) (1974) algoritmasının uygun olduğu belirlenmiştir. $\theta^{(i)}$ iterasyondan sonraki parametre tahminlerini göstersin. $\theta^{(i+1)}$ daha sonra şöyle hesaplanır:

$$\theta^{(i+1)} = \theta^{(i)} + \lambda_i \left(\sum_{t=1}^{T} \frac{\partial l_t}{\partial \theta} \frac{\partial l_t}{\partial \theta'} \right)^{-1} \sum_{t=1}^{T} \frac{\partial l_t}{\partial \theta}$$

Burada, $\frac{\partial l_t}{\partial \theta}$, $\theta^{(i)}$'de değerlendirilir ve λ_i verilen yönde olabilirlik fonksiyonunu maksimize etmek için seçilen değişken bir adım uzunluğudur. Yön vektörünün, $\frac{\partial l_t}{\partial \theta}$ üzerinde bir Tx1 vektörünün OLS regresyonundan hesaplanabilmektedir. Ayrıca bilgi matrisindeki blok köşegenliği nedeniyle, $w^{(i)}$ ve $b^{(i)}$ için iterasyonlar ayrı ayrı gerçekleştirilebilir. Maksimum olabilirlik tahmini, $\hat{\theta}_T$'nin θ_0 için güçlü bir şekilde tutarlı olduğu ve ortalama θ_0 ve kovaryans matrisi $\mathcal{F}^{-1} = -E\left(\partial^2 l_t / \partial\hat{\theta}\partial\theta'\right)^{-1}$ ile asimptotik olarak normal olduğudur. Bununla birlikte, $\mathcal{F} = F$'dir. Burada $F = E\left((\partial l_t/\partial\theta)(\partial l_t/\partial\theta')\right)$ ve asimptotik kovaryans matrisinin tutarlı bir tahmini ve bu nedenle BHHH iterasyonu $T^{-1}(\sum_{t=1}^{T}(\partial l_t/\partial\theta)(\partial l_t/\partial\theta'))^{-1}$ tarafından verilir. Eşitlik (30)'nin daha zayıf varsayımlar kümesiyle değiştirilmesi ile:

$$\begin{aligned} &E(\varepsilon_t|\psi_{t-1}) = 0 \\ &E(\varepsilon_t^2 h_t^{-1}|\psi_{t-1}) = 1 \\ &E(\varepsilon_t^4 h_t^{-2}|\psi_{t-1}) \leq M \leq \infty \end{aligned} \qquad (49)$$

$\hat{\theta}_T$, θ_0 için güçlü bir şekilde tutarlıdır ve ortalama θ_0 ile ancak kovaryans matrisi $\mathcal{F}^{-1}F\mathcal{F}^{-1}$ ile asimptotik olarak normaldir (Weist 1986) ve White(1982). Gerçek koşullu dağılım doğru ise $F = \mathcal{F}$ ve dolaysıyla $\mathcal{F}^{-1}F\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^{-1}$ normaldir.

3. ARCH-GARCH BOZUKLUKLARININ TESTİ (ARCH-LM TESTİ)

Gecikmeli bağımlı değişkenli veya gecikmesiz doğrusal regresyon modelinde, bozulmalar koşullu olarak değişen varyanslı değilse, OLS uygun bir prosedürdür (Nargeleçekenler, 2004, s. 157). ARCH modeli iteratif yöntemler gerektirdiğinden, tahmin etmeye başlamadan önce uygun olup olmadığının test edilmesi gerekmektedir. Lagrange çarpan test yöntemi, birçok benzer durumda olduğu gibi ARCH-GARCH modelleri için de idealdir.

Sıfır hipotezi altında, $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p$ test edilir. Test, sıfırın altındaki puana ve sıfırın altındaki bilgi matrisine dayanmaktadır. $h_t = h(Z_t\alpha)$ ile ARCH modeli düşünüldüğünde burada *h*, hem doğrusal hem de üstel durumları ve diğer birçok durumu içeren türevlenebilir bir fonksiyon olup $Z_t = \left(1, \varepsilon_{t-1}^2, \ldots, \varepsilon_{t-p}^2\right)$'dir. Sıfır hipotezi altında, h_t, h^0 ile ifade edilen bir sabittir. h', *h*'ın skaler türevi olduğu $\partial h_t/\partial\alpha = h'Z_t'$ yazıldığında puan ve bilgi şu şekilde yazılabilir:

$$\frac{\partial l}{\partial\alpha}|_0 = \frac{h'}{2h^0}\sum_t Z_t'\left(\frac{\varepsilon_t^2}{h^0} - 1\right) = \frac{h^{0\prime}}{2h^0}Z'f^0$$

$$I_{\alpha\alpha}^0 = \frac{1}{2}\left(\frac{h^{0\prime}}{h^0}\right)^2 EZ'Z$$

LM test istatistiği aşağıda belirtildiği gibi tutarlı bir şekilde tahmin edilebilir:

$$\xi^* = \frac{1}{2}f^{0\prime}Z(Z'Z)^{-1}Z'f^0 \tag{50}$$

Burada $Z' = (Z_1',\dots,Z_T')$ ve $\left(\frac{\varepsilon_t^2}{h^0} - 1\right)$'in sütun vektörü ise f^0'dir.

Bu, Breusch ve Pagan (1979) ile Godfrey (1981) tarafından değişen varyans testi için kullanılan formdur. Belirttikleri gibi *h* fonksiyonuna yapılan tüm referanslar ortadan kalkar ve bu nedenle test yalnızca $Z_t\alpha$'nın bir fonksiyonu olan *h* için aynıdır.

Bu problemde bilgi matrisinde istenen beklenti, sıfır hipotezi altında değerlendirilebilir. Üstün sonlu örnek performansına sahiptir. Hem bu model hem de değişen varyans modeli için uygun olan ikinci bir sadeleştirme, normallik varsayıldığı için $f^{0\prime}f^0/T = 2$'nin katı olduğunu belirtmektedir. Böylece asimptotik olarak eşdeğer bir istatistik olacaktır (Bollerslev, 1986, s. 318).

$$\xi = Tf^{0\prime}Z(Z'Z)^{-1}Z'f^0/f^{0\prime}f^0 = TR^2 \tag{51}$$

Burada R^2, Z ve f^0 arasındaki çoklu belirlilik (determinasyon) katsayısıdır. Bir sabit eklemek ve bir skaler ile çarpmak bir regresyonun R^2'sini değiştirmeyeceğinden, bu aynı zamanda e_t^2'nin bir kesme ve *p* gecikmeli değerleri üzerindeki regresyonun R^2'sidir. Sıfır hipotezi reddedilemediğinde, *p* serbestlik dereceli ki kare (χ^2), asimptotik olarak dağılacaktır.

Test süreci OLS regresyonunu uygulamak ve hataları kaydetmektir. Söz konusu hataların kareleri, bir sabit ve p gecikme üzerinde regres edilir ve TR^2 yi χ_p^2 olarak test eder. Bu durumda, asimptotik olarak yerel en güçlü test, olabilirlik oranı olacaktır.

4. KOŞULLU DEĞİŞEN VARYANS UYGULAMASI

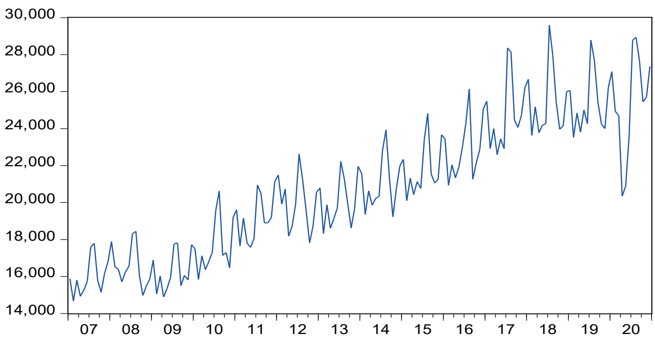
Bu bölüme ilişkin uygulama modeli, TEİAŞ'tan elde edilen elektrik talebi (talep edilen miktar) verileri kullanılarak, koşullu değişen varyans modelleri ile gerçekleştirilmiştir. Türkiye'nin elektrik talebine ilişkin veriler

2007:01-2020:12 dönemini kapsayan aylık gözlemlerden oluşmaktadır. Elektrik talebine ilişkin zaman yolu grafiği Şekil-1'deki gibidir. Bu dönem aralığı ile çalışılmasının bazı nedenleri; ekonomik kriz, siyasi belirsizlik ve salgın dönemlerinin tamamını kapsıyor olmasıdır. Oynaklık modelleri ile çalışılmasındaki amaç ise aşağıdaki gibidir:

Koşullu değişen varyans modelleri genellikle, finansal zaman serisi niteliğindeki borsa, hisse senedi, kripto para, döviz, altın (Gün 2020; Işildak 2021; Nargeleçekenler 2004; Uğurlu and Cihangir 2017) vb. gibi finansal enstürmanın belirli bir zamandaki riskini ölçmek ve oynaklığın belirlenmesi konusunda daha yoğun kullanılıyor olmasıdır. Bazı çalışmalarda ise makroekonomik zaman serisi verileri ile de uygulama alanı bulmuştur (Bollerslev 1986; Engle 1982; Işığıçok 1999).

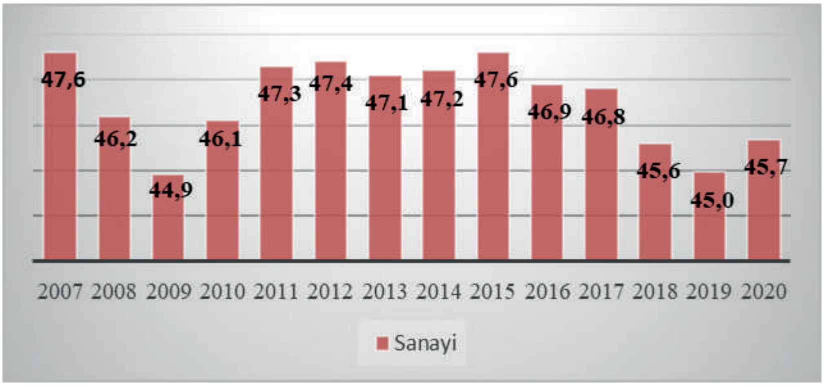
Türkiye'de bölgeler arası gelişmişlik düzeyleri, gelen turist sayısı, sanayi üretimi, vb. gibi değişkenlerin varlığı, elektrik tüketiminin ve talebinin miktarında değişmelere neden olmaktadır. Bu ve benzeri parametreler, elektrik talebine ilişkin hata teriminin zaman içerisinde sabit kalmamasına, başka bir deyişle, değişen bir yapıda olmasına neden olmaktadır. Dolayısıyla, yukarıda belirtilen etkilerin varlığı, elektrik talebi açısından önem taşımaktadır. Bu kapsamda, elektrik talebi için koşullu değişen varyans modeli (ARCH) ile tahmin edilmiştir.

Şekil 1. Elektrik Talebinin Zaman Yolu



Şekil 1'de elektrik talebine ilişkin zaman yolu grafiği incelendiğinde, istikrarlı ve artan eğilim sergilemektedir. Ancak istikrarlı artışlar bazı dönemlerde, sosyal ve ekonomik bazı nedenlerle düşüşler veya kırılmalar yaşamıştır. Şekil 1 incelendiğinde, 2008 yılının Şubat ayında ve 2010 yılının Ağustos ayını kapsayan dönemde sapma söz konusudur. Bu dönem, küresel piyasaları ve özellikle de dış ticaretteki partnerlerinin yaşamış olduğu ekonomik problemler nedeniyle, Türkiye ekonomisini de bu problemlerden etkilenmesi kaçınılmaz olmuştur. Benzer şekilde, 2019 yılı sonlarında benzer sapma yaşanmıştır. Şekil 2'de de görüleceği üzere, kriz döneminin sanayi sektörünün elektrik tüketimini etkilediği görülmektedir.

Şekil 2. Sanayi Sektörü Elektrik Tüketim Oranı (%)



Kaynak: TUİK, TEDAŞ

Şekil 2'den görüleceği üzere, 2008 yılında yaşanan küresel ekonomik kriz, Türkiye ekonomisinin lokomotifi sayılan sanayi sektörünün elektrik tüketimini de etkilemiştir. 2007 yılında %47.6 oranında elektrik tüketimi bulunurken, 2008 yılında %1.4 oranında düşüşle %46.2 olarak gerçekleşmiştir. 2008 yılında yaşanan ekonomik krizin etkileri, sadece 2008 yılı ile sınırlı kalmamış ve 2009 yılında daha şiddetli hissedilmiştir. 2009 yılında sanayi sektöründe gerçekleşen elektrik tüketim oranı %44.9 oranına gerilerken, 2007 yılı verilerine göre ekonomik kriz sürecinde yaklaşık %2.7 oranında azalma gerçekleşmiştir. Ayrıca, 2007 yılındaki sanayi sektöründeki elektrik tüketim oranı seviyesine, ancak 2015 yılında ulaşılabilmiştir.

Benzer şekilde 2012 yılı Şubat ayında, elektrik tüketiminde düşüş yaşanmıştır. Bu düşüşün nedeni ise Euro Bölgesi'nde yaşanan krizin, Türkiye elektrik tüketiminde kendini göstermesidir. Ancak bu krizin Türkiye ekonomisine etkileri, 2008 yılında yaşanan krizin etkisi gibi sert olmamış ve özellikle elektrik tüketiminde yaşanan bu kayıp, 2012 yılından 2013 yılına geçen süreçte ticarethanelerde ve sanayide yaklaşık %0.1 dolaylarında düşüş ile gerçekleşmiştir.

2016 yılında ise elektrik tüketiminde özellikle Haziran ayında başlayan düşüş, Ağustos ayında artmaya başlamışsa da, Eylül ayında tekrar düşüş yaşamıştır. 2016 yılı Türkiye ekonomisi açısından hem belirsizliklerin hem de ekonomik büyümenin yavaşladığı bir yıl olmuştur. TUİK verilerine göre, 2016 yılı son çeyreğinde bir önceki yılının aynı dönemine göre %1.8 ve 2016 yılı üçüncü çeyreğine göre %2.7'lik bir daralma yaşanmıştır. Ekonomi, 2009 yılındaki aynı çeyrek dönemdeki ekonomik daralmayı (%2.8) yaşamıştır.

2019 yılının Aralık ayında Çin'in Vuhan şehrinde ortaya çıkan COVID-19 adlı bulaşıcı virüs, kısa sürede dünyayı etkisi altına almış ve Dünya Sağlık Örgütü (DSÖ-WHO), bu salgını 11.03.2020 günü pandemi olarak ilan etmiştir[5]. COVID-19 pandemisi ile başlayan süreç, öncelikle Çin ve çevresindeki ülkeleri, daha sonra da hemen hemen her ülkeyi etkisi altına almıştır. Türkiye'de salgının ilk tespiti ise dünyada pandeminin ilan edildiği gün olan 11.03.2020'de Sağlık Bakanlığı tarafından paylaşılmıştır.

Dünya Ekonomi Formu'nun 2020 yılında yayınlamış olduğu bir rapora göre, pandeminin başladığı Mart-Nisan ayı ortalarından Temmuz ayına kadarki süreçte, San Francisco'da %23'den fazla elektrik tüketiminde düşüş yaşanmıştır[6]. Benzer durum, Türkiye'nin elektrik tüketiminde de yaşanmış ve bu durum ekonomik göstergelerin negatife dönmesine ve özellikle de dış ticaret hacminin düşmesine neden olmuştur. Pandemi süreci, ekonomik daralmayı ve hatta küçülmeyi beraberinde getirirken, ülkede temel ihtiyaçlar dışındaki sektörlerin tamamında kısıtlamaların yaşanmasına neden olmuştur. Öyle ki; virüsün etkileri, finansal piyasaları da etkilemiş ve korku endeksi olarak bilinen VIX (volatility index), 16.03.2020 tarihinde 82.69[7] seviyelerine kadar çıkmıştır. Bu değer, Kasım 2008 de ölçülen 80.86 değerinden dahi yüksektir.

Salgının etkisi, 2020 yılının ikinci çeyreğinde Türkiye ekonomisinin %-10.3 oranında küçülmesine neden olmuştur (Türkiye Cumhuriyeti Cumhurbaşkanlığı Strateji ve Bütçe Başkanlığı, TUİK). İkinci çeyrekte, özellikle sanayi ve hizmetler sektörü (inşaat sektörü dahil) sırasıyla %16.5 ve %10.6 düzeylerinde küçülme yaşanmasına neden olmuştur.

4.1. Elektrik Talebine İlişkin Koşullu Değişen Varyans Modellerinin Tahmini

Öncelikle, elektrik talebine ilişkin veriler (talep) Eviews'te Proc menüsünün altındaki Seasonal Adjustment komutunun altında yer alan Moving Average Methods komutu ile mevsimsellikten arındırılmıştır. Daha

---

5 https://covid19.saglik.gov.tr/TR-66494/pandemi.html#:~:text=A%C3%A7%C4%B1klama%3A%20 COVID%2D19%2C%20%C3%BClkemizde,DS%C3%96)%20taraf%C4%B1ndan %20pandemi%20ilan%20edilmi%C5%9Ftir. (Erişim Tarihi: 22.07.2021).

6 https://www.weforum.org/agenda/2020/09/cities-north-africa-middle-east-covid-pandemic-coronavirus-economics/ (Erişim Tarihi: 22.07.2021).

7 VIX korku endeksinde, endeks değeri 60'ın üzerinde olduğunda, piyasalarda büyük bir kargaşa yaşandığı anlamına gelmektedir (Yapı kredi yatırım, https://www.yatirimkredi.com/vix-endeksi-volalite-endeksi-nedir.html).

sonra, elektrik talebi değişkenine ilişkin mevsimsellikten arındırılan verilerin (talepsa) sırasıyla logaritmaları ve farkı alınarak lntf değişkenine ulaşılmıştır. Böylece, logaritmik fark alınmasıyla elektrik talebindeki şiddet (dalgalanma şiddeti/uzunluğu) ortaya konmaya çalışılmıştır.

Koşullu değişen varyans uygulamasına geçmeden önce, değişkene ilişkin uygun otoregresif hareketli ortalama modeli (ARMA) belirlenmeye çalışılmıştır. Uygun ARMA modeli belirlenirken çeşitli denemeler gerçekleştirilmiştir. Yapılan çok sayıdaki tahmin sonucunda elde edilen modellerden istatistiksel olarak anlamlı olan modeller belirlenmiş ve en küçük bilgi kriterine sahip ARMA modeli ile koşullu değişen varyans modelinin ortalama denklemi oluşturulmuştur. ARMA (1,0), ARMA (1,1), ARMA (2,1), ARMA (0,1), ARMA (3,0) ve ARMA (0,3) modelleri anlamlı bulunmuştur. İlgili modellere ait bilgi kriterleri değerleri Tablo-2'de gösterilmiştir.

Tablo-1. Uygun ARMA Modelinin Belirlenmesi

	ARMA (1,0)	ARMA (1,1)	ARMA (2,1)	ARMA (0,1)	ARMA (3,0)	ARMA (0,3)
AIC	-3.988096	-4.031189	**-4.048971**	-4.020734	-3.991673	-4.040675
SC	-3.950602	-3.974949	-3.973676	**-3.983393**	-3.916067	-3.965992
HQ	-3.972877	-4.008361	**-4.018406**	-4.005578	-3.960980	-4.010363

AIC (Akaike Information Criterion), SIC (Schwarz Information Criterion) ve HQ (Hannan-Quinn Criter) bilgi kriterlerine göre, en küçük değer ARMA (2,1) modeli olarak belirlenmiştir. Bu doğrultuda koşullu değişen varyans modeli bu ortalama denklemi ile kurulmuştur.

Uygun ARMA modeli belirlendikten sonra, elde edilen modelin değişen varyansın varlığının test edilmesi gerekmektedir. ARCH-LM testi aşağıdaki regresyonun parametrelerinin tahmini ile elde edilmiştir:

$$\mathrm{lntalep_t} = \mathrm{c} + \theta_1 \mathrm{lntalep_{t-1}} + \cdots + \theta_p \mathrm{lntalep_{t-p}} + \mathrm{u_t} \quad (52)$$

$$\hat{u}_t^2 = c + \alpha_1 \hat{u}_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q \hat{u}_{t-q}^2 + v_t \quad (53)$$

Talep değişkeninin geçmiş dönem değerleri ile oluşturulan Eşitlik (52) modelinin hatalarının kareleri ile elde edilen, Eşitlik (53) regresyonunun tahmini ile gerçekleştirilmektedir. Bu tahminde $LM = (T-q)R^2$ şeklinde hesaplanan test istatistiği X^2 dağılımına sahip olup, sonuçlar Tablo 2'de yer almaktadır.

Tablo 2. ARCH-LM Test Sonucu

F-istatistiği	11.81627	Prob. F(1,162)	0.0007
Gözlem*R^2	11.14894	Ki-Kare prob.(1)	0.0008

Bu durumda, ilgili teste ilişkin kurulan hipotezler aşağıdaki gibidir:

$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_q = 0$ (ARCH Etkisi Yoktur)

$H_1: \alpha_i \neq 0\ (en\ az\ bir\ tanesi)$ (ARCH Etkisi Vardır)

Elde edilen ARCH-LM sonuçlarına ilişkin Tablo-3 değerleri incelendiğinde, Gözlem*R^2 olarak hesaplanan değere ve bunun p değerine göre, H0 hipotezi reddedilir ve H1 hipotezi kabul edilir. Diğer bir deyişle, elektrik talebi değişkeninin varyansının zaman içerisinde sabit kalmadığı ARCH etkisinin var olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Ayrıca, elektrik talebi değişkenine ilişkin seçilen ARMA (2,1) modelinin hatalarının serisel korelasyon içerip içermediği, Breush-Godfrey serisel korelasyon LM testi ile ortaya konmuştur. Buradaki Ki-kare test istatistiği Gözlem*R^2 değeri 0,297202 ve bunun *p* değeri 0,8619 bulunmuştur. Böylece, seçilen ARMA (2,1) modelinin serisel korelasyon içermediği ancak ARCH etkisinin olduğu sonucuna varılmıştır. Buradan hareketle, çeşitli ARCH ve GARCH modelleri denenmiş ve uygun olanlardan bazıları Tablo 3'e aktarılmıştır.

Tablo 3. Koşullu Değişen Varyans Analiz Sonuçları

ARMA(2,1)	**ARCH p=1**	**GARCH p=1 q=1**	**ARCH p=2**	**GARCH p=2 q=1**	**GARCH p=1 q=2**
Parametre	**Ortalama Denklemi**				
μ	0.002679	0.0033	0.003291	0.003336	0.003247
	(0.00070)	(0.00000)	(0.00000)	(0.00000)	(0.00000)
ϕ_1	0.198257	0.442513	0.453545	0.469450	0.463965
	(0.17960)	(0.00000)	(0.00000)	(0.00000)	(0.00000)
ϕ_2	0.171402	0.322041	0.319859	0.368728	0.330405
	(0.19370)	(0.00010)	(0.00010)	(0.00000)	(0.00000)
θ_1	-0.774516	-0.985103	-0.984992	-0.986811	-0.985403
	(0.00000)	(0.00000)	(0.00000)	(0.00000)	(0.00000)

	Varyans Denklemi				
	ARCH p=1	**GARCH p=1 q=1**	**ARCH p=2**	**GARCH p=2 q=1**	**GARCH p=1 q=2**
α_0	0.000541	0.000376	0.000468	0.000556	0.00041
	(0.00000)	(0.01350)	(0.00000)	(0.00030)	(0.00770)
α_1	0.551863	0.432951	0.411838	0.465523	0.492181
	(0.00000)	(0.00020)	(0.00020)	(0.00000)	(0.00010)
α_2			**0.164465**	0.458895	
			(***0.19020***)	(0.00000)	
β_1		0.223328		***-0.372924***	***0.320666***
		(0.22140)		***(0.04200)***	***(0.23870)***
β_2					***-0.164544***
					(0.39590)
AIC	-4.113447	-4.135384	-4.140647	-4.159155	-4.128941
SIC	-4.000504	-4.003616	-4.00888	-4.008563	-3.97835
HQ	-4.0676	-4.081895	-4.087158	-4.098024	-4.067811
DW	1.768744	1.877175	1.89696	1.904126	1.911512
Gözlem*R^2	1.152516	0.010751	***0.119034***	0.174959	0.059719
Ki-Kare prob.(1)	0.283000	0.917400	0.730100	0.675700	0.806900

Not: Parantez içerisindeki değerler Prob değerleridir.

***** Değerleri ise %10 anlamlılık düzeylerindeki sonuçları göstermektedir.***

Farklı yapıda ARCH ve GARCH model denemeleri sonucunda hem istatistiksel olarak anlamlı hem de katsayı kısıtlamalarını yerine getirebilen modellerin ARCH (1), ARCH (2) ve GARCH (1,1) modelleri olduğu görülmüştür. Ancak ARCH (2) modeli ile GARCH (1,1) modellerinin ilgili katsayıları istatistiksel olarak anlamsız bulunmuştur. Bu nedenle, lntf değişkeninin koşullu değişen varyans modeli ARCH (1) hem parametre kısıtlarına göre geçerli olması, hem de ilgili katsayılar istatistiksel olarak anlamlı olması nedeniyle, en uygun model olarak belirlenmiştir. Ayrıca, uygun olarak seçilen ARCH (1) modelinin ARCH etkisi içerip içermediği tekrar sınanmış ve ki-kare değerine ilişkin *p* değeri 0,283 olduğundan, seçilen bu modele ilişkin değişen varyans sorunun ortadan kalktığı sonucuna varılmıştır.

Sonuç

Elektrik; nüfus artışı, sanayileşme ve teknolojik gelişmeler ile doğada varlığının keşfi ve gündelik yaşamda elverişli kullanımının icadına ek olarak, sürdürülebilir hayatın vazgeçilmez unsurudur. Elektrik, aynı zamanda ekonomik ve sosyal hayatın önemli bir parçası olurken, yaşam kalitesinin artırılmasında önemli bir bileşen ve ülkelerin gelişmişlik düzeylerinin büyük bir paydaşı olan ikincil enerji kaynağı olarak stratejik öneme sahiptir.

Kısa, orta ve uzun dönemli elektrik tahmin çalışmaları, ekonomik büyüme ve ülkelerin kalkınması için önem arz etmektedir. Nitekim, günlük hayatın önemli bir parçası olan elektrik, kıt bir kaynaktır. Ekonomi teorisi ise kıt kaynakların en iyi kullanımına, diğer bir deyişle, ekonomik verimliliğe dayanmaktadır. Tahmin çalışmalarının ve sonuçlarının, sapmasız ve tutarlı olabilmesi için hem kurum ve kuruluşlar hem de akademik çevreler, bu konuda sürekli katkı sunmaya çalışmaktadır. Dolayısıyla, ülkelerin gelişmişlik düzeyine ulaşabilmeleri için özellikle gelişmekte olan ülkelerin, elektrik arz-talep dengelerini korumaları ve kuşkusuz bu dengeleri doğruya yakın tahmin edebilmeleri gerekliliği, elektrik tahmini çalışmalarının her dönem önemli olmasını sağlamıştır.

Elektrik talep tahmini konusunda yapılan çalışmalar gerek çok komplike yapılar gerekse çok daha kolay yöntemler olsun, kısa dönemde (saat, gün ve hafta) benzer çıktıları üretecektir. Uzun dönemli (yıllık) tahminler ise gerçeğe yakın sonuçlar üretmeyebilir. Bunun nedeni, uzun dönemli tahminlerde kullanılan değişkenlerin parametrelerinde yıldan yıla farklılıklar olabilir. Bu duruma en güncel örnek ise 2020 yılında meydana gelen COVID-19 pandemisi gösterilebilir. Orta dönemli (aylık, çeyrek yıllık) çalışmalar ise, yukarıda sayılan durumlara nazaran daha sağlıklı sonuçlar vermektedir. Ancak orta dönemli tahminlerin ise arz yetersizliği ve olası elektrik ithalatında yaşanabilecek aksaklık durumunda, yatırımların yapılması için yeterli zamanı sağlamayabilir.

Çalışmada, koşullu değişen varyans uygulaması gerçekleştirilmiştir. Ele alınan çalışma döneminde, elektrik talebi değişkeninde ARCH etkisi belirlenmiştir. Bu sonuç, elektrik talebine ait seride, önemli artma veya azalma olması nedeniyle, hata teriminin de bu hareketlerden etkilenerek sabit varyans özelliğini yitirmesine yol açmıştır. Dolayısıyla, bu sonuç elektrik talebinde simetrik bir etkiyi göstermektedir. Diğer bir deyişle, ARCH (1) modeli, pozitif ve negatif şokların, önceki dönem şoklarının kareleri ile ilişkili olduğunu ve oynaklığın ise bu ilişkiden aynı şekilde etkilendiğini göstermektedir. Çalışma modelinde ARCH katsayısı, (α_1 =0.55) olarak hesaplanmıştır. Dönemsel etkiler nedeniyle, oynaklığın etki süresinin çok uzun olmayacağını, ancak bir oynaklığa neden olduğu sonucuna varılmıştır.

Kaynakça

Bollerslev, Tim. 1986. “Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity.” *Journal of Econometrics* 31:307–27. doi: 10.1109/TNN.2007.902962.

Brooks, Chris. 2008. *Introductory Econometrics for Finance*. New York.

Durllauf, Steven N., and Lawrence E. Blume. 2010. *Macroeconometrics and Time Series Analysis*. edited by S. N. Durlauf and L. E. Blume. London: Palgrave Macmillan UK.

Engle, Robert F. 1982. “Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation.” *Econometrica* 50(4):987–1007. doi: 10.2307/1912773.

Gün, Musa. 2020. “Döviz Kuru Volatilitesinin Doğrusal ve Doğrusal Olmayan Yöntemler ile İncelenmesi.” *İstanbul Ticaret Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi* 39(2020/3):952–74. doi: 10.46928/iticusbe.763980.

Işildak, Sait. 2021. “Garch Modellerle Oynaklık Tahmini: Bitcoin Örneği.” *Journal of Business and Trade (JOINBAT)* 2(2):49–61.

Işığıçok, Erkan. 1999. “Türkiye’de Enflasyonun Varyansının ARCH ve GARCH Modelleri Ile Tahmini.” *Uludağ Üniversitesi İİBF Dergisi* 17(2):1–17.

Kirchgässner, Gebhard, and Jürgen Wolters. 2007. *Introduction to Modern Time Series Analysis*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.

Milhøj, Anders. 1985. “The Moment Structure of ARCH Processes.” 12(4):281–92.

Mills, Terence C. 2019. *Applied Time Series Analysis*. edited by J. S. Bentley. Loughborough, United Kingdom: Academic Press publications.

Montgomery, Douglas C., Cheryl L. Jennings, and Murat. Kulahci. 2015. *Introduction Time Series Analysis and Forecasting*. New Jersey: Wiley.

Nargeleçekenler, Mehmet. 2004. “Euro Kuru Satış Değerindeki Volatilitenin ARCH ve GARCH Modelleri Ile Tahmini.” *İstanbul Üniversitesi İktisat Fakültesi Mecmuası* 54(2):153–79.

Poo, Juan Rodriguez. 2003. *Computer-Aided Introduction to Econometrics*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.

Rachev, Svetlozar T., Stefan Mittnik, Frank J. Fabozzi, Sergio M. Focardi, and T. E. O. Jasic. 2007. *Financial Econometrics*. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.

Uğurlu, Erginbay, and Çiğdem Kurt Cihangir. 2017. “Altın Piyasasında Asimetrik Oynaklık: Türkiye İçin Model Önerisi.” *Journal of Business Research - Turk* 3(9):284–99. doi: 10.20491/isarder.2017.300.

Weist, Andrew A. 1986. “Asymptotic Theory Gor ARCH Models: Estimation and Testing.” *Econometric Theory* 2:107–31.